La théorie des probabilités et le problème de l'efficacité (dé-)raisonnable des mathématiques

Dominique Lambert

Facultés Universitaires N-D. de la Paix, 61 rue de Bruxelles, Namur, Belgique

Résumé

Le but de cette contribution est de montrer que les interrogations épistémologiques relatives au statut de la théorie des probabilités présentent un intérêt indéniable dans le contexte d'une tentative de réponse au problème de « l'efficacité déraisonnable » des mathématiques dans les sciences de la nature, pour reprendre les termes de Wigner. Nous montrerons que le fait de retrouver un statut véritable à la théorie des probabilités, en se refusant de la réduire, purement et simplement, à la théorie abstraite de la mesure, n'est pas sans incidence sur la possibilité même de résoudre ce problème d'efficacité. La théorie des probabilités, revêtue de son propre statut épistémologique, est en fait une des illustrations de l'existence d'une composante proprement « expérimentale » de l'activité mathématique. L'oubli de cette composante ainsi que celui de la dimension irréductiblement historique et spécifiquement biologique (neurophysiologique) de la connaissance mathématique sont autant de freins empêchant de parvenir à une ébauche de solution rationnelle au problème de l'efficacité des mathématiques. L'interrogation sur le statut des probabilités constitue donc une invitation à reprendre en profondeur et de manière quelque peu latérale ce célèbre problème.

Abstract

The aim of this contribution is to show that the epistemological interrogations concerning the status of probability theory are of undeniable interest in the context of an attempt to answer the problem of the “unreasonable effectiveness” of mathematics in the natural sciences, to use the words of Wigner. We shall show that the fact of regaining a true status for probability theory by refusing to reduce it purely and simply to the abstract theory of measurement is not without affecting the very possibility of solving this problem of efficiency. The theory of probability, assuming its own epistemological status, is in fact one of the illustrations of the existence of a properly “experimental” component of the mathematical activity. The forgetting of this component as well as that of the irreducibly historical and specifically biological (neurophysiological) dimension of mathematical knowledge are all obstacles which prevent us from arriving at a rational solution to the problem of the effectiveness of mathematics. The interrogation on the status of probabilities thus constitutes an invitation to resume in depth and somewhat laterally this famous problem.

Note

Ce texte est issu de la conférence du même nom donnée en 1997 dans le cadre des troisièmes rencontres « Physique et interrogations fondamentales » et publiée dans « Prédiction et Probabilité dans les Sciences », édité par Etienne Klein & Yves Sacquin¹, Éditions FRONTIERES (1998).

I. Introduction

Le but de cette contribution est de montrer que les interrogations épistémologiques relatives au statut de la théorie des probabilités présentent un intérêt indéniable dans le contexte d'une tentative de réponse au problème de « l'efficacité déraisonnable » des mathématiques dans les sciences de la nature, pour reprendre les termes de Wigner. Nous montrerons que le fait de retrouver un statut véritable à la théorie des probabilités, en se refusant de la réduire, purement et simplement, à la théorie abstraite de la mesure, n'est pas sans incidence sur la possibilité même de résoudre ce problème d'efficacité. La théorie des probabilités, revêtue de son propre statut épistémologique, est en fait une des illustrations de l'existence d'une composante proprement « expérimentale » de l'activité mathématique. L'oubli de cette composante ainsi que celui de la dimension irréductiblement historique et spécifiquement biologique (neurophysiologique) de la connaissance mathématique sont autant de freins empêchant de parvenir à une ébauche de solution rationnelle au problème de l'efficacité des mathématiques. L'interrogation sur le statut des probabilités constitue donc une invitation à reprendre en profondeur et de manière quelque peu latérale ce célèbre problème.

(1) L'AEIS remercie Etienne Klein & Yves Sacquin pour leur aimable autorisation à reproduire cet article

2. La théorie des probabilités existe-t-elle ?

Certains estiment aujourd'hui qu'en toute rigueur de termes il ne convient plus de parler de « théorie des probabilités ». En effet, celle-ci ne renverrait qu'à des intuitions plus ou moins vagues ou à des « recettes de calcul » plus ou moins rigoureuses, dont les brumes conceptuelles auraient été dissipées par la tout élégante théorie de la mesure. Si l'on consulte les *Eléments d'histoire des mathématiques* de Bourbaki² par exemple, on ne trouve aucune rubrique intitulée : « théorie des probabilités ». Dans son ouvrage, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Jean Dieudonné³ souligne que la théorie des probabilités n'appartenait pas vraiment aux mathématiques avant d'être rattachée à la théorie de la mesure. Au niveau des mathématiques pures, la théorie des probabilités comme telle s'est évanouie laissant la place à un chapitre de la théorie de la mesure qui ne considère « que des mesures dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 »⁴. De la même manière, dans son *Panorama des mathématiques pures*, Dieudonné déclare⁵ :

« Le calcul des probabilités, en tant que discipline, n'existe guère que depuis 1933, comme partie de la théorie moderne de l'Intégration ; mais elle a hérité ses problèmes propres, et même son langage, des trois siècles antérieurs au cours desquels le Calcul des probabilités était un mélange de raisonnements d'allure mathématique et de considérations plus ou moins intuitives sur le rôle et l'évaluation du hasard dans les comportements humains ou les phénomènes naturels ».

Suivant une même ligne de pensée, Joseph Doob affirme que⁶ :

“Probability is simply a branch of measure theory, with its own emphasis and field of application”.

Les probabilités font leur entrée en théorie de la mesure grâce au travail fondamental de Kolmogorov de 1933⁷. Ce travail d'axiomatisation confère à la notion de probabilité une définition rigoureuse et consistante, lui permettant de sortir des pétitions de principe qu'elle engendrait auparavant en faisant intervenir un concept fondateur d'événement « équiprobable ». L'importance d'une telle axiomatisation est également de mettre en évidence un domaine particulièrement fécond et unificateur des mathématiques. Elle induit, par exemple, un grand nombre de concepts nouveaux de convergence (« convergence p-presque sûre » par exemple) et suscite, plus largement, un autre point de vue sur les fonctions en analyse, comme l'a fait remarquer récemment Doob lui-même⁸. On ne peut donc légitimement remettre en question, au niveau des mathématiques pures, la nécessité

(2) N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Masson, 1984

(3) J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Paris, Hachette, 1987, p. 169.

(4) J. Dieudonné, *id.*

(5) J. Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Paris, Gauthier-Villars, 1977, p. 233.

(6) J. Doob, *Stochastic processes*, New York, Wiley, 1953, p.v.

(7) A. Kolmogorov, *Grundbegriffe des Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, Springer, 1933.

(8) J. Doob, “The development of rigor in mathematical probability (1900-1950)” in *Development of mathematics, 1900-1950*, Basel, Birkhäuser, 1994, pp. 158-169.

de cette métamorphose de la théorie des probabilités en un chapitre de la théorie de la mesure. Mais, faut-il seulement, pour comprendre les mathématiciens et ce que font les mathématiciens, en rester au niveau purement axiomatique ? Nous ne le pensons pas. Pour comprendre l'origine et la portée d'une théorie en mathématiques, mais aussi pour en maîtriser l'intuition lorsqu'il convient de l'utiliser ou de la développer, il n'est pas pertinent de ne la considérer que dans sa structure purement formelle. La forme ne s'explique pas par elle-même mais par la référence (idée, image, modèle, ...) qui lui donne sens. C'est peut-être pour cette raison que bon nombre de grands mathématiciens ne se sont pas résignés facilement à identifier strictement la notion de probabilité avec ce que nous en dit l'axiomatique contemporaine basée sur la théorie des ensembles et de la mesure. Comme le souligne avec précision Jan von Plato⁹ :

"Remarkably, many of the most important contributors to probability had reservations about the formalist or set theoretic foundations of mathematics. That was the case with Borel, Weyl (...), Kolmogorov himself".

