2

Génération d'ondes gravitationnelles par les systèmes binaires compacts

Jean-Pierre Treuil

A.E.I.S

Résumé

Le présent chapitre concerne à nouveau les ondes gravitationnelles. Il est, comme le précédent, consacré à l'état de l'art, tel qu'existant lors de la première détection directe ; il est cependant plus spécifiquement focalisé sur les systèmes binaires compacts. Ainsi, après un rappel des enseignements consécutifs à la découverte du pulsar binaire PSR 1913+16, il dresse un tableau des types de systèmes binaires dont les émissions sont susceptibles d'être détectées par les détecteurs actuels ou en projet ; il aborde, pour ces différents types, les méthodes d'estimation du nombre de systèmes concernés et des taux d'occurrence de leur coalescence, ainsi que certains résultats obtenus par ces méthodes. La dernière partie présente dans ses principes, la théorie de l'émission gravitationnelle d'une source isolée : méthodes de traitement des non-linéarités des équations d'Einstein à même de permettre le calcul, aux degrés d'approximation requis, de la forme des signaux et de la dynamique de la source ; applications aux systèmes binaires compacts avec références aux progrès accomplis ces dernières années dans le degré de précision atteint.

Abstract

Generation of gravitationnal waves by compact binary systems

Again, the present chapter concerns the gravitational waves. Like the previous chapter, it is devoted to the state of art at the time of the first direct detection; it is still more specifically focused on compact binary systems. So, after recalling the teachings issued from the discovery of the binary pulsar PSR 1913+16, he draws a table of the types of binary systems whose emissions could be detected by present, or in planning stage, detectors; for these different types, he addresses the methods of estimation of the number of concerned systems and the occurrence rate of their coalescence, as well as some thus obtainable results. The last part shows, within its principles, the theory of the gravitational emission of an isolated source: methods to process the nonlinearities of Einstein equations enabling - within the required level of approximation - to compute the shape of the signals and the source dynamics; applications to binary compact systems with references to progresses accomplished in the past few years within the achieved level of precision.

Note

Ce chapitre a été rédigé à partir de la conférence de Luc Blanchet et relu par le conférencier. Le détail de cette transcription n'engage cependant que la responsabilité du rédacteur.

I. Introduction

La détection directe du rayonnement gravitationnel en provenance de sources cosmiques par les réseaux de détecteurs interférométriques au sol (LIGO, VIRGO, . . .) et plus tard dans l'espace (eLISA), ouvre une nouvelle fenêtre d'observations de l'Univers, venant s'adjoindre, par le biais d'un phénomène physique tout à fait différent, à celle déjà ouverte par les ondes électromagnétiques ; d'où l'émergence d'une nouvelle Astronomie avec un très fort potentiel de surprises et de découvertes.

De nouveaux moyens pour tester les théories. Pour donner des exemples de ces potentialités, considérons les projets orientés vers les ondes gravitationnelles de basses fréquences, comme eLISA. Les chercheurs concernés se sont attachés à cerner les enseignements que l'on peut en attendre en cosmologie [30] sur des questions touchant la relativité générale et la gravitation, la nature et la structure des trous noirs, pour confirmer les théories existantes, en ajuster les paramètres, ou tester les théories alternatives.

La puissance de détection de eLISA permet ainsi d'envisager de tester - en plaçant des contraintes indépendantes d'autres méthodes - les valeurs des paramètres du modèle standard de la cosmologie : valeur des densités (rapportées à la densité critique) Ω_M et Ω_Λ relatives respectivement à la matière (baryonique et noire) et à l'énergie sombre, valeur du paramètre w de l'équation d'état de l'énergie sombre. Le principe d'un tel test réside

dans la possibilité d'évaluer la distance D (la distance luminosité en l'occurrence) de la source, à partir des seules informations fournies par l'onde gravitationnelle détectée ; supposons en effet que cette évaluation de la distance soit associée à une mesure du redshift z , mesure faite à partir du rayonnement électromagnétique de la source (information « multi-messagère ») : la fonction $D(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda, w)$ reliant, dans le modèle standard, la distance au redshift et aux paramètres cosmologiques pose les contraintes exploitables dans le test. Un autre exemple concerne la théorie des trous noirs. Parmi les sources dont les émissions seront détectables par eLISA figurent les « EMRI », pour *Extreme Mass Ratio Inspirals*¹ ; il s'agit de systèmes binaires formés de deux corps de masses très différentes : une étoile à neutron ou un trou noir stellaire en orbite relativiste autour d'un trou noir supermassif. Les caractéristiques des ondes gravitationnelles détectées permettront de voir si le trou noir supermassif peut être décrit par la seule donnée de sa masse et de son moment cinétique, comme le prévoient les conceptions actuelles, ou bien au contraire s'il comporte un moment quadrupolaire anormal. Et donc, encore une fois fournir un test de la relativité générale.

Plan du chapitre. Le chapitre précédent a dressé une typologie des signaux gravitationnels, en distinguant signaux ponctuels, signaux continus et signaux stochastiques. Le présent chapitre est spécifiquement consacré aux signaux ponctuels générés lors de la phase spiralante puis de la fusion de systèmes binaires d'objets compacts, soit des étoiles à neutrons soit des trous noirs. Une première section rappelle brièvement les enseignements consécutifs à la découverte du pulsar binaire PSR 1913+16. Une seconde section dresse un tableau des types de systèmes binaires dont les émissions sont susceptibles d'être détectées par les détecteurs actuels ou en projet ; elle aborde, pour ces différents types, les méthodes d'estimation du nombre de systèmes concernés et des taux d'occurrence de leur coalescence, ainsi que certains résultats obtenus par ces méthodes. Une dernière section présente dans ses principes, la théorie de l'émission gravitationnelle d'une source isolée : méthodes de traitement des non-linéarités des équations d'Einstein à même de permettre le calcul, aux degrés d'approximation requis, de la forme des signaux et de la dynamique de la source ; applications aux systèmes binaires compacts avec références aux progrès accomplis ces dernières années dans le degré de précision atteint.

2. Aux origines : le pulsar binaire PSR 1913+16

Le rayonnement gravitationnel a été mis en évidence pour la première fois, de façon indirecte, par Russell Hulse et Joseph Taylor (prix Nobel 1993), en observant un système binaire constitué d'un pulsar et d'un compagnon (une autre étoile à neutron), le pulsar binaire PSR 1913+16, et la décroissance de sa période orbitale. La perte d'énergie du système était interprétée, par le biais des équations de la Relativité générale, comme conséquence de l'émission d'un flux d'ondes gravitationnelles reçues à l'infini².

(1) Cf. [30] déjà cité, page 52 et suivantes, *Tests of black-hole structure using EMRIs*.

(2) En fait on avait déjà des indications qualitatives de l'existence des ondes gravitationnelles grâce à l'observation en X et UV de certains systèmes d'étoiles binaires constitués d'une étoile normale en fin de vie, en orbite autour d'une naine blanche.

Figure 1. Rythme de décroissance de la période orbitale (mesuré par la dérive du temps de passage au périastre) et ajustement à la prédiction de la relativité générale. Reproduit de Weisberg et Taylor 2005 [46].

2.1 Un historique rapide

Les premières évaluations des paramètres orbitaux képlériens du système binaire PSR 1913+16 ont été présentées lors de la publication de sa découverte, en 1974 [31]. Les variations observées de l'intervalle entre deux impulsions radio ont été interprétées comme résultant, par effet Doppler, de variations de la vitesse radiale de l'objet émetteur, orbitant avec un compagnon autour de leur centre de masse commun. Ont ainsi été estimées la période orbitale P (27 908 secondes soit 7 h 45 m), l'excentricité de l'orbite ($e \approx 0.615$) et la valeur projetée du demi-grand axe ($a \sin i \approx 1R_{\odot}$) [32].

Ces estimations ont été rapidement améliorées et complétées dès 1976 [43] en ajustant les paramètres orbitaux à la succession des instants d'arrivée des impulsions, au sein d'un modèle élaboré par R. Blandford et S.A. Teukolsky [16]. En 1982, disposant de plus de six années d'observations, J.H. Taylor et J.M. Weisberg [44] ont pu réévaluer à nouveau les caractéristiques orbitales képlériennes et inclure l'estimation de paramètres liés à des effets relativistes. Citons la précession du périastre $\dot{\omega}$ (en degrés par an), la part variable γ d'une certaine combinaison du décalage gravitationnel et de l'effet Doppler du second ordre (décalage sur les instants d'arrivée des impulsions, en secondes) et enfin le rythme de décroissance de la période orbitale $\dot{P} = dP/dt$.

Enfin, en 2005, les mêmes auteurs dressaient le bilan de trente années d'observations du même pulsar binaire [46]. Le modèle d'analyse des temps d'arrivée ayant conduit aux dernières évaluations était cette fois ci celui de Damour et Deruelle [19, 20]. L'écart relatif entre le rythme la décroissance de la période orbitale observée entre 1975 et 2005, et le rythme prédit par la relativité générale (cf. figure 1) est de l'ordre de 0.13 %.

