2

Une onde de Dirac augmentée visant l'unification des interactions

Claude Daviau¹

Jacques Bertrand¹

Dominique Girardot²

¹ Fondation Louis de Broglie, France

² Ecole polytechnique, France

Résumé

Nous étudions une onde étendant l'onde quantique de l'électron (spineur de Dirac), dont les composantes représentent toutes les particules élémentaires, électron, neutrino, quarks avec 3 couleurs, et leurs antiparticules, pour la première génération, en interaction. L'équation d'onde est une extension de l'équation de Dirac de l'électron, avec un terme de masse. Elle est invariante relativiste sous un groupe élargi, et est invariante sous le groupe de jauge du modèle standard (exactement). Cette équation rend compte d'une bonne partie du modèle standard tout en ayant moins de paramètres libres. Nous réduisons aussi le fossé conceptuel entre théorie quantique des champs et relativité générale.

Abstract

An increased Dirac's wave aimed at unified interactions.

We study a wave spreading the quantic wave of the electron (Dirac spinor), which components represent all elementary particles, electron, neutrino, quarks with 3 colors, and their antiparticles, interacting for the first generation. The wave equation is an extension of the electron Dirac equation with a mass term. It is relativistic invariant under a widened group and invariant under the gauge model of the standard model (exactly). This equation reports a large part of the standard model by using less free parameters. We also reduce the conceptual gap between quantum fields theory and general relativity.

I. Introduction

La physique quantique a su rendre compte de tous les phénomènes électromagnétiques avec une excellente précision. Les interactions faibles, découvertes avec la radioactivité β , ont été rassemblées avec l'électromagnétisme dans le cadre d'un groupe de jauge non commutatif. Ces interactions faibles « violent la parité » d'espace, c'est-à-dire distinguent les ondes droites et les ondes gauches. Les interactions fortes reliant les quarks à l'intérieur des protons et neutrons des noyaux sont également interprétées à l'aide d'un groupe de jauge, symétrie dite de « couleur » [1]. Ces trois grands domaines de la physique, électromagnétisme, interactions faibles, interactions fortes, sont donc décrites à l'aide de modèles similaires. À côté de cela la Relativité Générale (RG), qui rend compte de la gravitation avec une précision tout aussi extraordinaire [2], utilise un cadre mathématique très différent : la physique quantique utilise des espaces vectoriels complexes alors que la RG se sert d'une variété à 4 dimensions réelles. La linéarité est essentielle en physique quantique, alors que la RG est totalement non linéaire.

Notre but est de rapprocher les quatre domaines en réécrivant l'onde de spin $\frac{1}{2}$ rendant compte de tous les fermions élémentaires de première génération, à la base du modèle standard de la physique quantique (MS), de manière aussi proche que possible de la RG.

2. Concepts

2.1 L'algèbre de Clifford de l'espace

La physique quantique, tout comme la physique de la gravitation, font partie maintenant de la physique des champs, avec des ondes. Qui dit ondes dit fonctions sinus et cosinus, et ces fonctions se calculent plus simplement avec la fonction exponentielle, que

l'on retrouve aussi comme outil essentiel dans les équations différentielles et dans les groupes de Lie. Pour l'exponentielle il faut savoir calculer des sommes et des produits pour avoir des puissances, donc il faut deux opérations, une addition et une multiplication. Les algèbres de Clifford [13] fournissent en fait les ingrédients justes nécessaires. L'algèbre de Clifford de l'espace physique, nommée Cl_3 , est simplement le cadre qui permet de calculer l'exponentielle d'un nombre, d'un vecteur et des autres objets composant l'algèbre. Les règles générales de calcul sont les mêmes que pour le calcul matriciel. Le produit de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie $\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + i\vec{u} \times \vec{v}$ où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire et $\vec{u} \times \vec{v}$ le produit vectoriel. $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ étant une base orthonormée de l'espace on a $\sigma_1\sigma_2\sigma_3=i$ lorsque la base est de sens direct et $\sigma_1\sigma_2\sigma_3=-i$ sinon. Et $i^2=-1$. On obtient la représentation matricielle usuelle de l'algèbre en prenant pour les σ_j les matrices de Pauli.