En 1959, alors que l'axiomatique de Kolmogorov est largement reconnue dans la communauté des mathématiciens, Kac déclare¹⁰ :

"How much fuss over measure theory is necessary for probability theory is a matter of taste. Personally I prefer as little fuss as possible because I firmly believe that probability is more closely related to analysis, physics and statistics than to measure theory as such".

La réaction de Kac est intéressante car elle suggère que si l'on identifie les probabilités à une partie de la théorie de la mesure ou de l'intégration¹¹, on risque vite de se couper de la source même de cette branche séculaire de la connaissance mathématique. Cette source de la théorie des probabilités se situe en fait essentiellement au niveau de la traduction formelle de problèmes (empiriques) impliquant l'idée, certes assez vague, mais combien riche, de hasard. Nous sommes donc devant un problème épistémologique. La théorie axiomatique des probabilités ne fait aucunement référence à une quelconque idée de hasard. La théorie de la mesure, pourrait-on dire, se moque du hasard ! Pourtant, il n'y aurait vraisemblablement pas eu de théorie des probabilités sans référence à cette notion vague et intuitive de phénomène survenant « au hasard ». La solution de ce problème ne peut pas se faire en renonçant à la rigueur introduite par Kolmogorov. Il est certes possible de discuter de la pertinence de certains axiomes particuliers : celui qui impose l'additivité dénombrable par exemple. Cependant, l'exigence de rigueur nous oblige à maintenir impérativement l'esprit de l'axiomatique de Kolmogorov, en se gardant de toute rigidité formelle. En effet comme le remarquais très justement Choquet¹² :

(9) J. von Plato, *Creating modern probability. Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective*, Cambridge University Press, 1994, p. 19.

(10) Cité de Doob, "The development of rigor...", *op.cit.*, p. 168.

(11) Pour les liens entre la théorie des probabilités et celle de l'intégration cf. J-P. Pier, *Histoire de l'intégration. Vingt-cinq siècles de mathématiques*, Paris, Masson, 1996.

(12) G. Choquet, « L'analyse et Bourbaki », *Enseign. Math.*, **8** (1962) 109-135 ; le passage cité se trouve pp. 125-126.

« Bourbaki s'est fait de la théorie de la mesure une conception intéressante mais exagérément rigide en termes d'espaces localement compacts et de convergence vague ; et il relègue au musée des horreurs les mesures abstraites, fermant ainsi à ses disciples les portes du calcul des probabilités, qui n'a peut-être pas encore trouvé les meilleurs outils, mais manifeste actuellement une vitalité étonnante ».

La solution de notre problème ne peut pas se faire non plus en renonçant purement et simplement à toute idée intuitive de hasard puisque, nous l'avons vu, elle constitue la source lointaine mais effective des concepts probabilistes. Cette solution ne peut être trouvée qu'en tentant de redonner une véritable place à la théorie des probabilités, en tant qu'authentique pratique scientifique, aux côtés du champ purement formel de la théorie de l'intégration ou de la mesure. Les résistances des grands théoriciens des probabilités à l'assimilation totale du calcul des probabilités à la théorie de la mesure pourraient alors être lues comme une manière d'indiquer, « en creux », le rôle incontournable d'une théorie des probabilités dont il nous faut éclaircir maintenant les caractéristiques.

3. Le statut hybride de la théorie des probabilités.

Si nous nous penchons sur l'origine de la théorie des probabilités nous voyons immédiatement que celle-ci constitue un domaine hybride, une sorte d'interface entre les mathématiques pures et des champs d'applications physiques, biologiques, économiques ou sociaux où l'on cherche à modéliser les phénomènes aléatoires.

A l'origine, le calcul des probabilités s'enracine dans des problèmes liés à l'étude des résultats des jeux de hasard (Cardan, Pascal, Fermat,...), mais rapidement ces techniques calculatoires sont exportées dans le domaine de l'étude de la démographie ou plus généralement des statistiques sociales (Leibniz, Bayes, Condorcet, Laplace, Gauss et Quételet), domaine où les variabilités individuelles excluent le recours à des lois déterministes. Cependant, et cela est remarquable, dès les débuts, le calcul des probabilités n'est pas entièrement lié à la gestion de phénomènes où règne l'indéterminisme. Par la notion de probabilité géométrique (Buffon, Bertrand,...), la théorie des probabilités se manifeste comme une méthode alternative permettant de calculer des surfaces, des volumes,...

Comme l'a très bien souligné Jan von Plato¹³, la théorie des probabilités a aussi comme origine plus récente des problèmes de stabilité d'orbites planétaires étudiés par Gylden et Poincaré à la fin du siècle dernier. Ces problèmes mènent à la considération de fractions continues et l'une des questions importantes est de savoir comment se distribuent les coefficients entiers qui apparaissent dans les développements en fractions continues de certains nombres réels. Ce problème de la caractérisation des distributions de classes de nombres va transformer le calcul des probabilités en auxiliaire important de la théorie des nombres

(13) J. von Plato, op.cit..

grâce à Borel, par exemple. Le travail de Borel sur les distributions de nombres est d'ailleurs une des origines de la théorie de l'intégration de Lebesgue (1902). La mécanique statistique de Boltzmann et l'analyse du mouvement brownien (Einstein, Fokker, Planck, Wiener,...) vont constituer de puissantes impulsions pour le développement de la théorie moderne des processus stochastiques. C'est d'ailleurs le travail de Kolmogorov (1931) concernant le mouvement brownien qui va donner naissance, influencé par la théorie de l'intégration de Lebesgue et l'étude fondamentale de Wiener sur les mesures des ensembles de trajectoires browniennes, à la célèbre axiomatique de 1933. Tout cet ensemble de travaux concernant le mouvement brownien débouche à l'heure actuelle sur la théorie de l'intégrale de chemins de Feynman et Kac, dont l'importance est centrale dans toute la théorie classique et quantique des champs. Par le travail de Kakutani (1944) on sait maintenant que l'étude de certains processus stochastiques (martingales) est une autre facette de la théorie des applications harmoniques. Autrement dit, la théorie des processus stochastiques devient ici un outil puissant pour la résolution d'équations de Laplace par exemple. On ne peut pas non plus passer sous silence l'influence de la théorie classique de la radioactivité ou de la mécanique quantique dans la stimulation des recherches en théorie des probabilités.

Ce rapide coup d'œil historique montre que la théorie des probabilités est un lieu de médiations. Elle constitue en effet un domaine théorique où se relient diverses branches des mathématiques et où se produit un va-et-vient entre des mathématiques « pures » (théorie des nombres, théorie des ensembles, théorie des équations aux dérivées partielles,...) et des descriptions de problèmes empiriques issus des sciences naturelles et humaines. Tantôt, les probabilités sont là pour modéliser l'idée de hasard, tantôt elles apparaissent comme un lieu où se transfèrent des intuitions et des méthodes propres à des domaines distincts des mathématiques.