2.2 Des observations à la confirmation de l'émission d'ondes gravitationnelles

La méthode suivie a consisté à faire confiance aux équations de la relativité générale, sur les phénomènes où elles avaient déjà montré leur efficacité, pour expliquer la valeur ou la dynamique de grandeurs liées aux effets relativistes. En premier lieu, les mesures des paramètres relativistes de précession $\dot{\alpha}$ et de décalage fréquentiel γ , jointes à celles des paramètres képlériens d'excentricité et de période orbitale, permettent de calculer les masses respectives du pulsar (m_p) et de son compagnon invisible (m_c). Les équations liant les deux paramètres relativistes à la période orbitale P , l'excentricité e et les masses m_p et m_c du pulsar et de son compagnon sont en effet [44] :

$$\dot{\omega} = 3G^{2/3}c^{-2}(P/2\pi)^{-5/3}(1-e)^{-1}(m_p + m_c)^{2/3} \quad (1)$$

$$\gamma = G^{2/3}c^{-2}e(P/2\pi)^{1/3}m_c(m_p + 2m_c)(m_p + m_c)^{-4/3} \quad (2)$$

Après prise en compte des valeurs adoptées pour les paramètres képlériens, $P = 27906.98161$ secondes et $e = 0.617139$ les calculs aboutissent aux deux contraintes suivantes sur les masses des deux corps :

$$\dot{\omega} = 2.11353 \left(\frac{m_p + m_c}{M_\odot} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ deg/an}, \quad (3)$$

$$\gamma = 0.00293696 \left(\frac{m_c}{M_\odot} \right) \left(\frac{m_p + 2m_c}{M_\odot} \right) \left(\frac{m_p + m_c}{M_\odot} \right)^{-\frac{4}{3}} \text{ s} \quad (4)$$

Les valeurs des masses m_p et m_c déduites de ce système d'équations, $1.42 M_\odot$ (masse solaire) pour le pulsar, $1.41 M_\odot$ pour le compagnon, sont ensuite utilisées pour calculer d'autres grandeurs, telles l'inclinaison de l'orbite et la valeur du demi-grand axe.

Il est également possible de prédire le rythme de décroissance de la période orbitale auquel conduirait selon la relativité générale une émission d'onde gravitationnelle. L'équation liant ce rythme $\dot{P}$ à la période orbitale actuelle, à l'excentricité et aux masses,

Figure 2. Estimation des masses des deux partenaires du pulsar binaire PSR J0737-3039 ; figure reproduite de [17].

est établie à partir de la formule du quadrupôle d'Einstein [24], appliquée au cas d'un système de deux masses ponctuelles [40, 45, 26] :

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{c^5} \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{\frac{1}{3}}}. \quad (5)$$

Le dernier facteur, dépendant de l'excentricité, est appelé *fonction d'amplification* de Peters et Mathews [40] ; il augmente de plus de dix fois la valeur numérique de $\dot{P}$. Compte tenu des valeurs des masses, le rythme de décroissance calculé est $\dot{P} = -2.4 \cdot 10^{-12}$, en excellent accord avec la valeur observée qui était en 1982 de $-2.3 \cdot 10^{-12}$.

La figure 2 illustre cette très bonne cohérence entre théorie et observations, pour un autre pulsar double découvert en 2003 par Burgay et al [17], le pulsar PSR J0737-3039. S'y trouvent reportées, dans le plan des masses du pulsar et du compagnon $[m_p, m_c]$ les trois courbes traduisant les équations (3)–(4) et (5), lorsque $\dot{P}$, γ et $\dot{P}$ sont les valeurs observées. Sont reportées également les courbes relatives aux paramètres r et s de l'effet Shapiro qui est un effet de retard du temps d'arrivée de l'impulsion radio

lorsque celle-ci a traversé le champ gravitationnel généré par le compagnon. Ces cinq courbes se coupent dans une très petite région de ce plan $[m_p, m_c]$, autour du point $m_p \approx 1.338 M_\odot$, $m_c \approx 1.249 M_\odot$, donnant ainsi une estimation précise des deux masses.

3. Evènements et taux de détection attendus

La présente section aborde les différents types d'évènements attendus, les méthodes utilisées pour l'estimation de leur taux d'occurrence volumétrique et des taux de détection espérés. Mais les évènements qui seront observés dépendent des caractéristiques des détecteurs utilisés ; notamment bande de fréquence, contrôlant la nature de ces évènements, et sensibilité, fixant la distance limite d'observation. Rappelons donc brièvement ce qu'il en est sur ce plan des détecteurs en place ou en projet.

3.1 Bandes de fréquence et sensibilités

Les détecteurs actuellement opérationnels, sur le point de l'être, ou en projet dans un avenir proche, sont des détecteurs au sol. Ils constitueront un réseau mondial d'observation, composé aux Etats-Unis des deux détecteurs LIGO (Hanford et Livingston, bras de 4 km), en Europe de VIRGO (Cascina, Italie, bras de 3 km) et de GEO (Sarstedt, Allemagne, bras de 600 m), en Asie de KAGRA (Japon, bras de 3 km, opérationnel en 2018), auxquels s'ajoutera peut-être LIGO India (Indigo), dont le principe a été approuvé par le gouvernement indien en février 2016.

Ces détecteurs terrestres ont pour cibles des ondes gravitationnelles dans des bandes de fréquences allant de 10 Hz à 1000 Hz³, ondes émises lors de la coalescence de systèmes binaires comportant des étoiles à neutrons ou des trous noirs stellaires ; c.-à-d. lors d'évènements mobilisant des objets dont la masse est de l'ordre de une à vingt masses solaires. La courbe de densité spectrale (du bruit)⁴ de ces instruments doit assurer un nombre raisonnable d'observations par an avec un rapport signal sur bruit satisfaisant. Par exemple (figure 3), la densité spectrale de LIGO II est inférieure à $10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$ autour de 300 Hz, ce qui permet la détection de la coalescence de deux trous noirs stellaires de masse inférieure à $2 M_\odot$ à une distance de 20 Mpc, ou encore de deux trous noirs de masses comprises entre deux et dix masses solaires à une distance de 200 Mpc.

Un projet de détecteur spatial est actuellement en cours d'élaboration, Il s'agit de eLISA, *Evolved Laser Interferometer Space Antenna*, projet conduit par l'Agence Spatiale Européenne, concrétisant une matrice initiale, le projet LISA. eLISA consiste en une constellation de trois satellites formant un triangle équilatéral, avec des cotés long d'un million de km. Ces satellites sont placés sur des orbites garantissant la stabilité de cette configuration au cours des révolutions successives autour de la Terre. Après franchissement de toutes les étapes financières et techniques, ce dispositif devrait être lancé en 2030.

(3) De 1 à 10⁴ Hz en comptant large.

(4) Ou courbe de sensibilité.

Figure 3. Courbes de sensibilité pour différents détecteurs.

Les fréquences visées s'étagent entre 10^{-4} Hz et 1 Hz ; mais la courbe de densité spectrale atteint son plateau minimal entre 10^{-3} Hz et 10^{-1} Hz, plage sur laquelle elle se stabilise autour de 10^{-20} Hz $^{-1/2}$. Les événements visés sont - entre autres - les coalescences d'objets de très grandes masses, comme les trous noirs supermassifs existant au centre de nombreuses galaxies, avec des masses de l'ordre de $10^5 M_{\odot}$ à $10^8 M_{\odot}$.

3.2 Estimation des taux de détection espérés

L'estimation des taux de détection d'ondes gravitationnelles générées par des fusions de systèmes binaires, a fait l'objet depuis les années 1990 de nombreux travaux (cf. [1]). Ces estimations étaient en effet importantes pour déterminer les spécifications des détecteurs terrestres. Le lecteur gardera à l'esprit que ce chapitre reflète, sur ce sujet, l'état de l'art le jour même de l'annonce de la première détection de ce type d'événements. La confrontation de ces estimations anciennes avec les données fournies par les premières détections effectives d'ondes gravitationnelles va être rétrospectivement d'un grand intérêt.

Le principe de telles estimations procède en deux volets :

- I. calcul des taux d'occurrence des coalescences de systèmes binaires, dans des galaxies telles que la nôtre, ou dans un certain volume ; ce, *indépendamment des possibilités de détection* ;

2. prise en compte des sensibilités aux différentes fréquences des instruments envisagés, et donc de la distance d'observation qu'ils peuvent atteindre, pour en déduire les taux de détection espérés.

La mise en pratique de cette démarche varie selon les types de coalescences considérées : coalescences mettant en jeu une étoile à neutrons couplée avec une autre étoile à neutrons ou bien avec un trou noir stellaire (NS-NS, NS-BH), ou encore un couple de trous noirs stellaires (BH-BH), enfin coalescences de couples présentant de fortes dissymétries de masses (IMRI, Intermediate Mass Ratio Inspirals et EMRI, Extreme Mass Ratio Inspirals). Deux grandes méthodes distinctes sont ainsi mises en œuvre. Les premières sont basées sur une extrapolation statistique du décompte de pulsars binaires observés et de leur stade d'évolution. Les secondes mobilisent des *modèles de synthèse de population*, où l'on simule l'évolution d'une population d'étoiles pour obtenir des taux de formation de couples d'objets compacts susceptibles de fusionner.

3.2.1 Extrapolation des décomptes de pulsars binaires observés

La méthode est présentée de façon détaillée dans un article publié en 2003 [39]. Elle part d'hypothèses sur la structure de la population des pulsars binaires peuplant notre galaxie. Sont ainsi proposés différents modèles possibles de répartition de cette population dans l'espace galactique et sur une échelle de luminosités. Le calcul des taux de détection espérés s'effectue ensuite en trois étapes.

Estimation du nombre de pulsars binaires dans la Galaxie. Pour un modèle de répartition⁵ X et un nombre total d'objets⁶ N_{tot} fixés, la méthode commence par évaluer⁷ une distribution des probabilités $P(N_{obs}; N_{tot}, X)$: probabilités de détecter, en utilisant les capacités des systèmes actuels de recensement des radio-pulsars⁸, un échantillon de taille N_{obs} . La connaissance de ces distributions $P(N_{obs}; N_{tot}, X)$ permet d'obtenir, pour différentes valeurs de N_{tot} , la probabilité que le nombre potentiel d'observations N_{obs} soit égal au nombre N_{det} d'observations *effectivement réalisées* des objets étudiés. L'application du théorème de Bayes permet alors de remonter de ces dernières probabilités $P(N_{det}; N_{tot}, X)$ aux probabilités $P(N_{tot}; N_{det}, X)$; c'est-à-dire, pour le modèle de répartition X choisi, aux vraisemblances des différentes valeurs possibles du nombre total d'objets dans la Galaxie, *compte tenu des données d'observation existantes*.