2.2 L'onde spinorielle

L'onde de spin $1/2$, pour tous les fermions élémentaires du MS (de première génération), est une fonction $\Psi=\Psi(x, t)$ à valeur dans l'algèbre de Clifford $Cl_{1,5}$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} l & r \\ g & b \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} e & n \\ \hat{n} & \hat{e} \end{pmatrix}; e = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}; \hat{e} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix}; n = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_2^* \\ 0 & \xi_1^* \end{pmatrix}; \\ c &= \begin{pmatrix} d_c & u_c \\ \hat{u}_c & \hat{d}_c \end{pmatrix}, c = r, g, b; d_c = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2dc}^* \\ 0 & \eta_{1dc}^* \end{pmatrix}; u_c = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{1uc}^* \\ 0 & \eta_{2uc}^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Elle comprend, par ses composantes, un électron et son neutrino, un proton ou un neutron avec ses trois quarks de couleur différente, un atome d'hydrogène et même un atome de deutérium. L'onde spinorielle contient aussi l'onde des antiparticules : la relation entre l'onde de l'électron e et l'onde du positron $\bar{e}$ est dans le modèle standard $e = -\bar{e}\sigma_1$. Depuis 1928 l'invariance relativiste de l'onde spinorielle se présente de manière fort différente de la covariance des lois physiques de la RG : pour tout élément $M \in Cl_3^*$ (ensemble des éléments inversibles de Cl_3) la transformation $D: x \mapsto x'$ telle que

$$x' = MxM^\dagger; e' = Me; n' = Mn; d'_c = Md_c; u'_c = Mu_c; \det(M) = re^{i\theta} = M\bar{M}; \bar{M} = \hat{M}^\dagger, \quad (2)$$

est une « dilatation » composée d'une transformation de Lorentz $L: x \mapsto x_1$ conservant l'orientation du temps et de l'espace par une homothétie $h: x_1 \mapsto x' = rx_1$ de rapport positif r . La transformation $f: M \mapsto D$ est un homomorphisme du groupe Cl_3^* qui est de dimension 8 dans le groupe D des dilatations, qui est seulement de dimension 7. Une dimension est perdue, celle justement de $i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ qui définit l'orientation de l'espace. La physique quantique utilise seulement le sous-groupe $SL(2, \mathbb{C})$ des M de déterminant 1, ce qui réduit le groupe $U(1)$ des $e^{i\theta}$ à ± 1 , parce qu'elle ne s'intéresse qu'aux transformations de Lorentz. Elle utilise en plus ici une chose qui n'est pas courante du point de vue mathématique, la relation réciproque d'une application non injective, ce qui s'appelle « représentation à deux valeurs ». Les deux valeurs sont ce qui reste du groupe chirale quand on l'écrase avec le postulat $\det(M)=1$. [3]

3. Equation d'onde

La forme invariante de l'équation d'onde unifiée que nous proposons s'écrit :

$$0 = \tilde{\Psi}(\underline{D}\Psi)L_{012} + m\rho\tilde{\Psi}\chi; \quad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{b} & \tilde{r} \\ \tilde{g} & \tilde{l} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$\underline{D}$ est la dérivée covariante [4]. Les termes ρ et χ en facteur de la masse sont ceux de [12], le tilde désigne le retourné. On a besoin de trois algèbres de Clifford : d'espace Cl_3 , d'espace-temps $Cl_{1,3}$ et de l'espace-temps élargi $Cl_{1,5}$. Elles utilisent les spineurs gauches et droits de Weyl et la représentation matricielle :

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \sigma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ \gamma_0 = \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, j=1,2,3; \quad N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{pmatrix}; \\ L_\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \mu=0,1,2,3; \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4)$$

avec

$$\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu; \quad \partial = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \hat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\partial} = L^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

4. Invariance relativiste

Dès l'équation d'onde de Pauli pour l'électron à spin, puis l'équation de Dirac, on a utilisé la transformation (2) mais dans des cas très particuliers : pour l'équation de Pauli on se restreint à des M appartenant à $SU(2)$ et alors la transformation D est une rotation.

