Krystyna Miśta

**SUR LES INÉGALITÉS BILINÉAIRES DE GRUNSKY
POUR LES COUPLES DE FONCTIONS
QUI N'EMPIÈTENT PAS L'UNE SUR L'AUTRE, I**

Introduction

Soient f et g des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle unité $U = \{z: |z| < 1\}$, de la forme

$$(1) \quad \begin{aligned} f(z) &= b_{1f}(z + a_{2f}z^2 + \dots), \\ g(z) &= b_{1g}(z + a_{2g}z^2 + \dots), \end{aligned} \quad b_{1f} \cdot b_{1g} \neq 0,$$

telles que

$$(2) \quad f(z) \cdot g(\zeta) \neq 1 \quad \text{pour tout couple } z, \zeta \in U.$$

Les fonctions $f(z)$, $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ sont dites fonctions n'empiétant pas l'une sur l'autre, car, en vertu de (2), $f(U) \cap h(U) = \emptyset$. Les couples (f, g) ont été étudiés par Alenicyn [3, 4], Lebedev [13, 14, 15, 16], Jenkins [10, 11, 12], Aharonov [1, 2] et dernièrement par Hummel [8], qui leur a donné le nom de couples univalents de Aharonov, nom dont nous nous servirons dans la suite de ce travail; l'ensemble de tous ces couples sera noté A . Ces couples ont été étudiés au moyen de méthodes analogues à celles que l'on utilise dans la théorie des fonctions univalentes. Ainsi, Alenicyn, Lebedev et Aharonov ont appliqué la méthode des aires, introduite par Gronwall; Jenkins a employé la méthode des métriques extréma-

les et de la différentielle quadratique, enfin Lebedev a utilisé une méthode variationnelle, dérivée de la méthode variationnelle de Golusin, pour évaluer une fonctionnelle définie sur A.

Dans ce travail nous étudions une autre fonctionnelle, définie sur A et se rattachant étroitement à la "fonctionnelle de Grunsky".

En 1939 Grunsky [7] a établi une condition nécessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe. Dans le cas des fonctions univalentes dans le cercle unité U, ce résultat peut être énoncé comme il suit:

Si $f(z) = b_1(z + a_2 z^2 + \dots)$, $b_1 \neq 0$, est une fonction holomorphe dans le cercle U et si l'on pose

$\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} z^m \zeta^n$, la fonction $f(z)$ est univalente dans U si et seulement si

$$(\alpha) \quad \left| \sum_{n,m=1}^N \sqrt{nm} c_{mn} x_n x_m \right| \leq \sum_{n=1}^N |x_n|^2$$

por toute suite finie de nombres complexes $x_1, x_2, \dots, x_N$.

Les fonctionnelles $\left| \sum_{n,m=1}^N \sqrt{nm} c_{mn} x_n x_m \right|$ ou $\operatorname{Re} \left(\sum_{n,m=1}^N \sqrt{nm} c_{mn} x_n x_m \right)$ sont appelées les fonctionnelles de Grunsky.

Désignant par C la matrice infinie dont les éléments sont $\sqrt{nm} c_{mn}$ et par x le vecteur-colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, on peut

mettre les inégalités (α) sous la forme $|x' C x| \leq \|x\|^2$, où $\|\dots\|$ désigne la norme de la matrice.

En 1940 Golusin [5] et plus tard d'autres auteurs (Wolinger (1951) [24], Jenkins (1964) [10], Milin (1964) [18], Pommerenke (1964) [22]) ont trouvé un autre ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe. Ces conditions peuvent être mises sous la forme

$$(\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^N \sqrt{nm} c_{mn} x_m \right|^2 \leq \sum_{m=1}^N |x_m|^2$$

ou sous la forme matricielle

$$\| C x \| \leq \| x \| ,$$

où $x_1, \dots, x_N$ est une suite quelconque finie de nombres complexes.

Les conditions (β) semblaient d'abord plus fortes que celle de Grunsky, en ce sens que, comme l'a remarqué Jenkins [10], on peut immédiatement en déduire les conditions (α) en appliquant l'inégalité de Schwarz ^(*); c'est pourquoi les inégalités (β) sont dites parfois les conditions fortes de Grunsky, tandis que (α) - les conditions faibles de Grunsky. Dernièrement, on a d'ailleurs démontré (Pederson (1968) [19]) que, inversement, il est possible de déduire (α) de (β) en appliquant uniquement un calcul matriciel formel.