Le rôle médiateur de la théorie des probabilités se manifeste également, de manière éclatante, dans le fait qu'elle joue un rôle crucial dans la constitution et le contrôle des liens qui unissent les théories générales de la physique (ou d'autres sciences) et les données empirico-formelles venant des dispositifs expérimentaux. Dans ce contexte, la théorie des probabilités permet, tout d'abord, la modélisation des erreurs expérimentales auxquelles l'observateur doit s'attendre ou du bruit de fond perturbant le signal intéressant. Elle permet aussi de caractériser les incertitudes liées à l'ignorance ou le niveau de risque admissible dans telle ou telle situation¹⁴. La théorie des probabilités est ici non une théorie fondamentale, mais une théorie des instruments qui connecte une théorie générale à des données obtenues expérimentalement.

Nous nous demandions, ci-dessus, quel pouvait être le statut d'une théorie des probabilités qui ne serait pas strictement restreinte à un chapitre de la théorie de la mesure. Nous entrevoyons ici un élément de réponse. Il ne s'agit, ni d'une théorie ressortissant aux mathématiques envisagées pour elles-mêmes, ni une simple théorie physique générale des phénomènes aléatoires, mais bien plutôt d'une sorte de champ théorique médiateur où les théories mathématiques sont interconnectées entre elles ou « co-adaptées » à des descriptions de phénomènes naturels ou humains. On pourrait dire que bien loin d'avoir été absorbée complètement par la théorie abstraite de la mesure, la théorie des probabilités est ce lieu bien réel où se réalisent les traductions et les adaptations mutuelles permettant

(14) Nous renvoyons ici au bel ouvrage de E. Borel, *Probabilité et certitude*, Paris, P.U.F., 1950, pp. 113-125.

à certaines données empiriques caractérisées par un comportement « aléatoire » de rejoindre un formalisme mathématique dont elles tireront leurs sens. On n'a pas assez souligné, en philosophie des sciences, l'existence de ces lieux théoriques médiateurs, dont la théorie des probabilités ne constitue au fond qu'un des exemples les plus marquants¹⁵. Nous verrons bientôt que l'oubli de ces lieux constitue une des raisons essentielles de la difficulté que l'on éprouve à comprendre l'efficacité surprenante des mathématiques dans les sciences de la nature.

4. L'efficacité des mathématiques est-elle déraisonnable ?

La recherche d'une justification de l'efficacité des mathématiques est un des problèmes les plus classiques de la philosophie. Il a été épinglé de manière particulièrement brillante par E.P. Wigner en 1960 dans un article où cette efficacité est qualifiée de « déraisonnable »¹⁶. En effet, le célèbre physicien estime que cette efficacité ne peut être qualifiée qu'en termes de « miracles » ou de « don magnifique » situés au-delà des limites de notre compréhension des phénomènes. Il nous semble que l'efficacité des mathématiques en physique est indéniable et qu'elle est susceptible de susciter l'émerveillement de toute personne qui a pratiqué un tant soit peu cette discipline. Cependant, il nous semble peu conforme à la dynamique de la raison scientifique de cacher la difficulté de ce problème de l'efficacité des mathématiques sous le voile du miracle avant d'avoir sérieusement envisagé toutes les possibilités d'explication. Or, celles-ci sont nombreuses, même si elles ne sont pas toutes également satisfaisantes. Après avoir formulé quelques remarques préliminaires, nous allons donc risquer une approche du problème qui se base sur un examen des différentes solutions apportées par l'histoire récente ou ancienne de la philosophie.

Il nous faut remarquer d'emblée que la notion d'efficacité recouvre plusieurs significations. Il peut s'agir, tout d'abord, d'une capacité de prédiction ou de rétrodiction. Une théorie mathématique est dite efficace dans un domaine des sciences si elle peut anticiper les résultats d'expérimentations ou reproduire les données obtenues précédemment. Mais, l'efficacité ne se mesure pas seulement à cette possibilité de « sauver » les phénomènes. En effet, une théorie mathématique est dite efficace également si elle permet de mettre en évidence des structures « explicatives ». La théorie de jauge qui décrit les interactions électro-faibles ne manifeste pas seulement son efficacité par le fait qu'elle reproduit les courbes expérimentales qui sont obtenues à partir des détecteurs de particules (qui mettent en évidence l'existence de bosons vectoriels intermédiaires). Elle est qualifiée d'efficace parce que son formalisme donne un schéma expliquant l'existence de cette interaction

(15) On oublie souvent les théories décrivant les dispositifs expérimentaux (détecteurs,...) qui sont, pour une grande part, souvent indépendantes des théories générales qui servent de base à la description de l'expérience. La théorie du sismographe, par exemple, est largement indépendante pour l'explication de son fonctionnement de la théorie de la tectonique des plaques,... Cette autonomie relative des théories instrumentales joue un grand rôle dans la confiance que l'on peut accorder aux tests d'une théorie générale.

(16) E.P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XIII (1960) 1-14.

électro-faible. En effet, celle-ci dérive d'un concept profond de symétrie : l'invariance sous une transformation locale de jauge. La structure de la théorie possède donc, en plus de l'efficacité strictement prédictive, une efficacité explicative. Nous retrouvons ici les remarques de René Thom qui souligne, de manière judicieuse, la nécessité de ne pas confondre les fonctions prédictives et explicatives de toute science de la nature¹⁷. L'efficacité des mathématiques peut être vue à un troisième niveau : celui de la générativité¹⁸. Une théorie mathématique est efficace si elle permet d'engendrer de nouvelles idées, de nouveaux concepts ou des solutions originales de problèmes anciens. Ces trois niveaux d'efficacité doivent être pris en considération si l'on ne veut pas mutiler la notion d'efficacité des mathématiques dans les sciences. Par exemple il est clair que la théorie des supercordes n'est pas (encore ?) prédictivement efficace, mais cela ne veut pas dire qu'elle ne possède pas d'efficacité du tout. En effet, cette théorie suggère une série d'idées sur la manière dont on doit changer notre conception des particules élémentaires pour arriver à une unification des quatre interactions fondamentales (par exemple l'abandon des entités ponctuelles). Il en va de même de la géométrie non-commutative. Le fait qu'elle fournisse, dans certains cas particuliers, une explication intrinsèque du phénomène de brisure de symétrie (nécessaire pour donner de la masse à certains messagers d'interaction), lui confère une efficacité (relative mais réelle). Toutes ces réflexions montrent que le concept d'efficacité est beaucoup plus complexe que ce que pourrait laisser croire une analyse superficielle des applications des mathématiques dans les sciences.