Pour l'équation de Dirac on se restreint à $\det(M)=1$ ce qui donne pour D une transformation de Lorentz conservant l'orientation du temps et de l'espace (les autres transformations de Lorentz étaient ajoutées ensuite par des symétries dites P et T). La physique quantique relativiste pose donc

$$\Psi'(x') = \underline{N}\Psi(x); \quad \nabla = \bar{M}\nabla'\hat{M}; \quad \partial = \tilde{N}\partial'N; \quad \underline{\partial} = \tilde{\underline{N}}\underline{\partial}'\underline{N}; \quad (6)$$

qui permet d'obtenir pour tout M :

$$\tilde{\Psi}(\underline{D}\Psi)L_{012} = \tilde{\Psi}'(\underline{D}'\Psi')L_{012}; \quad m\rho = m'r\rho = m'\rho'; \quad \tilde{\Psi}\chi = \tilde{\Psi}'\chi'. \quad (7)$$

Or la condition $\det(M)=1$ n'a pas de justification géométrique, en dehors du fait qu'elle donne une partie du groupe de Lorentz, et elle n'est pas utilisée dans les relations (2) ou (6), qui fonctionnent de manière générale, sans elle. Elle est par contre utilisée dans (7) pour assurer la conservation de la masse propre. Nous avons donc adopté un point de vue général qui supprime la condition sur le déterminant et qui considère donc l'invariance relativiste comme un cas particulier d'une invariance plus contraignante sous le groupe Cl_3^* . Cette invariance plus large nous a permis de comprendre plusieurs aspects de la physique quantique qui n'avaient pas obtenu d'explication satisfaisante auparavant.

Mais il y a un prix à payer car la masse propre $m_0 = m\hbar/c$ et ρ seuls ne sont plus invariants sous le groupe plus large, le produit $m\rho$ est le seul invariant. Nous avons expliqué en [4][5] comment cette variance de m et cette invariance du seul produit $m\rho$ est liée à l'existence de la constante de Planck. L'écriture de l'équation d'onde sous la forme invariante (3) permet aussi de voir que la densité lagrangienne dont découle l'équation d'onde est très exactement la partie réelle de l'équation d'onde elle-même [6][7] : ceci justifie l'existence d'un principe lagrangien en physique.

5. Invariance de jauge

La dérivée covariante fonctionne exactement comme la dérivation covariante du modèle standard. Elle vérifie :

$$\underline{D}\Psi = \underline{\partial}\Psi + \frac{g_1}{2} \underline{B} \underline{P}_0(\Psi) + \frac{g_2}{2} \sum_{j=1}^3 \underline{W}^j \underline{P}_j(\Psi) + \frac{g_3}{2} \sum_{k=1}^8 \underline{G}^k \underline{i}\Gamma_k(\Psi) \quad (8)$$

L'opérateur $\underline{P}_0$ engendre le groupe chirale $U(1)$. Ce groupe traite différemment ondes droites et ondes gauches et différencie leptons et quarks. Les trois $\underline{P}_j, j=1, 2, 3$, ne changent que les ondes gauches et agissent de la même manière sur leptons et quarks. Les $\underline{i}\Gamma_k$ pour $k=1, \dots, 8$ engendrent le groupe de la chromodynamique. Ils n'agissent pas sur la partie leptonique de l'onde, donc les leptons sont insensibles aux interactions fortes, ils ne voient que la partie $U(1) \times SU(2)$ du groupe de jauge complet $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

6. Nos résultats

L'analyse de cette nouvelle onde et équation d'onde associée nous a permis d'obtenir les résultats nouveaux suivants (donnés ici sans justification, voir les références) :

