

# Inhaltsverzeichnis

<b>Überblick</b>	<b>1</b>
<b>1 Zeitabhängige Prozesse in Natur und Technik</b>	<b>7</b>
1.1 Newtonsche Himmelsmechanik . . . . .	10
1.2 Klassische Moleküldynamik . . . . .	15
1.3 Chemische Reaktionskinetik . . . . .	20
1.4 Elektrische Schaltkreise . . . . .	28
Übungsaufgaben . . . . .	34
<b>2 Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen</b>	<b>40</b>
2.1 Globale Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	41
2.2 Beispiele maximaler Fortsetzbarkeit . . . . .	47
2.3 Struktur nichteindeutiger Lösungen . . . . .	51
2.4 Schwach singuläre Anfangswertprobleme . . . . .	59
2.5 Singuläre Störungsprobleme . . . . .	64
2.6 Quasilineare differentiell-algebraische Probleme . . . . .	67
Übungsaufgaben . . . . .	78
<b>3 Kondition von Anfangswertproblemen</b>	<b>83</b>
3.1 Sensitivität gegen Störungen . . . . .	84
3.1.1 Propagationsmatrizen . . . . .	84
3.1.2 Konditionszahlen . . . . .	90
3.1.3 Störungsindex differentiell-algebraischer Probleme . . . . .	94
3.2 Stabilität von Differentialgleichungen . . . . .	99
3.2.1 Begriff der Stabilität . . . . .	99
3.2.2 Lineare autonome Differentialgleichungen . . . . .	102
3.2.3 Stabilität von Fixpunkten . . . . .	110
3.3 Stabilität rekursiver Abbildungen . . . . .	115
3.3.1 Lineare autonome Rekursionen . . . . .	115
3.3.2 Spektren rationaler Funktionen von Matrizen . . . . .	121
Übungsaufgaben . . . . .	123

<b>4</b>	<b>Einschrittverfahren für nichtsteife Anfangswertprobleme</b>	<b>128</b>
4.1	Konvergenztheorie . . . . .	129
4.1.1	Konsistenz . . . . .	130
4.1.2	Konvergenz . . . . .	132
4.1.3	Begriff der Steifheit . . . . .	137
4.2	Explizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	140
4.2.1	Idee von Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	141
4.2.2	Klassische Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	146
4.2.3	Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung . . . . .	153
4.2.4	Diskrete Konditionszahlen . . . . .	162
4.3	Explizite Extrapolationsverfahren . . . . .	166
4.3.1	Idee von Extrapolationsverfahren . . . . .	167
4.3.2	Asymptotische Entwicklung des Diskretisierungsfehlers . . . . .	172
4.3.3	Extrapolation der expliziten Mittelpunktsregel . . . . .	176
4.3.4	Extrapolation der Störmer/Verlet-Diskretisierung . . . . .	184
	Übungsaufgaben . . . . .	191
<b>5</b>	<b>Adaptive Steuerung von Einschrittverfahren</b>	<b>199</b>
5.1	Lokale Genauigkeitskontrolle . . . . .	200
5.2	Regelungstechnische Analyse . . . . .	205
5.2.1	Exkurs über PID-Regler . . . . .	205
5.2.2	Schrittweitensteuerung als Regler . . . . .	208
5.3	Fehlerschätzung . . . . .	211
5.4	Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	215
5.5	Lokale gegen erzielte Genauigkeit . . . . .	221
	Übungsaufgaben . . . . .	225
<b>6</b>	<b>Einschrittverfahren für steife und differentiell-algebraische Anfangswertprobleme</b>	<b>228</b>
6.1	Vererbung asymptotischer Stabilität . . . . .	231
6.1.1	Rationale Approximation der Matrizenexponentiellen . . . . .	232
6.1.2	Stabilitätsgebiete . . . . .	234
6.1.3	Stabilitätsbegriffe . . . . .	242
6.1.4	Reversibilität und diskrete Isometrien . . . . .	246
6.1.5	Erweiterung auf nichtlineare Probleme . . . . .	249
6.2	Implizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	253
6.2.1	Stabilitätsfunktionen . . . . .	260
6.2.2	Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme . . . . .	263
6.3	Kollokationsverfahren . . . . .	268
6.3.1	Idee der Kollokation . . . . .	268
6.3.2	Gauß- und Radau-Verfahren . . . . .	277
6.3.3	Dissipative Differentialgleichungen . . . . .	281

6.3.4	Erhalt quadratischer erster Integrale . . . . .	287
6.4	Linear-implizite Einschrittverfahren . . . . .	290
6.4.1	Linear-implizite Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	290
6.4.2	Linear-implizite Extrapolationsverfahren . . . . .	294
6.4.3	Dynamische Elimination schneller Freiheitsgrade . . . . .	304
	Übungsaufgaben . . . . .	315
<b>7</b>	<b>Mehrschrittverfahren für Anfangswertprobleme</b>	<b>323</b>
7.1	Mehrschrittverfahren über äquidistanten Gittern . . . . .	325
7.1.1	Konsistenz . . . . .	329
7.1.2	Stabilität . . . . .	333
7.1.3	Konvergenz . . . . .	338
7.1.4	Diskrete Konditionszahlen . . . . .	347
7.2	Vererbung asymptotischer Stabilität . . . . .	350
7.2.1	Schwache Instabilität bei Mehrschrittverfahren . . . . .	352
7.2.2	Lineare Stabilität bei steifen Problemen . . . . .	355
7.3	Direkte Konstruktion effizienter Verfahren . . . . .	358
7.3.1	Adams-Verfahren für nichtsteife Probleme . . . . .	359
7.3.2	BDF-Verfahren für steife Probleme . . . . .	367
7.4	Adaptive Steuerung von Ordnung und Schrittweite . . . . .	374
7.4.1	Adams-Verfahren über variablem Gitter . . . . .	376
7.4.2	BDF-Verfahren über variablem Gitter . . . . .	379
7.4.3	Nordsieck-Darstellung . . . . .	388
	Übungsaufgaben . . . . .	397
<b>8</b>	<b>Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>401</b>
8.1	Sensitivität bei Zweipunkt-Randwertproblemen . . . . .	402
8.1.1	Lokale Eindeutigkeit . . . . .	402
8.1.2	Konditionszahlen . . . . .	405
8.2	Anfangswertmethoden für zeitartige Randwertprobleme . . . . .	409
8.2.1	Schießverfahren . . . . .	409
8.2.2	Mehrzielmethode . . . . .	413
8.3	Zyklische lineare Gleichungssysteme . . . . .	418
8.3.1	Diskrete Konditionszahlen . . . . .	420
8.3.2	Algorithmen . . . . .	423
8.4	Globale Diskretisierungsmethoden für raumartige Randwertprobleme	428
8.4.1	Elementare Differenzenverfahren . . . . .	429
8.4.2	Adaptive Kollokationsverfahren . . . . .	437
8.5	Allgemeinere Typen von Randwertproblemen . . . . .	440
8.5.1	Berechnung periodischer Lösungen . . . . .	442
8.5.2	Parameteridentifizierung in Differentialgleichungen . . . . .	449

8.6	Variationsprobleme . . . . .	455
8.6.1	Klassische Variationsprobleme . . . . .	456
8.6.2	Probleme der optimalen Steuerung . . . . .	463
	Übungsaufgaben . . . . .	469
	Software	477
	Literatur	479
	Index	491