Il nous faut souligner aussi que l'efficacité des mathématiques semble très différente (aux trois niveaux que nous venons de décrire) lorsqu'il s'agit des sciences comme la physique, la chimie voire la biologie ou lorsqu'il s'agit de sciences humaines comme l'économie, la sociologie ou l'histoire. Il est certain qu'en biologie contemporaine, les méthodes mathématiques ont acquis une importance et une efficacité que nul ne pouvait soupçonner il y a seulement quelques dizaines d'années. Cependant, on peut se demander si l'explication des phénomènes biologiques passera un jour par une complète mathématisation de cette discipline à l'instar de ce qui se passe en physique ? De la même façon, si certaines théories mathématiques se révèlent efficaces en économie (théorie des jeux non-coopératifs, ...), il est clair que toutes les explications de phénomènes économiques ne se coulent pas nécessairement, avec le même succès, dans le moule des formalismes mathématiques¹⁹. Certaines applications artificielles de la théorie des catastrophes ou de la théorie des systèmes dynamiques chaotiques à la sociologie montrent d'ailleurs que toute mathématisation ne signifie pas nécessairement un accroissement de maîtrise des phénomènes décrits par les sciences humaines²⁰.

(17) R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, Es-Hei, 1991.

(18) Nous renvoyons le lecteur aux réflexions d'Alain Connes qui insiste sur cette « générativité » des formalismes mathématiques de la physique (J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à pensée*, Paris, Odile Jacob, 1989, pp. 91-92).

(19) Comme exemple on pourrait donner ici la question de la pertinence de la modélisation mathématique de la notion de liberté de l'acteur individuel. Si l'on peut donner des descriptions extrêmement simple de certains comportements globaux engendrés par une somme d'acteurs individuels agissant librement, il est clair qu'il est difficile (voire impossible) de fournir un modèle complet expliquant mathématiquement les caractéristiques de la décision libre d'un acteur isolé.

(20) Nous ne voulons pas nier ici bien entendu la fécondité de certaines analogies mathématiques (structurales par exemple) en sciences humaines. Notre critique vise plutôt l'utilisation abusive des mathématiques comme outil de prédiction et d'explication en sociologie, psychologie, ...

Historiquement, une des premières tentatives d'explication de l'efficacité des mathématiques nous est donnée par le pythagorisme qui assimile l'essence du monde au nombre. Dans cette perspective et d'un point de vue plus contemporain, on pourrait dire que l'efficacité des mathématiques est liée au fait que la structure profonde du monde est justement de nature mathématique. Dès lors, faire des mathématiques revient à emprunter le langage même du monde matériel. Cette conception est critiquable à bien des égards. Une des objections majeures à cette thèse est le constat que le monde mathématique ne correspond pas adéquatement et biunivoquement au monde physique. Comme l'a très bien montré Jean-Marc Lévy-Leblond, un même formalisme physique peut décrire un grand nombre de systèmes physiques tout à fait différents (par exemple une même équation différentielle du second ordre décrit des circuits RLC ou des systèmes mécaniques de boules reliées par des ressorts,...)²¹. De plus, les équations de la physique engendrent, en plus des solutions correspondant aux phénomènes, des solutions sans aucune signification physique directe (certaines solutions sont rejetées, par exemple, parce qu'elles violent la causalité usuelle). La correspondance entre les mathématiques et la physique n'est donc pas biunivoque et naturelle. Ceci laisse donc planer un doute sur une sorte d'isomorphisme entre le langage (mathématique) et la nature.

L'explication platonicienne de la réussite des mathématiques peut être divisée en deux thèses. La première pourrait être qualifiée de « platonisme faible » (celui qui peut être trouvé dans des dialogues tels que la *République*). Selon cette conception, les mathématiques constituent un langage intermédiaire qui permet de passer du sensible au monde des Idées qui constitue la réalité profonde des choses. Les mathématiques sont efficaces ici parce qu'elles offrent un moyen de viser les véritables structures du monde. Une autre version du platonisme (qui est plus conforme à la lecture de Platon telle qu'Aristote nous la livre), que nous pourrions appeler le « platonisme fort », identifie les mathématiques au monde des Idées lui-même. Dans une version contemporaine défendue par Albert Lautman, les théories mathématiques constituent des schémas d'incarnation des Idées²². L'unité des Idées (réalisée chez Platon par l'Idée du Bien) explique ici l'unité des mathématiques. En positif, ces deux thèses ont le mérite de souligner le fait que les constructions mathématiques ne sont pas entièrement le fruit de choix arbitraires faits par le mathématicien. Si l'on en croit l'expérience des mathématiciens, on se rend compte qu'il est légitime de parler, en partie, d'une découverte (plutôt que d'une invention) de nouveaux concepts. Certaines parties des mathématiques semblent découler, non d'une volonté arbitraire du mathématicien, mais d'une sorte de nécessité interne aux mathématiques, un peu comme si les concepts étaient déjà-là. Cependant, on ne voit pas comment cette expérience devrait être nécessairement liée à l'existence d'un monde des Idées dont le statut reste quelque peu énigmatique. Il pourrait très bien se faire que cette nécessité soit liée à la structure même de notre cerveau ou de nos schémas inférentiels et non à celle du monde des Idées. Une des grandes difficultés du platonisme consiste aussi à expliquer comment le monde des Idées entre en contact avec le monde des phénomènes. Si nous identifions ces deux mondes, nous retombons dans le pythagorisme. Si par contre nous les séparons, nous devons expliquer comment nous pouvons passer de l'un à l'autre et nous retrouvons ici toutes les difficultés liées aux dualismes philosophiques. En effet, comme Descartes ou comme Gödel, nous devons

(21) J.-M. Lévy-Leblond, « Physique et mathématiques » in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, sous la direction de M. Loi et R. Thom), Paris, Seuil, 1982, p. 201

(22) Cf. A. Lautman, *Essais sur les notions de structure et d'existence en mathématiques I. Les schémas de structure*, Paris, Hermann, 1938.

supposer que le cerveau est une sorte d'organe de contact entre deux mondes l'un matériel et l'autre non. Le problème consiste alors, tout en restant dans le cadre d'une philosophie des sciences, à expliquer comment ce qui n'est pas matériel peut agir sur ce qui l'est. Les thèses platoniciennes montrent que la solution du problème de l'efficacité des mathématiques doit probablement passer par la considération du fait que l'origine de celles-ci ne peut être située uniquement au niveau d'une simple construction libre de l'esprit, mais dans un ensemble de sources qui s'imposent à l'entendement. Cependant ces sources ne doivent peut-être pas être placées aussi « haut » que ce que le platonisme aurait souhaité.

La conception aristotélicienne place, quant à elle, la source des mathématiques dans cette capacité que possède l'esprit humain d'extraire des formes du sensible et de les analyser sous l'angle de la quantité. Toutes les mathématiques relèvent donc d'une source empirique. L'efficacité des mathématiques a donc une explication triviale consistant à dire que nous ne faisons que nous servir en mathématiques des structures qui nous ont été livrées par le monde physique lui-même. Nous ne pouvons pas défendre entièrement une telle conception. Il est vrai qu'un grand nombre de concepts élémentaires des mathématiques nous ont été suggérés par le monde empirique. En revanche, il est évident que la grande majorité des théories mathématiques contemporaines ont été développées sans faire le moindre recours à des impulsions empiriques. Pour rendre compte de ce qui se passe effectivement dans les mathématiques contemporaines, il est important de reconnaître une certaine autonomie (relative) de la production des concepts mathématiques par rapport à tout apport directement empirique. L'aspect positif de la conception aristotélicienne réside dans le fait qu'elle souligne le fait que l'efficacité des mathématiques pourrait être due à une source liée à la description des régularités phénoménales. Cela est très important, car si nous devons admettre une certaine autonomie de l'acte créateur de nouvelles mathématiques, il ne faudrait pas sous-estimer les stimulations engendrées par les problèmes venus des sciences empiriques et qui soutiennent, de temps à autres, la progression de l'histoire des mathématiques.