- La densité lagrangienne est exactement la partie réelle de l'équation d'onde. C'est la raison de l'existence en physique d'un principe extrémal [4]-[6] et du traitement séparé des trois générations (les parties réelles se calculant différemment).
- L'invariance de forme sous CI_3^* et l'invariance de jauge sous le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ sont des symétries exactes [4].
- Pour l'atome d'hydrogène des solutions chirales existent avec les mêmes propriétés que pour l'équation de Dirac [8].
- La partie leptonique peut être adaptée pour rendre compte du monopôle magnétique leptonique de G. Lochak ([11] et [4] chapitre 8). Ce monopôle magnétique est donc capable d'interactions faibles.
- L'équation du second ordre de l'électron implique un angle de Weinberg-Salam de 30° . Le boson de la jauge électrique (photon) est donc exactement la somme du boson chiral $3/4g_1\bar{B}$ et du boson faible $1/4g_2\bar{W}^3$ [9].
- Les charges des quarks ont bien les valeurs $2/3|e|$ pour le quark u et $-1/3|e|$ pour le quark d (même chose pour les deux autres générations) [12].
- Les vecteurs d'espace-temps qui constituent les 12 bosons de jauge ont des composantes d'espace-temps qui font partie des densités tensorielles généralisant celles de l'onde de Dirac. L'additivité des potentiels, nécessaire pour obtenir les lois du mouvement des charges électriques, est équivalente au principe de Pauli [12]. Cette additivité s'applique aussi au courant de probabilité et donc aussi à la densité d'énergie de l'onde spinorielle.
- Nous ne supprimons pas la masse propre pour rendre compte des interactions faibles : nous n'avons pas besoin de brisure spontanée de la symétrie de jauge, qui est exacte. La masse restant présente dans l'équation d'onde, on peut y étudier la gravitation.

7. Inertie et gravité

L'équation d'onde fermionique utilise des coordonnées qui sont celles d'un référentiel inertiel. La transformation géométrique D , qui utilise un élément M fixe, indépendant de x , fait passer d'un référentiel inertiel à un autre. Si on relâche cette contrainte, il apparaît dans l'équation d'onde des potentiels d'inertie liés à la connexion. Ces potentiels d'inertie rendent compte de l'accélération centrifuge ou de l'accélération d'entraînement. Dans le cas d'une onde stationnaire, la densité de probabilité provient du principe d'équivalence : égalité entre l'intégrale à tout l'espace de la densité d'énergie de l'onde et l'énergie gravitationnelle $E=\hbar\nu$. La normalisation de l'onde en résulte.

Pour l'onde stationnaire le vecteur d'impulsion-énergie a une seule composante non nulle qui est l'énergie au repos. L'énergie-masse gravitationnelle fait partie d'un vecteur impulsion-énergie et c'est la densité spatiale de ces vecteurs qui constitue le tenseur symétrique d'impulsion-énergie de la RG ([4] chapitre 9), qui devrait pouvoir s'identifier au tenseur de courbure d'Einstein, faisant de l'équation d'Einstein avec second membre une identité ou une définition.

Remerciements

Merci à l'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences pour son invitation au colloque et aux éditeurs de ce livre.

Références

- [1] Scheck, F. *Electroweak and strong interactions*. Springer, 1996.
- [2] Wiltshire, D., Visser, M et Scott, S. *The Kerr spacetime: Rotating black holes in general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] Naïmark M.A. *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, Paris, 1962.
- [4] Daviau, C. et Bertrand, J. *The Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra*. World Scientific Publishing, Singapore, 2016.
- [5] Daviau, C. et Bertrand, J. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron - neutrino. *Journal of Modern Physics*, 2014, vol. **5**, n°11, p. 1001. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.511102>
- [6] Daviau, C. et Bertrand, J. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *Journal of Modern Physics*, 2014, vol. **5**, p. 2149. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518210>
- [7] Daviau, C. et Bertrand, J. Geometry of the standard model of quantum physics. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2015, vol. **3**, n°1, p. 46. <https://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.31007>
- [8] Daviau, C. et Bertrand, J. Left Chiral Solutions for the Hydrogen Atom of the Wave Equation for Electron+Neutrino. *Journal of Modern Physics*, 2015, vol. **6**, n°11, p. 2149. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.611166>
- [9] Daviau, C. et Bertrand, J. Electro-Weak Gauge, Weinberg-Salam Angle. *Journal of Modern Physics*, 2015, vol. **6**, n°14, p. 2080. <https://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614215>

[10] Daviau, C. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 2015, vol. **40**, n°1, p. 113.

[11] Lochak, G. Wave equation for a magnetic monopole. *International journal of theoretical Physics*, 1985, vol. **24**, n°10, p.1019.

[12] Daviau, C. et Bertrand, J. Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 2015, vol. **40**, n°1, p. 181.

[13] Casanova, G. *L'algèbre vectorielle*, Que sais-je, PUF, 1976.