Estimation du taux galactique annuel de coalescences. Il faut alors passer de cette distribution de vraisemblance $P(N_{tot}; N_{det}, X)$ du nombre total d'objets, à celle, $P(R; N_{det}, X)$, du taux annuel R de coalescences de pulsars binaires dans la galaxie. Ce passage prend en compte le temps de vie τ_{life} estimé des pulsars binaires observés, temps séparant leur formation de la coalescence finale : pour un même nombre d'objets

(5) Donné par une fonction de densité de probabilité - de présence d'un pulsar binaire - au voisinage de telle position dans la galaxie et autour de telle valeur de luminosité.

(6) C.-à-d. de systèmes binaires (susceptibles de « coalescer ») théoriquement observables dans la Galaxie, avec un faisceau de rayonnement radio orienté vers la terre.

(7) En générant aléatoirement (méthode de Monte Carlo) une multitude de réalisations d'une population de taille N_{tot} conforme au modèle X choisi.

(8) Capacités modélisées par un seuil de détection, un rapport signal sur bruit limite comparé au rapport signal sur bruit calculé pour chacun des pulsars binaires de la population simulée ; le calcul de ce dernier rapport prend en compte la position de la Terre dans la Galaxie.

présents en moyenne dans la galaxie, plus le temps de vie est court, plus les évènements manifestant leur disparition par coalescence seront fréquents. Il intègre également le rapport f_b estimé entre le nombre réel de pulsars binaires et le nombre de ceux dont le faisceau radio est dirigé vers la Terre et qui sont donc les seuls à pouvoir être observés. L'expression du taux de coalescence, pour un effectif N_{tot} , est alors :

$$R = \frac{f_b N_{tot}}{\tau_{life}} \quad (6)$$

ce qui conduit à

$$P(R; N_{det}, X) = P(N_{tot}; N_{det}, X) \frac{\tau_{life}}{f_b} \quad (7)$$

Estimation des taux de détection espérés. La distribution de vraisemblance des taux de coalescence dans la Galaxie une fois connue, reste à extrapoler ce taux au volume correspondant à la distance limite de détection de l'instrument considéré. Par exemple pour LIGO, dans sa première version *initial LIGO*, cette distance limite était de ≈ 20 Mpc, alors que pour *advanced LIGO* cette limite est portée à ≈ 350 Mpc [39], ce qui multiplie le volume couvert par un facteur supérieur à 10^3 . Différentes méthodes sont proposées pour estimer le *facteur d'échelle* utilisable pour cette extrapolation. Les méthodes citées par exemple dans [38] s'appuient sur l'hypothèse que le taux de coalescence des systèmes binaires d'étoiles à neutrons est proportionnel au taux de formation des étoiles massives, et qu'il n'y a pas statistiquement, du point de vue de la structure des populations stellaires, de différence majeure entre les galaxies de l'espace détectable et notre Galaxie ; un corrélat observable du taux de formation d'étoiles, tel la densité de luminosité sur la bande bleue du spectre, est alors utilisé pour calculer le facteur d'échelle.

Exemples de résultats. Dans l'article [39] déjà cité, les calculs sont menés séparément pour chacun des deux pulsars binaires alors disponibles⁹, ces deux pulsars étant considérés comme représentatifs de deux populations de caractéristiques différentes¹⁰. Pour le modèle de population pris pour référence, les nombres N_{tot} estimés les plus vraisemblables sont, pour la Galaxie, de ≈ 390 et ≈ 350 pulsars respectivement pour le premier et pour le second type. Le taux de coalescence galactique *global* le plus vraisemblable, pour l'ensemble des deux populations, est alors, d'environ 8 évènements par million d'années, avec $[0.4 - 40]$ comme intervalle de confiance à 99 %. Ces évaluations sont revues dès 2004 [37] pour intégrer un troisième système binaire¹¹. Les taux de coalescence sont sensiblement augmentés, mais il y a toujours une grande marge d'incertitude et les estimations fluctuent d'un modèle de population à l'autre, voire d'une publication à l'autre.

En 2007, après intégration de nouvelles données, le taux de coalescence galactique le plus vraisemblable est estimé par Kalogera et al. [36] à 71 évènements par million d'années

(9) Savoir PSR B1913+16 et B1534+12.

(10) Les calculs prennent alors dans chacun des deux cas $N_{det} = 1$.

(11) Référencé J0737-3039.

Figure 4. Distribution de probabilité des taux de fusion impliquant des couples d'étoiles à neutrons, par million d'années dans l'ensemble de la galaxie. L'intervalle de confiance à 99 pour cent se situant entre 9 et 120 fusions par millions d'années. Figure reproduite de Kalogera et al. [36], figure 9.

(figure 4). Le taux de détection espéré est de l'ordre de un évènement tous les trente ans pour *initial LIGO*, et un évènement tous les deux jours pour *advanced LIGO* (cf. [36], page 30).

3.2.2 Modèles de synthèse de populations

Concernant les systèmes binaires de trous noirs stellaires (BH-BH), les données d'observation manquent, de part la nature de ces objets, et les modèles de synthèse de populations sont alors un recours. Simulant la dynamique de formation des systèmes binaires d'objets compacts, ils ont été utilisés également pour les couples NS-NS ou encore les couples mixtes NS-BH. Dans la littérature consacrée à ces approches, figurent, par exemple, les travaux de Belczynski et al 2002 [5] détaillant la structure de leur modèle, 2007 [7] consacré plus spécifiquement aux couples BH-BH, 2008 [6] présentant une nouvelle version du code informatique, 2010 [4] orienté vers les capacités attendues du détecteur spatial LISA.

Les modèles intègrent des hypothèses concernant la structure de la population d'étoiles au sein de la Galaxie, les processus d'évolution, la proportion de systèmes binaires et les interactions ayant lieu en leur sein. Les codes informatiques partent d'une population simulée de systèmes binaires, formés d'étoiles caractérisées par un âge, une masse, une

métallicité initiales ; ils font évoluer ces étoiles jusqu'à un état final d'objet compact stable, et dressent alors des statistiques concernant la nature des objets (naines blanches, étoiles à neutrons, trous noirs) et leur masses, les paramètres orbitaux des systèmes binaires subsistants et leur temps de vie avant coalescence.

Aperçu des processus modélisés. Ces modèles comportent deux composantes [5]. La première composante s'attache à la dynamique propre des étoiles isolées. L'histoire d'une étoile est décrite par une succession de différents stades, succession spécifique à la masse et la métallicité initiale. Des formules permettent de calculer l'état de l'astre (rayon, masse totale et luminosité, masse du cœur, composition) à la fin de chacun des stades. Des processus continus tels les pertes de masse consécutives à l'émission de vents stellaires sont pris en compte, ainsi que des événements comme les explosions (formation de géantes rouges, de supernovae), contractions, rebonds en fin de vie. La seconde composante s'attache *aux interactions en œuvre dans les systèmes binaires*. Elle est exploitée dans des simulations faisant évoluer simultanément les deux compagnons et les paramètres orbitaux du système. Le pas de temps de ces simulations est déterminé de manière à rester inférieur à la durée théorique du stade dans lequel se trouve le compagnon évoluant le plus rapidement. Ainsi est-on assuré d'intégrer correctement les conséquences des interactions sur la vie propre des deux étoiles. Divers processus sont pris en compte, notamment transferts de masses conservatifs, pertes de masse et de moment angulaire consécutives à certains transferts *non conservatifs*, conséquences de l'effondrement du cœur de l'une des étoiles et de son explosion en supernova, notamment impulsion supplémentaire donnée à l'étoile en cause lors d'une explosion asymétrique (*kick velocity*) et la rupture du couple qui peut en résulter, formation, dynamique et rôles des enveloppes de gaz entourant le système binaire, et *in fine*, perte d'énergie due au rayonnement gravitationnel.

Exemples de résultats. Les modèles de synthèse de population intègrent donc la physique complexe présidant à la formation de couples d'objets compacts. Mais la connaissance des processus est incomplète (cf. [36], 5) ; les valeurs des paramètres de leur modélisation sont entachées d'incertitudes qui se transmettent aux résultats : ainsi les taux de coalescence estimés peuvent-ils varier de un à deux ordres de grandeurs, voire plus. Aussi bien a-t-on cherché à contraindre ces modèles en les confrontant aux estimations empiriques, lorsque possible ; par exemple avec le nombre de systèmes NS-NS, ou encore avec la fréquence des supernovae dans un périmètre donné. On a également cherché à identifier différents scénarios d'évolution, des configurations de paramètres plausibles, et décliné les modèles en plusieurs variantes particulières. Au delà des différences entre ces variantes, les prédictions obtenues concernant les couples de trous noirs stellaires se situent toutes en dessous de la limite de fréquence établie à partir de l'absence d'observations constatées sur les premières versions des instruments LIGO et VIRGO. Pour reprendre les estimations publiées dans [7], table 2, le taux de coalescence galactique le plus vraisemblable, pour les couples BH-BH, s'établit environ à 0,025 événements par million d'années dans la variante de référence, contre 15 événements par million d'années pour le taux NS-NS. Le taux correspondant de détection espéré pour les ondes émises par les fusions de trous noirs stellaires est alors autour de 2 événements par an pour la version avancée de LIGO.

3.2.3 Trous noirs supermassifs

Les coalescences de trous noirs supermassifs résultent de la collision de deux galaxies possédant ces trous noirs en leurs centres respectifs. La question de « jusqu'à quelle distance faut-il observer ? » pour avoir un taux annuel raisonnable d'évènements, se pose avec moins d'acuité. La puissance de l'instrument eLISA envisagé, et les caractéristiques des phénomènes concernés, assurent en effet un rapport signal sur bruit (*SNR*) suffisant jusqu'à des distances cosmologiques [3], atteignant par exemple des redshifts de 10 voire 15, redshifts correspondant à la période de ré-ionisation de l'univers, à une époque où les étoiles et les galaxies ont commencé à se former. Ainsi, pour des systèmes de l'ordre de 100.000 masses solaires et pour un redshift égal à 15 le rapport signal sur bruit attendu est de 50 ([3], figure 16). Pour un redshift fixé, ce rapport *SNR* décroît lorsqu'augmente l'asymétrie¹² du couple de trous noirs ; mais pour un redshift de 4 et un *mass ratio* inférieur à un dixième, le rapport signal sur bruit attendu est encore de 20 ([3], figure 17).