Une autre explication de l'efficacité des mathématiques peut être trouvée dans la philosophie kantienne. Pour Kant les phénomènes sont constitués dans les formes a priori de la sensibilité que sont l'espace et le temps. Ceux-ci engendrent respectivement la géométrie et l'arithmétique. Tout phénomène (et pour Kant nous ne connaissons que le phénomène et non la « chose-en-soi », le noumène) présente donc une structure immédiatement homogène aux mathématiques, ce qui permet de résoudre le problème de l'efficacité qui nous occupe ici. L'apport positif de Kant réside dans le fait qu'il met en évidence le rôle constitutif du sujet mathématicien. Les mathématiques ne sont pas rapportées à un monde d'idées séparées, comme dans le platonisme, ou à des structures empiriques comme c'est le cas pour l'aristotélisme, mais bien plutôt à une activité d'un sujet. Cependant, l'explication kantienne possède certaines faiblesses. Tout d'abord les mathématiques ne sont pas vues comme une science qui invente de nouveaux concepts, leur spécificité propre consiste à « construire » les concepts dans les cadres spatiaux et temporels. Or aujourd'hui, il nous faut bien reconnaître que les mathématiques sont génératrices d'une série de concepts nouveaux dont l'origine est suggérée non pas de l'extérieur ou par l'entendement pur mais bien par les nécessités internes des formalismes eux-mêmes²³. Ensuite les formes

(23) C'est souvent en manipulant les formalismes que les mathématiciens en arrivent à suggérer de nouveaux concepts. Le concept est rarement le fruit d'une idée a priori issue d'une réflexion pure (non mathématique).

spatio-temporelles de Kant sont envisagées comme des structures rigides. Or la mathématisation des phénomènes fait souvent appel à des conceptions de l'espace et du temps qui se modifient profondément au cours de l'histoire. Il existe une véritable plasticité des cadres spatiaux et temporels utilisés dans la description des phénomènes²⁴. La perspective kantienne risque, si elle est radicalisée, de figer la dynamique qui est au cœur de la production mathématique contemporaine.

Le problème de l'efficacité des mathématiques ne peut être envisagé correctement au niveau d'une conception purement formaliste des mathématiques. En effet, suivant celle-ci, les mathématiques constituent un pur jeu formel défini à partir d'un certain nombre de symboles. Il est donc incompréhensible, à moins d'évoquer une mystérieuse harmonie préétablie, qu'un jeu arbitrairement défini puisse avoir des applications très précises dans un domaine des sciences empiriques. Tout se passerait comme si je définissais les règles d'un jeu de cartes et que les résultats des différentes parties servent à décrire subitement avec une précision extrême la charge de l'électron par exemple ! La thèse d'une harmonie préétablie, comme celle de l'existence d'un monde d'entités mathématiques séparées, relève de la science-fiction ou d'une métaphysique a priori plutôt que d'une méthodologie philosophique compatible avec les exigences de la démarche scientifique. Remarquons également que la conception purement formaliste des mathématiques est démentie par l'histoire. En effet, rarement les grands mathématiciens ont effectué des découvertes importantes en faisant simplement de la manipulation « aveugle » de symboles.

On pourrait aussi considérer, à la suite de Bohr²⁵, les mathématiques comme un « réservoir » de toutes les relations formalisées entre concepts. Les mathématiques seraient alors efficaces dans les sciences de la nature, par le simple fait qu'elles traduiraient formellement les relations entre mesures expérimentales. Cette conception est intéressante, mais elle se heurte à l'objection suivante. Pourquoi les théories inventées par les mathématiciens à une certaine époque, sont-elles souvent celles qui trouvent des applications en physique par exemple. Ou pour le dire autrement : pourquoi les mathématiques semblent-elles suivre de si près le développement de la physique. Si les mathématiques sont constituées par l'invention de relations arbitraires, la probabilité de tomber à une époque donnée sur une relation efficace serait très faible. Or c'est souvent le contraire qui se produit²⁶. Le point important de la conception de Bohr que l'on pourrait appeler : « relationnisme », est l'insistance sur le fait que les mathématiques ne donnent accès à aucun « objet » mais à des relations. Les mathématiques ne fournissent donc aucune ontologie²⁷. Le problème du relationnisme n'est donc pas situé au niveau de sa conception de la nature relationnelle

(24) Aujourd'hui, avec la géométrie non-commutative, on en arrive à concevoir des espaces qui sont très différents des espaces euclidiens ou non-euclidiens classiques (ces espaces, par exemple, peuvent très bien ne pas avoir de « points »). Le changement d'échelle des phénomènes peut induire un changement de la notion même d'espace physique.

(25) N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine* (traduit par E. Bauer et R. Omnès), Paris, Gauthier-Villars, 1972, pp. 102-103.

(26) Cette objection a été formulée de manière percutante par G. Münster dans son article : «The Role of Mathematics in Contemporary Physics» in *Philosophy, Mathematics and Modern Physics* (E. Rudolph, I.-O. Stamatescu, eds), Berlin, Springer, 1994, pp. 205-212.

(27) On sait qu'il n'existe aucune ontologie stable en mathématiques. Le statut d'objet est relatif à la théorie sur le fond duquel il prend sens. Ainsi un vecteur peut devenir tantôt un objet d'un espace vectoriel, tantôt un opérateur agissant sur des fonctions qui sont elles-mêmes des objets d'un espace fonctionnel donné. En théorie des catégories, un « objet » peut devenir une « flèche » et inversement.

des mathématiques, mais bien au niveau de l'analyse de la genèse et des caractéristiques des relations qui se sont avérées efficaces dans tels ou tels champs d'applications. Nous y reviendrons dans un instant.

Une dernière conception expliquant l'efficacité des mathématiques est le naturalisme. Il s'agit d'une position qui considère les mathématiques comme purs produits du cerveau du mathématicien susceptibles d'être analysés par la biologie ou par la psychologie cognitive. On peut distinguer deux grandes tendances : l'une associe les mathématiques à un apprentissage (aspect acquis) et l'autre les associe à des capacités innées évolutivement sélectionnées (aspect inné). Envisageons d'abord les approches du genre de celles proposées par Piaget et son école qui envisagent les mathématiques élémentaires comme fruit d'un apprentissage se réalisant lorsque l'enfant agit sur les objets usuels de son entourage²⁸. L'enfant dégage par cette action, entre autres, l'idée d'opération, puis d'opération inversible, etc. La thèse piagétienne souligne de manière judicieuse qu'il existe une source des mathématiques située dans un contact élémentaire avec le monde physique qui nous entoure. Cette thèse peut expliquer la réussite de l'application de concepts très élémentaires, mais certainement pas celle de théories évoluées.