L'"exactitude" de (β) , c'est-à-dire l'existence de fonctions, pour lesquelles (β) se transforment en égalités, découle directement de la démonstration de ces inégalités comme condition nécessaire d'univalence d'une fonction. En effet, l'égalité y a lieu simultanément pour toute fonction univalente dans le cercle U pour laquelle $C \setminus f(U)$ est un ensemble de mesure plane nulle. La démonstration de l'"exactitude" de (α) exigeait l'application d'une méthode variationnelle - elle a été donnée par Schiffer en 1948 [23]. Il a, en effet, prouvé que pour tout système de nombres complexes $x_1, \dots, x_N$ il existe une fonction univalente dans U , pour laquelle (α) deviennent des égalités.

Des inégalités semblables à celles de Grunsky pour les couples de Aharonov ont été données par Alenicyan, Lebedev,

(*) Les conditions (β) sont évidemment équivalentes aux conditions (α) , puisque chacune d'elles est équivalente à celle d'univalence d'une fonction.

Jenkins, Aharonov et Hummel dans les travaux cités ci-dessus. Nous mentionnerons ici les inégalités établies par ce dernier.

Soit $(f, g) \in A$. Définissons d'abord les coefficients $c_{mn}(f)$ et $k_{mn}(f, g)$ comme il suit

$$(3) \quad \log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn}(f) z^m \zeta^n,$$

$$(4) \quad \log(1 - f(z)g(\zeta)) = \sum_{m, n=1}^{\infty} k_{mn}(f, g) z^m \zeta^n.$$

Les coefficients sont normalisés de la façon suivante:

$$\begin{aligned} x_{mn}(f, g) &= \sqrt{mn} k_{mn}(f, g), \\ \gamma_{mn}(f) &= \sqrt{mn} c_{mn}(f), \\ (5) \quad \gamma_{0n}(f) &= \sqrt{n} c_{0n}(f), \\ \gamma_{m0}(f) &= \sqrt{m} c_{m0}(f), \\ \gamma_{00}(f) &= c_{00}(f), \end{aligned}$$

où $m, n = 1, 2, \dots$

Avec ces coefficients on construit les matrices infinies

$$C(f) = (\gamma_{mn}(f))_{m, n=1}^{\infty},$$

$$K(f, g) = (x_{mn}(f, g))_{m, n=1}^{\infty}.$$

Nous introduisons encore le vecteur-colonne infini

$$C_0(f) = (\gamma_{m0}(f))_{m=1}^{\infty}.$$

Remarquons que les séries (3) et (4) sont convergentes dans le bicylindre $U \times U$, les coefficients (5) sont bien

déterminés, sauf au plus γ_{00} , cependant $\operatorname{Re} \gamma_{00} = \log |b_{1f}|$ est défini univoquement. On voit aussi que les matrices $C(f)$ et $C(g)$ sont symétriques et que

$$(6) \quad K(f, g) = K'(g, f) ,$$

où K' désigne la matrice transposée.

Dans [8] Hummel a établi les deux théorèmes suivants (th.I p.223, th.II p.232) dans lesquels il a donné pour les couples de Aharonov des inégalités analogues aux inégalités de Grunsky, fortes et faibles, pour les fonctions univalentes dans U .

En formulant ces théorèmes nous utiliserons la notation matricielle.

T h é o r è m e I. Soit $(f, g) \in A$; pour tout nombre complexe λ et pour tout couple x, y de vecteurs de dimension finie et de coordonnées complexes on a l'inégalité

$$(7) \quad \begin{aligned} & 2\lambda^2 \operatorname{Re} \{ \gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g) \} + 2\operatorname{Re} \bar{\lambda} \{ C'_0(f)y - C'_0(g)x \} + \\ & + \| \lambda C_0(f) + K(f, g)x + C(f)y \|^2 + \| -\lambda C_0(g) + C(g)x + \\ & + K(g, f)y \|^2 \leq \| x \|^2 + \| y \|^2 . \end{aligned}$$