4. Emission d'ondes gravitationnelles par une source isolée

La nature des ondes gravitationnelles est d'être des perturbations de l'Espace-Temps. Leur approche théorique s'est donc appuyée initialement sur une linéarisation des équations d'Einstein, dans l'hypothèse d'une métrique s'écartant peu de la métrique de l'Espace-Temps plat de Minkowski.

Une telle linéarisation est suffisante pour comprendre en première approximation la génération des ondes, leur propagation et leurs effets sur la matière traversée. Elle s'avère cependant inadaptée pour modéliser le signal émis lors de la coalescence d'un système binaire. Pour être détectée, c.-à-d. être extraite du bruit de fond, et exploitée pour remonter aux propriétés de la source, la forme de ce signal (voir schéma figure 5), notamment la loi contrôlant l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude, doit être connue avec une grande précision. Cette nécessité a été reconnue dès l'initiation des projets LIGO et VIRGO [18].

Le chapitre précédent a rappelé le principe du calcul conduisant des équations d'Einstein à leur linéarisation, puis après choix adéquats de jauge, aux formules donnant l'amplitude et la puissance rayonnée en fonction des caractéristiques du système source. Ce calcul et les formules dites du quadrupôle auxquelles il aboutit sont valides sous réserve de la vérification par le système source de certaines conditions : sur le champ gravitationnel engendré par la source, qui doit être suffisamment faible - caractéristique mesurée par un facteur de compacité - et sur la dynamique de ce champ, qui doit être suffisamment lente, ou « faiblement relativiste ». Les développements abordés ici se situent toujours dans les mêmes conditions, mais de façon moins stricte, en allant au delà de l'approximation linéaire et en intégrant l'effet

(12) Mesurée par le paramètre q , *mass ratio*, rapport de masse entre les deux trous noirs, par construction inférieur ou égal à 1 ; l'asymétrie croît quand le rapport de masse q décroît.

Figure 5. Schéma de la forme du signal gravitationnel émis lors la coalescence d'un système binaire : segmentation du processus en différentes phases et approches de modélisation associées.

de non-linéarités d'ordre plus ou moins élevé. L'objectif recherché dans ces développements est d'ajuster l'ordre des approximations aux exigences requises par le problème traité, ce dans le cadre d'un même formalisme.

4.1 La prise en compte des non-linéarités

Dans le contexte des ondes gravitationnelles, le traitement des non-linéarités dans les équations d'Einstein part d'une reformulation mobilisant une métrique dite *gothique*, dont le lien avec la métrique habituelle, dans un référentiel donné, a pour expression :

$$g^{\alpha\beta} = \sqrt{-\det(g)} g^{\alpha\beta} \quad (8)$$

L'écart - appelé potentiel - entre le champ gravitationnel existant et celui d'un espace plat de Minkowski est alors représenté par¹³ :

(13) Cette définition mobilise bien la différence entre deux grandeurs du même type, la matrice représentant la métrique inverse de Minkowski, dont le déterminant est -1 , pouvant être vue elle même comme gothique.

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \quad (9)$$

Les équations d'Einstein sont alors réécrites en fonction de h ; cette réécriture fait intervenir la condition de jauge $\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0$ (dite jauge harmonique) et une équation d'onde¹⁴,

$$\square h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} \quad (10)$$

$$\text{avec } \tau^{\mu\nu} = -\det(g)T^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G}\Lambda^{\mu\nu} \quad (11)$$

Dans cette réécriture, les non-linéarités des équations d'Einstein sont prises en compte dans les termes $\Lambda^{\mu\nu}$ se combinant à celles du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ de la source pour former les composantes $\tau^{\mu\nu}$. Les calculs conduisent à exprimer $\Lambda^{\mu\nu}$ comme une somme infinie de termes dans lesquels h et ses dérivées partielles successives interviennent dans des produits d'ordre croissant. Son expression s'écrit symboliquement¹⁵.

$$\Lambda^{\mu\nu} = N^{\mu\nu}(h, h) + M^{\mu\nu}(h, h, h) + L^{\mu\nu}(h, h, h, h) + \dots \quad (12)$$

Lorsque la perturbation h est suffisamment petite, $N(h, h)$ est négligeable, et à sa suite tous les autres termes de la somme infinie : $\Lambda^{\mu\nu}$ disparaît, $\det(g) \approx \det(\eta)$ et l'on retrouve une équation linéaire. Mais dès que l'on ne peut plus les négliger, les non-linéarités inscrites dans les termes $\Lambda^{\mu\nu}$, sont sources d'importantes difficultés mathématiques. En premier lieu parce que, contrairement au cas de l'équation d'onde linéaire, la perturbation h intervient *des deux côtés de l'équation*. En second lieu parce que le domaine de définition de $\Lambda^{\mu\nu}$ s'étend sur tout l'espace, même si sa valeur tend vers 0 lorsqu'on s'éloigne infiniment de la source : le pseudo-tenseur $\tau^{\mu\nu}$, contrairement au tenseur d'Energie-Impulsion $T^{\mu\nu}$ capturant le contenu matériel de la source et sa dynamique, *n'a pas de support spatialement borné*.

De nombreux travaux ont été donc consacrés à résoudre ces difficultés, pour trouver et justifier les meilleures approximations possibles. Les techniques d'approximations adoptées consistent à substituer dans l'équation d'onde 11, à la valeur exacte de la perturbation, un développement en série que l'on limite à un ordre suffisant pour la question posée, puis

(14) La forme de cette équation d'onde est liée à la reformulation introduisant la métrique gothique. Cette dernière permet d'écrire les équations non-linéaires contrôlant la perturbation $h^{\mu\nu}$ de manière à conserver dans la partie gauche l'opérateur $\square = \eta^\alpha \eta^\beta \partial_\alpha \partial_\beta$, ou $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ opérateur d'Alembertien « plat » basé sur la métrique de Minkowski et non sur la métrique perturbée. Le calcul de la perturbation, appliquant l'inverse de cet opérateur, s'en trouve facilité.

(15) Cf. [13] qui donne l'expression complète des trois premiers termes N , M et L en fonction des composantes de h et de ses dérivées partielles.

à calculer les termes retenus dans ce développement. Plusieurs types de développement sont utilisés.

Le développement post-Minkowskien. Il consiste à développer $h^{\mu\nu}$ en une série infinie de puissances de G , la constante gravitationnelle ; soit :

$$h^{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{m=\infty} G^m h_{(m)}^{\mu\nu} \quad (13)$$

Faire tendre G vers 0 équivaut à s'approcher d'un Espace-Temps plat de Minkowski sans gravitation : la valeur de la perturbation h tend bien alors vers 0 sur tout évènement. L'approche post-Minkowskienne est valide pour toute source « faiblement auto-gravitante », lorsque $\gamma_{PM} \equiv \frac{GM}{c^2 r_{ext}} \ll 1$ avec M masse totale de la source et r_{ext} rayon de son extension spatiale¹⁶. La troncature du développement à l'ordre m_u donne le degré d'approximation adopté. Le choix de cet ordre dépend de la valeur du champ gravitationnel que la source développe en son sein.

Le développement post-Newtonien. Il consiste à développer $h^{\mu\nu}$ en une série infinie de puissance de $1/c$, c vitesse de la lumière ; soit

$$h^{\mu\nu} = \sum_n \frac{1}{c^n} h_n^{\mu\nu} \quad (14)$$

L'usage est d'indiquer l'ordre du développement en puissances fractionnaires de $1/c^2$: une expansion jusqu'à l'ordre $1/c^2$ est ainsi en *1PN*, jusqu'à l'ordre $1/c^5$ en *2,5PN*, etc. L'approche post-Newtonienne est valide pour toute source faiblement auto-gravitante et dont la dynamique est lente par rapport à la vitesse de la lumière. Typiquement pour un petit rapport v/c , où v désigne une vitesse significative de la dynamique de la source ; la condition de dynamique lente s'exprime aussi par la faiblesse du rapport sensiblement équivalent r_{ext}/λ où r_{ext} est la dimension spatiale de la source et λ la longueur d'onde du rayonnement gravitationnel émis¹⁷.

Un théorème, démontré dans le cadre de l'approche *MPM-PN* combinant formalisme post-Minkowskien et post-Newtonien [12], conduit à adopter pour le développement post-Newtonien la structure générale suivante, basée sur deux indices n et p :

$$h^{\mu\nu} = \sum_{n,p} \frac{[\ln(c)]^p}{c^n} h_{n,p}^{\mu\nu} \quad (15)$$

(16) Pour les systèmes binaires, la faiblesse de γ_{PM} est aussi celle de $\epsilon_{PN}^2 \approx v^2/c^2$ où v est une vitesse significative du mouvement orbital : dans ce cas, une source faiblement autogravitante est aussi de *dynamique lente*, condition exigée pour la validité de l'expansion post-Newtonienne.

(17) Une dynamique lente implique, *par définition*, que la durée r_{ext}/c nécessaire à la lumière pour traverser la source soit petite comparée à la période du mouvement de cette source, de l'ordre de r_{ext}/v ; et donc petite également comparée à la période de l'onde gravitationnelle λ/c : nous avons donc $r_{ext}/c \ll \lambda/c$ soit $r_{ext}/\lambda \ll 1$.