On pourrait objecter que l'apprentissage apporte des matériaux de base pour construire les mathématiques et que les mathématiques « évoluées » sont obtenues par des abstractions successives : des « gestes sur des gestes » comme le disait Cavallès²⁹. Cependant, il semble bien que la base devant servir de point de départ à ces abstractions d'ordre de plus en plus élevées et qui serait offerte par un apprentissage élémentaire, ne soit pas suffisante pour penser la diversité et la richesse du corpus mathématique actuel.

Une objection plus forte vient des études récentes concernant le fonctionnement cérébral lié à l'activité calculatoire ou plus généralement mathématique. Stanislas Dehaene³⁰ a montré, en effet, que les opérations élémentaires de dénombrement n'étaient pas liées à un apprentissage, mais qu'elles étaient innées et qu'elles existaient probablement déjà chez certains animaux. Un certain nombre de concepts de base des mathématiques, dont celui de nombre, semblent donc être liés à des caractéristiques acquises par le cerveau au cours de l'évolution. C'est là, la deuxième forme de naturalisme dont nous parlions ci-dessus. Dehaene a montré que la capacité de dénombrement sélectionnée par l'évolution était relativement limitée. En fait, selon lui l'évolution n'a pas favorisé des capacités cérébrales donnant un accès facile aux longues suites d'inférences telles qu'on les trouve dans les théorèmes mathématiques actuels. La conception qui voudrait expliquer l'efficacité des mathématiques par leur avantage évolutif est donc non pertinente ou tout au moins restreinte à des mathématiques très élémentaires (les opérations concernant les premiers nombres naturels). Malgré les limites des deux formes de naturalisme, on peut dire que l'on possède ici une piste très importante pouvant mener à un renouveau des solutions classiques du problème de l'efficacité des mathématiques. Cette dernière pourrait de fait être liée à des capacités particulières du cerveau humain. Bien entendu, ceci supposerait

(28) J. Piaget, *La psychologie de l'intelligence*, Paris, Armand Colin, 1947 ; *L'épistémologie génétique*, Paris, P.U.F., 1972.

(29) J. Cavallès, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris, Hermann, 1981 (réédition), pp. 178-179.

(30) S. Dehaene, *La bosse des maths*, Paris, Odile Jacob, 1997.

que l'on admette que les mathématiques « ne soient plus que » des productions d'un sujet de chair et d'os et non pas les Idées d'un monde abstrait et séparé.

Dans les recherches de Dehaene, un point nous paraît crucial. Les zones cérébrales qui sont engagées dans les activités mathématiques sont précisément celles qui permettent les représentations spatiales. Le lien entre nombre et espace est d'ailleurs une des thèses centrales de Dehaene. Nous allons proposer maintenant une hypothèse qui se situe dans la ligne du naturalisme et qui lie l'efficacité des mathématiques à la réussite (relative) de la constitution du percept visuel.

Le processus de perception est basé sur une constitution d'images à partir de stimuli fournis par le monde extérieur³¹. Notre cerveau complète les données partielles qu'il reçoit par le canal de la rétine et fournit de ce fait une interprétation qui « fait voir »³². Ce processus de complétion est lié à la capacité que possède le cerveau d'établir un certain nombre de relations entre des données qui lui viennent de l'extérieur et des informations stockées en lui. Cette capacité relationnelle ne fonctionne pas arbitrairement, elle suit des critères (qui fixent le type de relations ou les éléments qui vont être mis en relations) que l'on peut cerner en étudiant les différentes illusions perceptives ou en analysant la manière dont on peut suggérer la perception de certains objets en imagerie virtuelle et dans les arts plastiques³³. Ces critères sont engendrés par le processus évolutif ou par l'apprentissage. Nous pourrions citer ici, par exemple, le « critère de proximité » qui fait que le système visuel groupe « naturellement » des points qui sont voisins les uns des autres ou encore le « critère de similitude » qui associe des formes similaires ou encore le « critère de la courbure constante » qui fait que nous prolongeons des lignes masquées par des obstacles en respectant leur rayon de courbure,... Ces critères montrent en fait que le système visuel fonctionne en établissant des relations qui sont caractérisées par des invariants spécifiques (invariants topologiques pour le critère de proximité, invariant géométrique pour le critère de similitude et pour le critère de courbure constante). Pour voir un objet ou pour en simuler la perception visuelle, il faut donc mettre en œuvre un ensemble de relations munies d'invariants spécifiques.

Remarquons aussi que la vision implique nécessairement, comme l'a bien mis en évidence la *Gestalt*, la possibilité de discriminer des objets et de les distinguer d'un « fond » sur lequel ils apparaissent. Il faut donc à l'origine une capacité de discrétisation (qui est le fondement de la notion de nombre) et la position d'une étendue (qui est le fondement de la topologie et de la géométrie). Si nous possédons une capacité de perception visuelle, nous pouvons conclure que nous possédons corrélativement des capacités mathématiques élémentaires (on devrait dire des capacités de dénombrement et de spatialisation élémentaires). De ce fait, la réussite de la perception visuelle élémentaire (le fait que je puisse « accrocher » une réalité macroscopique par le biais du système visuel) expliquerait alors simplement l'efficacité des mathématiques élémentaires.

(31) Nous renvoyons le lecteur à l'excellent livre de Ph. Meyer, *L'œil et le cerveau*, Paris, Odile Jacob, 1997.

(32) Cf. *The Perception of Visual Information* (W.R. Hendee, P.N.T. Wells, eds), Berlin, Springer, 1993-1997.

(33) Cf. par exemple, Leif H. Finkel et Paul Sajda, «Constructing Visual Perception. Artificial vision systems, built from neural networks, are revealing the rules of human visual processing», *American Scientist*, 82 (1994) 224-237. Une analyse classique du processus de perception visuelle et des illusions qui lui sont associées peut être trouvée dans l'ouvrage de R.L. Gregory, *Eye and Brain. The Psychology of Seeing*, Oxford University Press, 1998 (cinquième édition).

Ceci rejoindrait les thèses originales et fondamentales de Dehaene. Mais nous pouvons pousser la réflexion un peu plus loin. En effet, une analyse précise des mathématiques contemporaines montre que celles-ci peuvent être décrites comme un vaste « réservoir » de relations entre concepts formalisés (ces relations peuvent être définies en utilisant le langage des structures de Bourbaki ou celui des catégories par exemple). Mais, en général, ce ne sont pas les relations comme telles qui intéressent les mathématiciens. Des relations arbitraires entre symboles n'apporteraient que des mathématiques le plus souvent « vides »³⁴, pour reprendre le vocable de Dieudonné. Ce qui polarise l'attention du mathématicien ce sont les relations qui sont caractérisées par une grande variété d'invariants relatifs à diverses transformations (homomorphismes, homéomorphismes, foncteurs, transformations naturelles,...). Ces invariants peuvent être des nombres, des variétés, des structures... La richesse en invariants est d'ailleurs souvent un indice de « profondeur » de la théorie.