T h é o r è m e II. Soit $(f, g) \in A$; pour tout nombre réel λ et pour quatre vecteurs quelconques x, y, u, v de dimension finie et de coordonnées complexes on a l'inégalité

$$(7') \quad \begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ \lambda^2 [\gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g)] + \lambda [C'_0(f)u - C'_0(g)v - C'_0(g)x + C'_0(f)y] + \\ & + u'K(f, g)x + u'C(f)y + v'C(g)x + v'K(g, f)y \} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} [\| u \|^2 + \| v \|^2 + \| x \|^2 + \| y \|^2] . \end{aligned}$$

Les inégalités (7) et (7') font intervenir la multiplication non formelle d'une matrice infinie par une matrice-colonne (vecteur) de dimension $n \times 1$, où n est fini. Il faut évidemment compléter cette dernière matrice par des zéros pour en faire une matrice infinie.

La question de l'"exactitude" de (7) est résolue comme il suit.

Si le couple $(f, g) \in A$ est tel que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$ est de mesure plane nulle, alors on a dans (7) le signe d'égalité pour tout λ complexe et pour des vecteurs finis x, y quelconques; inversement, si pour un λ complexe et pour des vecteurs finis x, y tels que $|\lambda| + \|x\| + \|y\| > 0$ on a dans (7) pour le couple $(f, g) \in A$ le signe d'égalité, alors la mesure plane de l'ensemble $\mathbb{C} \setminus (f(U) \cup h(U))$ est nulle.

Quant à la question de l'"exactitude" de (7') elle est, autant que nous sachions, encore ouverte.

Le but principal de ce travail est d'établir l'"exactitude" d'un cas particulier des (7'). En effet, remplaçons dans (7') u par x , v par y , y par x et x par y . Tenant compte de (6), on tire de (7') l'inégalité

$$(8) \quad \operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 [\gamma_{00}'(f) + \gamma_{00}(g)] + 2\lambda [C_0'(f)x - C_0'(g)y] + \right. \\ \left. + 2x'K(f, g)y + x'C(f)x + y'C(g)y \right\} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Or, on peut montrer que pour tout $\lambda \neq 0$ réel et pour deux vecteurs quelconques x, y , de dimensions finies et de coordonnées complexes, il existe un couple $(f, g) \in A$ pour lequel (8) devient une égalité. De plus, si $(f, g) \in A$ est un tel couple, alors pour certaines valeurs de λ, x, y , cette fois sans supposer que $\lambda \neq 0$, ce couple doit satisfaire à un système d'équations fonctionnelles (cp.p.95), d'où il résulte en particulier, si $\lambda = 0$, que f et g sont des fonctions algébriques. La méthode de démonstration est variationnelle. La fonctionnelle dont nous étudions l'extremum

est le premier membre de (8). Les variations que nous utiliserons ont été données pour la première fois dans le travail de Lebedev (1957 [14], p.1070,1071). On les obtient en appliquant la méthode que Golusin a proposée pour construire la variation des fonctions univalentes dans U (cp.Pommerenke [21] p.183), ou bien en appliquant la "variation de Löwner" (Pommerenke [21] p.185). Dans la suite de ce travail nous appliquerons les résultats mentionnés ci-dessus pour établir une limitation de deux simples couples (f,g) , ne dépendant que de quelques premiers termes du développement (1). Nous y établissons non seulement une limitation exacte de ces fonctionnelles, mais aussi nous déterminons tous les couples extrémaux, c'est-à-dire les couples pour lesquels ces fonctionnelles admettent leurs valeurs maximales.

1. Considérons maintenant le premier membre de (8) comme une fonctionnelle Φ définie sur l'ensemble F des couples (f,g) , où f et g sont des fonctions holomorphes dans U , admettant à l'origine des développements de la forme (1). Soit

$$(9) \quad \Phi = \Phi(f,g) = \operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 [\gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g)] + 2\lambda [C'_0(f)x - C'_0(g)y] + 2x'K(f,g)y + x'C(f)x + y'C(g)y \right\}.$$

Observons que dans ce cas aussi on peut définir les coefficients $k_{mn}(f,g)$, $c_{mn}(f)$ et $c_{mn}(g)$ au moyen des formules (3), (4), bien que les développements dans les seconds membres de (3), (4) puissent converger uniquement dans un voisinage du point $z=0$, $\zeta=0$, et non pas dans tout le bicylindre $U \times U$. Évidemment on a $A \subset F$. Munissons l'ensemble F d'une structure topologique en admettant que $(f_n, g_n) \rightarrow (f_0, g_0)$ si $f_n \rightarrow f_0$, $g_n \rightarrow g_0$ presque uniformément dans U . Notre tâche sera de calculer le maximum de la fonctionnelle (9) dans l'ensemble A .