Le développement multipolaire. Le développement multipolaire d'une fonction associant, dans un espace à trois dimensions, une valeur $V(x) \equiv V(r, n^1, n^2, n^3)$ à tout point x repéré - dans un référentiel cartésien - par la distance à l'origine des coordonnées r et les trois composantes n^1, n^2, n^3 du vecteur unitaire n pris sur la direction $O \rightarrow x$, est une série infinie de la forme¹⁸ (cf. [12], annexes) :

$$V(r, n) = \hat{f}(r) + \hat{f}_{i_1}(r)\hat{n}^{i_1} + \hat{f}_{i_1 i_2}(r)\hat{n}^{i_1 i_2} + \hat{f}_{i_1 i_2 i_3}(r)\hat{n}^{i_1 i_2 i_3} + \dots \quad (16)$$

Dans cette série, $\hat{n}^{i_1}$ est égal à la composante n^{i_1} du vecteur n ; les valeurs $\hat{n}^{i_1 i_2}, \hat{n}^{i_1 i_2 i_3}, \dots, \mathbf{K}$ sont formées respectivement à partir des produits binaires $n^{i_1} n^{i_2}$, ternaires $n^{i_1} n^{i_2} n^{i_3}$, etc., des mêmes composantes. Par exemple, avec $i_1 = 1, i_2 = 2$, nous avons $\hat{n}^{i_1 i_2} = n^1 n^2$; cependant une correction¹⁹ intervient dès que deux indices i_m et i_n ont une valeur commune quelconque i ; cette correction est appliquée de manière à ce que la somme sur toutes les valeurs possibles de i , somme notée²⁰ $\delta_{i_m i_n} \hat{n}^{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots}$, soit nulle : par exemple, si $i_1 = i_2 = i$, la correction appliquée donne $\hat{n}^{i i} = n^i n^i - 1/3$: nous avons bien alors $\delta_{i i} \hat{n}^{i i} = \sum_i (n^i n^i - 1/3) = 0$.

Ce développement sur les tenseurs $\hat{n}^{i_1 i_2 \dots \mathbf{K} \dots i_l}$, notés $\hat{n}^L$ d'une façon plus compacte, est équivalent à l'expansion en harmoniques sphériques [12]. En pratique, il s'avère utile de poser

$$\hat{f}_L(r) = \frac{(2l+1)(2l-1)(2l-3) \dots \hat{C}_L(r)}{4\pi l! r^{l+1}} \quad (17)$$

Cette écriture permet de relier simplement les coefficients du développement 16 aux moments multipolaires $\hat{M}_L(V)$ - dans leur forme symétrique sans trace - de la fonction $V(x)$ vu par exemple comme un champ de potentiel. Le calcul montre en effet (en posant $\hat{x}^L = r^L \hat{n}^L$) que :

$$\hat{C}_L(r) = \int_{S(r)} \hat{x}^L V(x) ds \quad (18)$$

l'intégrale étant prise sur la sphère de rayon r , ce qui entraîne :

$$\int_{r=0}^{r=\infty} \hat{C}_L(r) dr = \int \hat{x}^L V(x) ds dr = \int \hat{x}^L V(x) d^3x \equiv \hat{M}_L(V) \quad (19)$$

(18) En utilisant les conventions d'Einstein de sommation implicite des indices.

(19) Ainsi les tenseurs $\hat{n}^{i_1 i_2}, \hat{n}^{i_1 i_2 i_3}, \mathbf{K}$ sont à la fois symétriques et *sans trace*, *trace free*. Le signe $\hat{}$ affectant les symboles marque la vérification de cette propriété, dite STF.

(20) Utilisation du symbole de Kronecker $\delta_{i_m i_n}$, non nul uniquement si $i_m = i_n$.

4.2 Le formalisme MPM-PN

Historiquement, l'approche des non-linéarités s'est construite autour des expansions post-Newtoniennes, à partir de la formulation standard des équations d'Einstein, et sans lien avec l'approche post-Minkowskienne (cf. [41], chapitre 8). Cependant, cette « version classique » a montré ses limites, dès lors que le degré d'approximation requis exigeait de développer l'expansion à un ordre élevé (cf. [42], introduction, [10], p. 37). Deux sortes de difficultés apparaissent en effet ; difficultés techniques, liées aux intégrales mises en œuvre dans les calculs et à leur possible divergence ; difficultés intrinsèques, liées à l'incapacité du formalisme à prendre en compte les conditions aux limites à l'infini²¹. Aussi bien la « version moderne » commence-t-elle par construire deux développements de la perturbation gravitationnelle, chacun d'eux ciblant une zone particulière de l'espace :

1. le premier part d'un développement post-Minkowskien du potentiel $h^{\mu\nu}$ sur une zone dite *zone extérieure*, à une distance r du centre de gravité de la source supérieure au rayon r_{ext} de la région que cette source occupe ;
2. le second part d'un développement post-Newtonien du potentiel $h^{\mu\nu}$ sur une zone dite *zone proche*, à une distance r du centre de gravité de la source inférieur à une certaine distance r_{in} vérifiant $r_{in} \ll \lambda$, avec λ longueur d'onde du rayonnement gravitationnel émis.

Les conditions vérifiées par une source dite *post-Newtonienne* - d'être faiblement auto-gravitante et d'avoir une dynamique lente - assurent l'inégalité $r_{ext} < r_{in}$. Zone extérieure et zone proche se recouvrent donc dans une *zone de raccordement*, $r_{ext} \leq r \leq r_{in}$. Cette zone commune permet de coupler les deux développements et résoudre par là même les indéterminations subsistant dans chacun d'eux construits séparément : pour le premier développement, prise en compte de l'existence de la source, de sa distribution spatiale et de sa dynamique ; pour le second développement, prise en compte du caractère compact et isolé de la source, prise en compte de la réaction sur la source de la perturbation générée dans la zone extérieure et de l'absence d'autres perturbations incidentes.

Cette approche combinée *MPM-PN formalism*²² (voir par exemple [12, 9, 42, 11]) conduit à deux expressions - sous forme de séries formelles infinies - de la solution des équations d'Einstein pour $h^{\mu\nu}$, valides respectivement dans la zone extérieure et dans la zone proche ; ces expressions fondent la construction itérative d'approximations d'ordre quelconque, qui prendront *in fine* des formes post-Newtoniennes. A titre d'exemple, nous décrivons succinctement en annexe, à la fin de ce chapitre, le principe de la construction de la solution pour la zone extérieure.

(21) Le fait que la source est bien isolée, qu'il n'y a pas - et qu'il n'y a pas eu - d'autres émissions d'ondes gravitationnelles (absence d'ondes ré-entrantes), qu'antérieurement à un certain instant du passé, cette source n'émettait pas.

(22) Pour Multipolar Minkowskian - Post Newtonian.

4.3 Applications aux systèmes binaires compacts

Les approches purement post-Newtoniennes, puis les approches combinées *MPM-PN* ont été appliquées aux systèmes binaires compacts et à la dynamique du rayonnement gravitationnel qu'ils émettent dans la phase de coalescence ; ce avant la phase finale, celle des tous derniers moments du processus, phase finale dans laquelle les degrés d'approximation nécessaires deviennent si élevés que l'on abandonne toute recherche d'expression analytique pour passer à des simulations numériques (raccord avec la *relativité numérique*)²³.

Le passage des théories du rayonnement gravitationnel émis par une source post-Newtonienne quelconque à l'analyse d'une source formée d'un système binaire ont cependant posés des problèmes difficiles. Les théories des sources isolées modélisent en effet ces dernières comme des distributions continues, et plus précisément *régulières*, du tenseur d'Energie-Impulsion $T^{\mu\nu}$ sur une région d'étendue limitée. Cette propriété n'est pas vérifiée a priori dans un modèle de système binaire où chaque partenaire est vu comme une *particule ponctuelle*, avec une densité de masse $\rho(x)$ infinie (fonction de Dirac) sur la position de chaque particule. Une technique de régularisation est donc mise en œuvre, dite *régularisation dimensionnelle*²⁴, associée à des procédures de renormalisation.

Deux types de résultats retiennent l'attention ; le premier concerne les équations de mouvement du système, au delà de l'approximation newtonienne, et le second l'expression du flux d'énergie et des composantes de l'amplitude, au delà des formules du quadrupole d'Einstein.

4.3.1 Les équations du mouvement

Dans la version Newtonienne (0PN), l'accélération de la particule i due à l'attraction de la particule j vaut $-\frac{Gm_j}{r^2}\mathbf{n}_{ij}$, où r est la distance qui sépare les deux particules et $\mathbf{n}_{ij}$ est le vecteur unitaire de la direction $i \rightarrow j$. Un terme complémentaire en 1PN (donc pondéré par $1/c^2$) a été présenté²⁵ en 1938 dans un article d'Einstein, Infeld et Hoffmann [25]. L'accélération de la particule i prend la forme :

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{Gm_j}{r^2}\mathbf{n}_{ij} + \frac{1}{c^2} \left(\left[\frac{5G^2m_im_j}{r^3} + \frac{4G^2m_j^2}{r^3} + \dots \right] \mathbf{n}_{ij} + \dots \right) \quad (20)$$

Le terme en 1PN fait intervenir la masse de la particule attirée m_i , et au delà (. . .), la vitesse des deux particules et l'accélération de la particule j . Des travaux, utilisant différentes approches, dont les publications s'étagent à partir de la fin des années 1990 ont

(23) Dans cette phase finale, la source n'est plus vraiment post-Newtonienne ; les comparaisons avec les simulations construites sur la relativité numérique montrent cependant que les résultats analytiques restent longtemps valides, avec un très bon « raccord », quasiment jusqu'aux tous derniers cycles.

(24) Cette technique a été introduite initialement en 1972 par différents auteurs (t'Hooft and Veltman, Bollini and Giambiagi, ...) dans le contexte de la théorie quantique des champs.

(25) Dans le contexte plus général d'un système à N corps ; le problème avait déjà été abordé dès 1917 par Lorentz et Droste.

poursuivi les approximations jusqu'à l'ordre 3PN [34, 21, 13, 23, 33, 29] intégrant ainsi une première composante de la réaction du rayonnement sur les équations de mouvement à 2,5PN. Le degré d'approximation a été poussé récemment [35, 22, 8] jusqu'à l'ordre 4PN, complétant donc la formule 20 par des termes en $1/c^4$, $1/c^5$, ... $1/c^8$.