Le couple « relations-invariants » caractérisait la perception visuelle parce que c'était lui qui permettait la mise en évidence d'éléments de réalité macroscopique. Nous avons suggéré que les mathématiques élémentaires se situaient dans le droit fil de la perception visuelle. La description des mathématiques « évoluées » nous révèle en outre que l'activité du mathématicien est tout entière tendue vers la mise en évidence de relations riches en invariants spécifiques. Nous pourrions donc risquer l'idée suivant laquelle les mathématiques seraient en fait un prolongement naturel de l'activité cérébrale qui constitue les percepts visuels. Dans le cas des mathématiques élémentaires, celles-ci constituent en fait des représentations symboliques des objets directement perçus visuellement, sous la forme d'esquisses géométriques ou de caractéristiques numériques. Dans le cas des mathématiques en général, il semble bien que celles-ci soient la représentation symbolique des images mentales les plus générales au sens où les a définies Jean-Pierre Changeux³⁵. Le lien entre les mathématiques et les images mentales pourrait d'ailleurs fonctionner dans les deux sens. D'une part, les mathématiques fourniraient une représentation d'images mentales dans un domaine de symboles, c'est-à-dire une projection de ces images sur un espace symbolique mais, d'autre part, les mathématiques pourraient aussi être aussi considérées comme une méthodologie qui, par le langage symbolique, tenterait d'appréhender, de « révéler » des images mentales très abstraites, que la pensée poursuit parfois confusément sans pouvoir en acquérir une intuition directe et claire. L'idée serait ici que la mise en évidence d'un champ de relations riche en invariants est la trace, dans la représentation symbolique, d'une image mentale complexe qui ne peut être représentée ni par une analogie visuelle, ni peut être par une idée ou un concept simple.

Si nous passons en physique maintenant, nous voyons que la structure de l'activité théorique est aussi dominée par la recherche de couple « relations-invariants ». Toute la description du monde physique se réalise par l'intermédiaire de la recherche de grandeurs qui se conservent lorsqu'on effectue certaines transformations (dans le

(34) J. Dieudonné, « Mathématiques vides et mathématiques significatives » in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, sous la direction de M. Loi et R. Thom), Paris, Seuil, 1982, p. 37. Les mathématiques « vides » sont celles qui n'engendrent aucune idée nouvelle ou qui ne permettent pas de résoudre des problèmes importants ; autrement dit, des mathématiques qui n'accroissent pas qualitativement la connaissance.

(35) J.-P. Changeux, *L'homme neuronal*, Paris, Arthème Fayard, 1983, pp. 160-211.

cas où ces transformations sont des groupes, on parle alors de « symétries » ; dans le cas des groupes de Lie, on se souvient du théorème de Noether qui lie l'existence des symétries continues aux invariants caractéristiques : énergie, quantité de mouvement,...). Pourquoi en est-il ainsi ? La réponse est simple : la présence d'invariants associés à certaines transformations est la trace de l'existence même d'un « élément de réalité », d'une « chose » (res) qui possède une indépendance (relative). La covariance des lois (invariance de la forme des lois physiques) ou l'invariance de certaines grandeurs caractéristiques (qui est d'ailleurs la condition de possibilité de toute mesure³⁶) apparaissent en physique parce qu'elles traduisent justement des conditions nécessaires de la manifestation d'éléments de réalité.

Nous voyons donc que les mathématiques sont adaptées formellement à la physique, puisqu'elles sont essentiellement orientées vers la recherche de relations caractérisées (dans les cas les plus significatifs) par de riches classes d'invariants spécifiques. Nous avons justifié plus haut la réussite des mathématiques élémentaires en utilisant le fait qu'elles étaient couplées directement à la perception usuelle d'objets macroscopiques. Comment justifier maintenant l'efficacité de mathématiques plus évoluées, faisant appel à des concepts qui ne se relient plus directement à des caractéristiques d'objets perçus directement ? Nous pensons que cette justification n'est pas immédiate et naturelle. Autrement dit, il n'y a peut-être pas de justification naturelle et immédiate parce qu'il n'y a justement pas d'efficacité naturelle et immédiate dans les situations que traite la physique des particules élémentaires ou la cosmologie physique par exemple. Il y a bien une efficacité indiscutable et étonnante des mathématiques « évoluées » en physique, mais celle-ci n'est pas le fruit d'un miracle ou d'une harmonie préétablie et, de plus, elle ne se produit pas spontanément.

Lorsqu'on étudie en détail l'histoire des sciences modernes et contemporaines, on s'aperçoit vite qu'il existe un tissu très dense de relations bilatérales entre les mathématiques et la physique ou d'autres sciences naturelles et humaines. Les mathématiques possèdent des phases de développement autonomes mais celles-ci sont souvent entrecoupées de périodes d'interactions très fortes avec d'autres domaines de la connaissance qui contribuent à stimuler ou à restimuler certaines branches particulières des mathématiques. Aujourd'hui, les mathématiques permettent de décrire et de résoudre des problèmes posés par les physiciens, mais en plus, des descriptions de phénomènes empiriques peuvent servir également à donner des intuitions pour résoudre des problèmes de mathématiques pures³⁷. Il y a donc engrènement mutuel des mathématiques par les autres disciplines des sciences. Nous avons vu que les mathématiques étaient formellement adaptées au projet de la physique ou d'autres sciences, puisque celles-ci tentent de décrire des « éléments de réalité matérielle » et que les conditions nécessaires à la description de ces éléments sont exprimées par des couples « relations-invariants » qui font justement l'objet de la recherche mathématique. Au cours de son histoire, les mathématiques s'adosent à la connaissance empirique et petit-à-petit se laissent « in-former » par cette dernière. Il y a donc progressivement, au cœur des mathématiques, une sorte « d'infiltration empirique ». Autrement dit, progressivement, des structures relationnelles caractéristiques de la description formelle des phénomènes empiriques sont incluses dans le corps des

(36) G. Cohen-Tannoudji, M. Spiro, *La Matière Espace-Temps*, Paris, Fayard, 1986.

(37) Cf. M. Flato, *Le pouvoir des mathématiques*, Paris, Hachette, 1990.

connaissances mathématiques. On pourrait dire plus. En effet, cette « infiltration empirique » ne se fait pas naturellement, le mathématicien ou le physicien théoricien doit à tout moment « adapter » les mathématiques à la physique. On oublie souvent le travail de traduction, de réécriture qu'ont dû faire les scientifiques pour rendre les mathématiques efficaces³⁸. Il faut remarquer aussi que l'introduction de mathématiques évoluées en physique se fait souvent de manière progressive : les physiciens théoriciens développent les mathématiques à partir de théories qui ont déjà réussi et celles-ci les guident pour étendre pas-à-pas le formalisme. Il suffit de consulter le remarquable ouvrage de Madame Tonnelat sur les théories unitaires³⁹ pour se rendre compte des multiples essais qui ont été tentés, souvent infructueux, pour étendre le champ d'efficacité du formalisme mathématique de la relativité générale. L'efficacité n'est pas un miracle survenant d'un coup. Elle présuppose une lente démarche qui se fonde sur les formalismes ayant déjà fait leurs preuves et un processus complexe de « co-adaptation » impliquant des relations bilatérales entre les mathématiques et les sciences empiriques. Il n'y a donc pas d'explication possible de l'efficacité des mathématiques en sciences sans une perspective historique.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être résumés comme suit. (1) Les mathématiques sont constituées de domaines de relations symboliques caractérisées, si elles sont significatives, par des classes plus ou moins riches d'invariants. (2) La source des mathématiques est à chercher au niveau des objets mentaux les plus généraux (c'est ceux-là qui constituent le « monde des idées » du mathématicien platonicien). L'activité mathématique peut être alors décrite comme une constitution de représentations d'objets mentaux qui sont « visés » par le mathématicien (3) Ce processus de constitution pourrait être le prolongement de l'activité cérébrale qui, au niveau le plus élémentaire, fournit le percept visuel⁴⁰ et qui se couple progressivement à une capacité langagière symbolique. (4) L'efficacité des mathématiques élémentaires s'expliquerait par la réussite (relative) de la perception visuelle ordinaire. (5) L'efficacité des mathématiques « évoluées » s'expliquerait, en étendant la justification relative à celle des mathématiques « élémentaires ». On évoquerait pour ce faire, d'une part, le fait que celles-ci fournissent des couples « relations-invariants » nécessaires à la description formelle de tout « élément de réalité » et, d'autre part, une coadaptation historique progressive qui injecte dans les mathématiques des structures formelles caractéristiques de la description de phénomènes empiriques et qui « in-forme » les descriptions théoriques des sciences par les mathématiques existantes à une époque donnée. C'est cela qui expliquerait pourquoi les mathématiques semblent toujours suivre ou précéder d'assez près les développements des sciences empirico-formelles.

(38) Nous pensons par exemple au travail de Grossmann pour l'introduction de la géométrie différentielle en relativité générale, au travail de Cartan, Weyl, Van Der Waerden,... pour retrouver, par-delà l'équation de Dirac, la théorie des spineurs qui « dormait » dans les travaux de Cartan depuis 1913 ou encore au travail des physiciens qui ont reliés la théorie des ondelettes à celle des états cohérents et à celle de Caldéron et Sygmund,...

(39) M.-A. Tonnelat, *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

(40) Il serait intéressant de scruter de manière détaillée les incidences des lésions survenues dans les zones qui sont impliquées dans la constitution du percept visuel, sur la capacité à développer des activités mathématiques évoluées : démonstration de théorèmes, intuition abstraite,...

5. Un nouveau statut épistémologique pour la théorie des probabilités ?

Nous avons commencé notre contribution en soulignant l'aspect hybride de la théorie des probabilités et la résistance éprouvée par certains probabilistes de renom à résorber entièrement leur discipline dans la théorie abstraite de la mesure. La théorie des probabilités semble être un lieu de médiations, un champ théorique où se réalise un travail d'articulation et de coadaptation entre des théories formelles comme celle de la mesure et des descriptions de phénomènes où joue une dimension « aléatoire ». Dans un deuxième temps, notre recherche des sources de l'efficacité des mathématiques nous a fait entrevoir une situation complexe. Les mathématiques peuvent être efficaces, mais elles ne le sont qu'au prix d'un travail de traduction, d'adaptation où les concepts les plus formels sont infléchis pour rejoindre les intérêts des physiciens, des biologistes, des économistes... Ce travail d'adaptation n'est pas un travail purement abstrait, il demande une dynamique d'aller et retour des champs empiriques vers les champs plus formels. Il constitue souvent d'ailleurs une sorte de domaine boudé par les mathématiciens trop rigoureux, car lorsqu'on y entre, il faut accepter de faire usage de concepts qui ne sont peut-être pas encore bien définis (l'intégrale de chemins aujourd'hui et les « fonctions » de Dirac ou de Heaviside autrefois,...). A propos de tels domaines, on pourrait parler de « mathématiques expérimentales ». Les physiciens sont habitués à ce genre de mathématiques et leur nécessité pour le processus de coadaptation dont nous avons parlé devrait leur valoir une réelle attention de la part des historiens et philosophes des sciences.

La théorie des probabilités pourrait retrouver ici son véritable statut épistémologique. Si nous ne la regardons qu'à la lueur d'une perspective axiomatisante, il est clair qu'elle n'a pas d'existence indépendante de la théorie de la mesure. Par contre, si nous y voyons un domaine où se rencontrent différentes disciplines qui cherchent à approcher et à formuler le caractère « aléatoire » des phénomènes, alors la théorie des probabilités ne se réduit plus à la théorie de la mesure. Elle en devient plutôt la face « expérimentale », celle qui permet à la théorie de la mesure de devenir « efficace » en se reliant à la physique ou aux autres sciences. Nous rejoignons ici la conception qu'Armand Borel se fait des mathématiques. Pour lui les mathématiques ne peuvent être réduites au formalisme pur, elles se définissent plutôt par analogie avec la physique⁴¹ :

"I have often maintained, and even committed to paper on some occasions, the view that mathematics is a science, which, in analogy with physics, has an experimental and theoretical side, but operates in an intellectual world of objects, concepts and tools. Roughly speaking the experimental side is the investigation of special cases, either because they are of interest in themselves or because one hopes to get a clue to general phenomena, and the theoretical side is the search of general theorems".

Voilà nous semble-t-il le véritable lieu de la théorie des probabilités. Non pas un domaine en attente d'être éliminé par l'axiomatique, mais un lieu « expérimental ». L'expérimentation est précisément le point de rencontre entre le « réel » et la théorie. Les mathématiques

(41) A. Borel, "Responses to 'Theoretical Mathematics' ", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **30** (1994) 180.

« expérimentales » sont, de la même façon, le lieu de la rencontre entre le pur formalisme (les mathématiques « théoriques ») et les représentations théoriques issues des sciences humaines ou de la nature. La discussion sur le statut de la théorie des probabilités a le grand mérite de mettre en évidence ce caractère « expérimental » irréductible de l'activité mathématique dont certaines parties de l'œuvre de Witten⁴² en manifestent aujourd'hui l'extrême fécondité. On pourrait dire que la théorie des probabilités est la trace la plus manifeste de cette facette de l'activité mathématique. Le caractère médiateur, interfacial, de la théorie des probabilités et de la mathématique expérimentale en général constitue une des conditions nécessaires de l'efficacité des formalismes puisque c'est justement au niveau de ces théories que se réalisent les coadaptations que nous avons évoquées⁴³ et qui rendent les mathématiques homogènes à d'autres sciences. L'histoire de la théorie des probabilités apporte donc des éléments précieux à la tentative de résolution de l'énigme du problème de l'efficacité des mathématiques dans les sciences⁴⁴.

Les grands probabilistes avaient donc raison d'être dérangés par une réduction extrême de leur discipline à la théorie abstraite de la mesure. En effet, ce réductionnisme risquait tôt ou tard de couper leur discipline de sa véritable efficacité. Avec Armand Borel, ils nous invitent donc implicitement à reprendre à nouveaux frais l'épistémologie de la théorie des probabilités pour y découvrir les caractéristiques essentielles de cette « mathématique expérimentale », clef de voûte de l'étonnante capacité des mathématiques à mordre sur le réel empirique.

(42) D. Bennequin, « En marge de l'apologie de Witten », *Gazette des mathématiciens*, n° 50 (1991) 71-93.

(43) Aujourd'hui, le contact entre les théories et l'expérience se réalise souvent via des simulations qui se basent sur l'utilisation de processus stochastiques : simulations Monte-Carlo,...Ce qui montre bien ce rôle interfacial de la théorie des probabilités.

(44) Notre approche montre que le problème de l'efficacité des mathématiques n'est pas susceptible d'une solution si l'on oublie la dimension historique des productions mathématiques et si l'on sépare radicalement l'épistémologie des mathématiques d'une théorie neurophysiologique de la cognition.