4.3.2 Le flux d'énergie et la forme du signal gravitationnel

La forme du signal gravitationnel à l'approche de la coalescence, avec l'augmentation de la fréquence et de l'amplitude consécutive, est liée à la perte d'énergie du système binaire au cours de cette étape, et donc à la luminosité gravitationnelle, c.-à-d. au flux d'énergie du rayonnement, grandeurs qu'il faut donc évaluer avec la meilleure précision. La formule du quadrupôle, appliquée au cas d'un système binaire d'orbite quasi circulaire de vitesse angulaire orbitale ω , donnait une expression approchée [40] au premier ordre, égale à

$$\mathcal{F}^{GW} = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \nu^2 x^5 \quad (21)$$

$$\text{avec } \nu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \text{ et } x = \frac{[G(m_1 + m_2)\omega]^{\frac{2}{3}}}{c^2} \quad (22)$$

Les formules étendues (cf. par exemple [14]) corrigent cette expression ; le membre droit de l'équation 21 est affecté du facteur post-Newtonien

$$1 + \left[-\frac{1247}{336} - \frac{35}{12} \nu \right] x + 4\pi x^{3/2} + \left[-\frac{44711}{9072} + \frac{9271}{504} \nu + \frac{65}{18} \nu^2 \right] x^2 \quad (23)$$

$$+ [\dots] x^{5/2} + [\dots] x^3 + [\dots] x^{7/2} + \mathcal{O}(x^4)$$

de degré 3,5PN dans lequel les coefficients dépendent, pour certains d'entre eux, du coefficient sans dimension ν traduisant l'équilibre plus ou moins prononcé des deux masses. Ce flux d'énergie transmise par les ondes gravitationnelles à l'infini est puisé dans la perte d'énergie dE/dt du système binaire, qui voit son rayon se contracter et sa vitesse s'accélérer.

Les calculs conduisent ensuite à l'expression des composantes de la perturbation $h^{\mu\nu}(t)$ à une distance R de la source, et au bout du compte, à la valeur de l'amplitude perçue par un détecteur, compte tenu de l'angle de la ligne de visée avec le plan orbital de la source. Au premier ordre, en application des formules du quadrupôle aux systèmes binaires, la composante $h^{22}(t)$ vaut par exemple

$$h^{22}(R, t) = \frac{8GM\nu x}{Rc^2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \exp(-2i\psi(t))$$

Dans les travaux de Faye et al 2012 [28] elle est corrigée jusqu'à 3,5PN d'un facteur $1 + \Sigma_k f_k x^{k/2}$, $k = 2, \dots, 7$, dépendant également de l'équilibre des masses ν .

Mais cette correction n'épuise pas les effets relativistes, qui se manifestent également dans une modulation post-Newtonnienne de la phase $\psi(t)$.

Enfin, la dynamique de la vitesse angulaire, donc celle de la fréquence de l'onde, fait-elle même l'objet de corrections post-Newtonniennes. Ainsi la variation relative de cette vitesse, soit $\dot{\omega}/\omega$, égale au premier ordre [27] à $\omega \frac{96}{5} vx^{\frac{5}{2}}$ fait-elle l'objet de plusieurs modulations, mobilisant toujours des développements en puissance de x . Les premières concernent des systèmes binaires dont aucun des membres ne possède de mouvement propre de rotation (*non-spin binaries*). Mais l'impact de la présence de ces mouvements de rotation, dans ses différents effets (interactions *spin-orbit* et *spin-spin*) a également été pris en compte, actuellement jusqu'à 4PN.

Au bout du compte, la modélisation de la dynamique du signal gravitationnel à l'approche de la coalescence combine toutes ces approximations post-Newtonniennes, sur la perturbation de la métrique h , sur la vitesse angulaire ω , la phase ψ , et leur conséquence sur le coefficient x lui-même. La confiance dans la validité de ces calculs, prenant en compte à des degrés divers les non-linéarités des équations d'Einstein, permet de confronter leurs résultats aux mesures effectuées lors de la détection effective d'ondes gravitationnelles, ouvrant ainsi la voie à de nouveaux tests de la Relativité Générale (cf. [2]).

Annexe : solution pour la zone extérieure

Deux articles de référence [9, 11] nous permettent de donner un aperçu des raisonnements mobilisés dans la construction de cette solution. Dans la zone extérieure, l'équation d'onde s'écrit $\square h^{\mu\nu}(x,t) = \Lambda^{\mu\nu}(x,t)$, avec la condition de jauge $\partial_\nu h^{\mu\nu}(x,t) = 0$. Cette équation contrôle le comportement des ondes gravitationnelles loin de la source. Dans cette zone, on cherche à exprimer $h^{\mu\nu}$ par un développement infini noté $M(h^{\mu\nu})$, et, parallèlement, à exprimer $\Lambda^{\mu\nu}$ par un second développement infini noté $M(\Lambda^{\mu\nu})$. Ces développements infinis doivent donc être liés par :

$$\square M(h^{\mu\nu}) = M(\Lambda^{\mu\nu}) \quad \partial_\nu M(h^{\mu\nu}) = 0. \quad (24)$$

Zone extérieure : Structure générale des solutions

Au départ du raisonnement, $M(h^{\mu\nu})$ et $M(\Lambda^{\mu\nu})$ se voient attribuer une structure post-Minkowskienne :

$$M(h^{\mu\nu}) = \sum_{m=1}^{m=\infty} G^m h_{(m)}^{\mu\nu} \quad M(\Lambda^{\mu\nu}) = \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$$

Compte tenu de la structure de $\Lambda^{\mu\nu}$ (équation 12), les équations 24 se décomposent en une suite infinie d'équations sur $h_{(m)}^{\mu\nu}$ et $\Lambda_{(m)}^{\mu\nu}$.

$$\square h_{(1)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(1)}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\nu h_{(1)}^{\mu\nu} = 0 \quad (25)$$

$$\square h_{(m)}^{\mu\nu} = \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}(h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)}) \quad \partial_\nu h_{(m)}^{\mu\nu} = 0 \quad m \geq 2 \quad (26)$$

Cette hiérarchie suggère de chercher à construire les $h_{(m)}^{\mu\nu}$ jusqu'à un ordre post-Minkowskien p quelconque, par itération à partir d'une « graine » $h_{(1)}^{\mu\nu}$ vérifiant 25. Il s'avère qu'une telle construction itérative est possible. Dans cette construction, $h_{(m)}^{\mu\nu}$ prend la forme $u_{(m)}^{\mu\nu} + v_{(m)}^{\mu\nu}$, chacun des termes de cette somme dépendant de la graine $h_{(1)}$ choisie. Le terme $u_{(m)}^{\mu\nu}$ se calcule par²⁶ :

$$u_{(m)}^{\mu\nu} = \mathcal{FP} \square_R^{-1} \Lambda_{(m)}^{\mu\nu}((h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)})) \quad (28)$$

Quant au terme $v_{(m)}^{\mu\nu}$ il est pris (cf. [11], section 2.3) parmi les solutions²⁷ du couple d'équations

$$\square v_{(m)}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\nu v_{(m)}^{\mu\nu} = -\partial_\nu u_{(m)}^{\mu\nu} \quad (29)$$

afin que $h_{(m)}^{\mu\nu}$ satisfasse bien les deux équations 26.

Cette construction itérative conduit, en pondérant par G^m et en sommant sur m jusqu'à l'infini, à poser :

$$\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = Gh_{(1)}^{\mu\nu} + \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m u_{(m)}^{\mu\nu} + \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m v_{(m)}^{\mu\nu} \quad (30)$$

forme dans laquelle on reconnaît la solution de l'équation linéaire dans le vide ($Gh_{(1)}^{\mu\nu}$) complétée par des termes post-Minkowskiens d'ordre ≥ 2 encapsulant les non-linéarités. Cette solution est (en principe) calculable à un ordre post-Minkowskien quelconque p dès lors que la graine $h_{(1)}$ est connue. Bien qu'elle puisse apparaître comme particulière, on

(26) L'opération *Finite Part* s'appliquant à l'opérateur $\square_R^{-1}$ est une procédure mathématique éliminant ici la divergence de $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(h_{(1)}, \dots, h_{(m-1)})$ au voisinage de la source, lorsque $|x| \rightarrow 0$ (cf. [11], section 2.3 pour définition et notation précises). L'opérateur $\square_R^{-1}$ (d'Alembertien inverse retardé), a pour expression :

$$[\square_R^{-1} F](x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 y}{|x - y|} F(y, t - \frac{|x - y|}{c}) \quad (27)$$

mobilisant une intégrale de la fonction F prise sur le cône de lumière passé du point (x, t) .

(27) La solution du système d'équations 29 n'est en effet pas unique. L'important est de choisir une procédure de calcul qui soit la même pour tous les niveaux post-Minkowskien m . Une telle procédure conduit à spécifier (pour chaque couple d'indices $\mu\nu$) une fonctionnelle $v^{\mu\nu} : -\partial_\nu u_{(m)}^{\mu\nu} \rightarrow v_{(m)}^{\mu\nu}$, fonctionnelle linéaire indépendante de m , et qui par conséquent répond également à $v^{\mu\nu} : -\partial_\nu [\sum_m G^m u_{(m)}^{\mu\nu}] \rightarrow [\sum_m G^m v_{(m)}^{\mu\nu}]$.

montre que sa forme (équation 30) donne la structure générale des solutions des équations 24 avec le degré de liberté lié au choix de la graine (cf. [11], section 2.4).

Contraintes sur la graine de l'itération

La première des équations 25, jointe aux conditions aux limites à l'infini²⁸ (antérieurement à une certaine date, le champ gravitationnel $h^{\mu\nu}$ ne dépend pas du temps), impose à $h_{(1)}^{\mu\nu}$ de prendre la forme²⁹ d'ondes multipolaires retardées :

$$h_{(1)}^{\mu\nu}(x, t) = \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\partial_L \frac{\hat{K}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c)}{|x|} \right] \quad (32)$$

$$= \sum_{l=0}^{l=\infty} \left[\hat{n}^L \frac{(-1)^l}{|x|} \sum_{i=0}^{i=l} \frac{(l+i)!}{2^i i! (l-i)!} \frac{\hat{K}_L^{(l-i)}(t - |x|/c)}{c^{l-i} |x|^i} \right] \quad (33)$$

$h_{(1)}^{\mu\nu}$ s'exprime donc par un développement multipolaire ; il en est de même, par induction, de tous les coefficients $h_{(m)}^{\mu\nu}$ et *in fine* de $M(h^{\mu\nu})$ ³⁰. Mais la pratique de la construction des solutions approchées implique de limiter le développement de $h_{(1)}^{\mu\nu}$ à un certain ordre $l_{\max}$ fini, suffisant pour la précision que l'on veut atteindre.

Le tenseur $h_{(1)}^{\mu\nu}$ étant symétrique n'a que dix composantes indépendantes ; on pourrait donc s'attendre à ce qu'il soit spécifié par dix développements multipolaires. Mais la seconde des équations 25 (condition de jauge harmonique) restreint ce nombre de composantes indépendantes. On montre qu'il suffit de spécifier six ensembles de fonctions³¹, désignés dans la littérature citée par :

$$I_L(u), J_L(u), W_L(u), X_L(u), Y_L(u), Z_L(u), \quad l = 0, 1, 2, \dots, l_{\max} \quad u = t - |x|/c$$

pour déterminer complètement toutes les composantes de $h_{(1)}^{\mu\nu}$ dans leur valeur en un point quelconque (x, t) . Ce sont ces fonctions qu'il est nécessaire de connaître, pour les insérer dans l'expression des $h_{(1)}^{\mu\nu}$ au départ de l'itération et déterminer de façon unique les $h_{(m)}^{\mu\nu}$ ³² jusqu'au degré p voulu.

(28) Celle d'une source isolée émettant depuis un temps fini.

(29) Cf. [15] pour l'équivalence entre les expressions 32 et 33. $\hat{K}^{(l-i)}$ est la dérivée d'ordre $l-i$ de $\hat{K}$ par rapport au temps. Si l'on se limite, dans les coefficients de ce développement multipolaire, aux termes en $1/|x|$, ce qui est suffisant, à grande distance, dans le calcul du signal, $h_{(1)}^{\mu\nu}$ prend la forme

simple « post-Newtonienne » : $\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(-1)^l}{|x|c^l} \left[\hat{n}^L \hat{K}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c) \right]$ Mais n'oublions pas que dans toutes

ces expressions, les termes entre crochets sont eux même des sommes, mettant en jeu les différentes valeurs possibles des indices $i_1 \dots i_l$ formant L .

(30) D'où le nom du formalisme, *multipolar post-Minkowskian expansion*.

(31) *Multipole functions*, cf. [11], section 2.2 et théorème 1.

(32) Qui sont donc eux même, par induction, dépendant des $I_L, J_L, \dots$

Lien avec la source

L'équation 30 donne la structure générale des solutions pour le champ gravitationnel extérieur³³ ; le lien avec les caractéristiques physiques de la source (répartition spatiale des densités et sa dynamique) qui fixe la solution de façon unique, réside dans la graine $h_{(1)}^{\mu\nu}$ et ses composants $I_L, J_L, \dots$ jusqu'ici considérés comme indéterminés³⁴.

Ce lien avec la source (solution de *wave generation problem*) mobilise deux points : les lois de conservation (énergie, moment cinétique, ...) se traduisant par $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, et le caractère post-Newtonien de la source. Les calculs s'appuient sur le fait que, *dans la zone extérieure*, $h^{\mu\nu}$ peut être remplacé par son développement multipolaire post-Minkowskien $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ et, *dans la zone proche*, par son développement post-Newtonien $\bar{h}^{\mu\nu}$. Ils s'appuient corrélativement sur la structure commune³⁵ des développements asymptotiques de $\mathcal{M}(h^{\mu\nu})$ et de $\bar{h}^{\mu\nu}$, respectivement lorsque la distance à la source tend vers 0 pour le premier et vers ∞ pour le second.

L'équation 30 donne le point de départ du calcul de $h_{(1)}^{\mu\nu}$

$$Gh_{(1)}^{\mu\nu} = \left[\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \right] - \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m v_{(m)}^{\mu\nu} \quad (34)$$

La condition de jauge harmonique $\partial_\nu h_{(1)}^{\mu\nu} = 0$ permet par ailleurs d'écrire :

$$\partial_\nu \left[\sum_{m=2}^{m=\infty} G^m v_{(m)}^{\mu\nu} \right] = \partial_\nu \left[\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum_{m=2}^{m=\infty} G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \right] \quad (35)$$

La détermination de $h_{(1)}^{\mu\nu}$ s'appuie sur la possibilité d'exprimer la différence $\Delta^{\mu\nu} = \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum G^m u_{(m)}^{\mu\nu}$ en fonction des caractéristiques de la source, *indépendamment de toute hypothèse explicite sur la graine d'itération*. Cette différence $\Delta^{\mu\nu}$ une fois connue, la résolution de l'équation 35 pour obtenir $\sum G^m v_{(m)}^{\mu\nu}$ termine le calcul.

Nous avons, sur la zone extérieure³⁶ :

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(x, t) &\equiv \left[\mathcal{M}(h^{\mu\nu}) - \sum G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \right] (x, t) \\ &= \left[h^{\mu\nu} - \mathcal{FP} \square_R^{-1} \mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu}) \right] (x, t) \\ &= \left[\mathcal{FP} \square_R^{-1} \left(\frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\mu\nu} - \mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu}) \right) \right] (x, t) \end{aligned} \quad (36)$$

(33) Donc, dans le vide, et aussi à l'infini ; elle résout ainsi l'*asymptotic problem*.

(34) En pratique, seules les deux séries $I_L(u)$ et $J_L(u)$ reflèteront ces propriétés physiques, les quatre autres séries $W_L(u), \dots$ paramétrisant des transformations de jauge.

(35) Structure commune qui assure l'effectivité des opérations *Finite Part* éliminant la divergence des intégrales sur $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(y, u)$ à l'intérieur de la source et celle des intégrales sur $\bar{\tau}^{\mu\nu}(y, u)$ (développement post-Newtonien de τ) à l'extérieur de la zone proche.

(36) Cf. [9], Annexe A puis section IV.

Le calcul passe par différentes étapes et mobilise le fait que, sous l'intégrale spatiale $\int dy^3$ intervenant dans $\mathcal{FP}\square_R^{-1}$, on peut remplacer :

1. pour y à l'extérieur de la source, $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(y, u)$ par $\frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\mu\nu}(y, u)$, l'argument de $\mathcal{FP}\square_R^{-1}$ étant alors nul. La valeur de $\Delta^{\mu\nu}(x, t)$ ne dépendra donc que de l'état des choses dans la zone occupée par la source.
2. pour y à l'intérieur de la source, $\mathcal{M}(\Lambda^{\mu\nu})(y, u)$ par son expansion asymptotique lorsque $|y| \rightarrow 0$, et, parallèlement, $\tau^{\mu\nu}(y, u)$ par son développement post-Newtonien $\bar{\tau}^{\mu\nu}(y, u)$.

Au terme de ces étapes, on obtient $\Delta^{\mu\nu}(x, t)$ sous la multipolaire :

$$\mathcal{M}(\Delta^{\mu\nu})(x, t) = -\frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{-1^l}{l!} \left[\partial_L \frac{\hat{F}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c)}{|x|} \right] \quad (37)$$

où les fonctions $\hat{F}_L^{\mu\nu}(t - |x|/c)$ sont des fonctionnelles du développement post-Newtonien $\bar{\tau}^{\mu\nu}$ et possèdent la structure de moments multipolaires liés à la source³⁷. Elles intègrent donc, à des degrés de précision l de plus en plus fins, la distribution de matière et d'énergie de la source et son évolution dans le temps, ce avec des retards $|x|/c$ dus à la distance.

La résolution de l'équation 35, pour obtenir $\sum G^m \nu_{(m)}^{\mu\nu}$, est possible puisque le membre de droite de l'équation 35, $\partial_\nu \Delta^{\mu\nu}$, est désormais accessible à travers le développement multipolaire de $\Delta^{\mu\nu}$. La procédure de résolution, $\nu^{\mu\nu} : \partial_\nu \Delta^{\mu\nu} \rightarrow \sum G^m \nu_{(m)}^{\mu\nu}$, s'interprétant aussi³⁸ comme $\nu^{\mu\nu} : -\partial_\nu \sum G^m u_{(m)}^{\mu\nu} \rightarrow \sum G^m \nu_{(m)}^{\mu\nu}$, définit celle, $\nu^{\mu\nu} : -\partial_\nu u_{(m)}^{\mu\nu} \rightarrow \nu_{(m)}^{\mu\nu}$, que l'on doit utiliser dans l'itération à chaque niveau post-Minkowskien m . Le calcul aboutit à exprimer $\sum G^m \nu_{(m)}^{\mu\nu}$ sous forme de développements multipolaires faisant intervenir également des fonctionnelles sur $\bar{\tau}^{\mu\nu}$.

L'équation 34, réécrite $Gh_{(1)}^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu} - \sum G^m \nu_{(m)}^{\mu\nu}$, donne enfin l'expression de la graine et l'on peut poursuivre les calculs (cf. [9], section IV et V, ou encore [11], théorème 6) jusqu'à l'expression des $I_L(u)$, $J_L(u)$, $\dots$, en fonction du développement post-Newtonien $\bar{\tau}^{\mu\nu}$, jusqu'au degré de précision l voulu.

(37) Pour complétude, leur expression est $\hat{F}_L^{\mu\nu}(u) = \mathcal{FP} \int \hat{y}^L \left[\int_{z=-1}^{z=+1} \bar{\tau}^{\mu\nu}(y, u + z|y|/c) \delta_I(z) dz \right] d^3y$ où $\delta_I(z)$ est une fonction de pondération tendant vers 0 lorsque $|z| \rightarrow 1$. L'opération *Finite Part* contrôle cette fois-ci la divergence de l'intégrale lorsque $|y| \rightarrow \infty$. $\hat{F}_L^{\mu\nu}$ est le moment (STF) multipolaire d'ordre l du champ défini par l'intégrale mise entre crochets.

(38) Car $\partial_\nu \Delta^{\mu\nu} = -\partial_\nu \sum G^m u_{(m)}^{\mu\nu}$, l'itération étant construite afin que $\partial_\nu \mathcal{M}(h^{\mu\nu}) = 0$

Références

- [1] J. Abadie, B. P. Abbott, R. Abbott, M. Abernathy, T. Accadia, F. Acernese, C. Adams, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, and et al. TOPICAL REVIEW : Predictions for the rates of compact binary coalescences observable by ground-based gravitational-wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, **27**(17) :173001, Sept. 2010.
- [2] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, and et al. Tests of General Relativity with GW150914. *Physical Review Letters*, **116**(22) :221101, June 2016.
- [3] P. Amaro-Seoane, S. Aoudia, S. Babak, P. Binétruy, E. Berti, A. Bohé, C. Caprini, M. Colpi, N. J. Cornish, K. Danzmann, J.-F. Dufaux, J. Gair, I. Hinder, O. Jennrich, P. Jetzer, A. Klein, R. N. Lang, A. Lobo, T. Littenberg, S. T. McWilliams, G. Nelemans, A. Petiteau, E. K. Porter, B. F. Schutz, A. Sesana, R. Stebbins, T. Sumner, M. Vallisneri, S. Vitale, M. Volonteri, H. Ward, and B. Wardell. eLISA : Astrophysics and cosmology in the millihertz regime. *GW Notes*, vol. **6**, p. 4–110, 6 :4–110, May 2013.
- [4] K. Belczynski, M. Benacquista, and T. Bulik. Double Compact Objects as Low-frequency Gravitational Wave Sources. *Astrophysical Journal*, **725** :816– 823, Dec. 2010.
- [5] K. Belczynski, V. Kalogera, and T. Bulik. A Comprehensive Study of Binary Compact Objects as Gravitational Wave Sources : Evolutionary Channels, Rates, and Physical Properties. *Astrophysical Journal*, **572** :407–431, June 2002.
- [6] K. Belczynski, V. Kalogera, F. A. Rasio, R. E. Taam, A. Zezas, T. Bulik, T. J. Maccarone, and N. Ivanova. Compact Object Modeling with the StarTrack Population Synthesis Code. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **174** :223– 260, Jan. 2008.
- [7] K. Belczynski, R. E. Taam, V. Kalogera, F. A. Rasio, and T. Bulik. On the Rarity of Double Black Hole Binaries : Consequences for Gravitational Wave Detection. *Astrophysical Journal*, **662** :504–511, June 2007.
- [8] L. Bernard, L. Blanchet, A. Bohé, G. Faye, and S. Marsat. Fokker action of nonspinning compact binaries at the fourth post-Newtonian approximation. *Physical Review D*, **93**(8) :084037, Apr. 2016.
- [9] L. Blanchet. On the multipole expansion of the gravitational field. *Classical and Quantum Gravity*, **15** :1971–1999, July 1998.
- [10] L. Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, **9**, June 2006.
- [11] L. Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, **17** :2, Dec. 2014.

- [12] L. Blanchet and T. Damour. Radiative gravitational fields in general relativity. I - General structure of the field outside the source. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **320** :379–430, Dec. 1986.
- [13] L. Blanchet and G. Faye. General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order. *Physical Review D*, **63**(6) :062005, Mar. 2001.
- [14] L. Blanchet, G. Faye, B. R. Iyer, and B. Joguet. Gravitational-wave inspiral of compact binary systems to 7/2 post-Newtonian order. *Physical Review D*, **65**(6) :061501, Mar. 2002.
- [15] L. Blanchet, G. Faye, and S. Nissanke. Structure of the post-Newtonian expansion in general relativity. *Physical Review D*, **72**(4) :044024, Aug. 2005.
- [16] R. Blandford and S. A. Teukolsky. Arrival-time analysis for a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal*, **205** :580–591, Apr. 1976.
- [17] M. Burgay, N. D'Amico, A. Possenti, R. N. Manchester, A. G. Lyne, B. C. Joshi, M. A. McLaughlin, M. Kramer, J. M. Sarkissian, F. Camilo, V. Kalogera, C. Kim, and D. R. Lorimer. An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system. *Nature*, **426** :531–533, Dec. 2003.
- [18] C. Cutler, T. Apostolatos, L. Bildsten, L. Finn, E. Flanagan, D. Kennefick, D. Markovic, A. Ori, E. Poisson, G. Sussman, and K. Thorne. The last three minutes : Issues in gravitational-wave measurements of coalescing compact binaries. *Phys. Rev. Lett.*, **70** :2984–2987, 1993.
- [19] T. Damour and N. Deruelle. General relativistic celestial mechanics of binary systems i. the post-newtonian motion. *Annales Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **43** :107–132, 1985.
- [20] T. Damour and N. Deruelle. General relativistic celestial mechanics of binary systems ii. the post-newtonian timing formula. *Annales Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **44** :263–292, 1986.
- [21] T. Damour, P. Jaranowski, and G. Schäfer. Equivalence between the ADM- Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post- Newtonian dynamics of compact binaries. *Physical Review D*, **63**(4) :044021, Feb. 2001.
- [22] T. Damour, P. Jaranowski, and G. Schäfer. Nonlocal-in-time action for the fourth post-Newtonian conservative dynamics of two-body systems. *Physical Review D*, **89**(6) :064058, Mar. 2014.
- [23] V. C. de Andrade, L. Blanchet, and G. Faye. Third post-Newtonian dynamics of compact binaries : Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms. *Classical and Quantum Gravity*, **18** :753–778, Mar. 2001.
- [24] A. Einstein. Über Gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167, 1918.

- [25] A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann. The Gravitational Equations and the Problem of Motion. *Annals of Mathematics*, **39** :65–100, Jan. 1938.
- [26] L. W. Esposito and E. R. Harrison. Properties of the Hulse-Taylor binary pulsar system. *Astrophysical Journal Letters*, **196** :L1, Feb. 1975.
- [27] G. Faye, L. Blanchet, and A. Buonanno. Third Post-Newtonian Spin-orbit Effect in the Gravitational Radiation Flux of Compact Binaries. In G. Auger, P. Binétruy, and E. Plagnol, editors, *9th LISA Symposium*, volume **467** of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 215, Jan. 2013.
- [28] G. Faye, S. Marsat, L. Blanchet, and B. R. Iyer. The third and a half-post- Newtonian gravitational wave quadrupole mode for quasi-circular inspiralling compact binaries. *Classical and Quantum Gravity*, **29**(17) :175004, Sept. 2012.
- [29] S. Foffa and R. Sturani. Effective field theory calculation of conservative binary dynamics at third post-Newtonian order. *Physical Review D*, **84**(4) :044031, Aug. 2011.
- [30] J. R. Gair, M. Vallisneri, S. L. Larson, and J. G. Baker. Testing General Relativity with Low-Frequency, Space-Based Gravitational-Wave Detectors. *Living Reviews in Relativity*, **16**, Sept. 2013.
- [31] R. A. Hulse and H. J. Taylor. Discovery of a Pulsar in a Close Binary System. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume **6** of *Bulletin of The American Astronomical Society*, page 453, Sept. 1974.
- [32] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal Letters*, **195** :L51–L53, Jan. 1975.
- [33] Y. Itoh and T. Futamase. New derivation of a third post-Newtonian equation of motion for relativistic compact binaries without ambiguity. *Physical Review D*, **68**(12) :121501, Dec. 2003.
- [34] P. Jaranowski and G. Schäfer. Binary black-hole problem at the third post- Newtonian approximation in the orbital motion : Static part. *Physical Review D*, **60**(12) :124003, Dec. 1999.
- [35] P. Jaranowski and G. Schäfer. Dimensional regularization of local singularities in the fourth post-Newtonian two-point-mass Hamiltonian. *Physical Review D*, **87**(8) :081503, Apr. 2013.
- [36] V. Kalogera, K. Belczynski, C. Kim, R. O'Shaughnessy, and B. Willems. Formation of double compact objects. *Physics Reports*, **442** :75–108, Apr. 2007.
- [37] V. Kalogera, C. Kim, D. R. Lorimer, M. Burgay, N. D'Amico, A. Possenti, R. N. Manchester, A. G. Lyne, B. C. Joshi, M. A. McLaughlin, M. Kramer, J. M. Sarkissian, and F. Camilo. The Cosmic Coalescence Rates for Double Neutron Star Binaries. *Astrophysical Journal Letters*, **601** :L179–L182, Feb. 2004.
- [38] V. Kalogera, R. Narayan, D. N. Spergel, and J. H. Taylor. The Coalescence Rate of Double Neutron Star Systems. *Astrophysical Journal*, **556** :340–356, July 2001.

- [39] C. Kim, V. Kalogera, and D. R. Lorimer. The Probability Distribution of Binary Pulsar Coalescence Rates. I. Double Neutron Star Systems in the Galactic Field. *Astrophysical Journal*, **584** :985–995, Feb. 2003.
- [40] P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit. *Physical Review*, **131** :435–440, July 1963.
- [41] E. Poisson and C. Will. *GRAVITY, Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [42] O. Poujade and L. Blanchet. Post-Newtonian approximation for isolated systems calculated by matched asymptotic expansions. *Physical Review D*, **65**(12) :124020, June 2002.
- [43] J. H. Taylor, R. A. Hulse, L. A. Fowler, G. E. Gullahorn, and J. M. Rankin. Further observations of the binary pulsar PSR 1913+16. *Astrophysical Journal Letters*, **206** :L53–L58, May 1976.
- [44] J. H. Taylor and J. M. Weisberg. A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16. *Astrophysical Journal*, **253** :908–920, Feb. 1982.
- [45] R. V. Wagoner. Test for the existence of gravitational radiation. *Astrophysical Journal Letters*, **196** :L63–L65, Mar. 1975.
- [46] J. M. Weisberg and J. H. Taylor. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis. In F. A. Rasio and I. H. Stairs, editors, *Binary Radio Pulsars*, volume **328** of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 25, July 2005.