Nous allons maintenant démontrer que la fonctionnelle (9) admet un maximum dans l'ensemble A pourvu que $\lambda \neq 0$.

Observons d'abord que si dans l'inégalité (8) on met $x=y=0$, $\lambda = 1$, elle prend la forme

$$(10) \quad |b_{1f} b_{1g}| \leq 1.$$

Soit $((f_n, g_n))_{n=1}^{\infty}$, où $(f_n, g_n) \in A$. En vertu de (10), il existe une suite partielle $((f_{n_K}, g_{n_K}))$ telle que

$$(11) \quad b_{1f_{n_K}} b_{1g_{n_K}} \rightarrow B, \quad 0 \leq |B| \leq 1.$$

Considérons alors les suites

$$(11') \quad \hat{f}_k = \frac{1}{b_{1f_{n_K}}} f_{n_K}, \quad \hat{g}_k = \frac{1}{b_{1g_{n_K}}} g_{n_K}, \quad k=1, 2, \dots$$

Les fonctions $\hat{f}_k$ et $\hat{g}_k$ appartiennent à la classe S de toutes les fonctions f univalentes dans U , normalisées par les conditions $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Les suites $((\hat{f}_k))_{k=1}^{\infty}$, $((\hat{g}_k))_{k=1}^{\infty}$ sont donc des suites compactes, c'est-à-dire que l'on peut en extraire des suites qui convergent aussi presque uniformément vers des fonctions de la classe S . Supposons que ces suites elles-mêmes soient convergentes et posons

$$(12) \quad \hat{f}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k, \quad \hat{g}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{g}_k.$$

Il est évident que $\hat{f}_0, \hat{g}_0 \in S$. Revenons maintenant à la fonctionnelle (9). On voit aisément que

$$\Phi \left(\left(b_{1f} b_{1g} \frac{f}{b_{1f}}, \frac{g}{b_{1g}} \right) \right) = \Phi((f, g))$$

et, en particulier,

$$\Phi((f_{n_k}, g_{n_k})) = \Phi((b_{1f_{n_k}} b_{1g_{n_k}} \hat{f}_k, \hat{g}_k)).$$

En tenant compte de ce qui précède et du fait que les suites (11) et (12) sont convergentes et que la fonctionnelle (9) est continue dans F , on voit que dans le cas, où $B \neq 0$ on a

$$(13) \quad \Phi((f_{n_k}, g_{n_k})) \rightarrow \Phi((B\hat{f}_0, \hat{g}_0)) < +\infty$$

et que, de plus, $(B\hat{f}_0, \hat{g}_0) \in A$. En effet, comme $(f_{n_k}, g_{n_k}) \in A$, il en résulte que $(b_{1f_{n_k}} b_{1g_{n_k}} \hat{f}_k, \hat{g}_k) \in A$, et, comme A est évidemment fermé dans F , on a aussi $(B\hat{f}_0, \hat{g}_0) \in A$. Dans le cas, où $B = 0$ et $\lambda \neq 0$, il vient

$$(14) \quad \Phi((f_{n_k}, g_{n_k})) \rightarrow -\infty,$$

tandis que, si $B = 0$ et $\lambda = 0$, on a

$$(15) \quad \Phi((f_{n_k}, g_{n_k})) \rightarrow \operatorname{Re} \{x' C(\hat{f}_0)x + y' C(\hat{g}_0)y\} < +\infty.$$

Il résulte des relations (13), (14) et (15) que l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle Φ dans l'ensemble A est borné supérieurement. Nous allons montrer que, si $\lambda \neq 0$, la borne supérieure est atteinte dans l'ensemble A , c'est-à-dire que Φ admet dans A un maximum. Dans ce but posons

$$M = \sup_{(f, g) \in A} \Phi((f, g)), \quad |M| < \infty,$$

et soit $(f_n, g_n) \in A$, $n=1, 2, \dots$, une suite de couples de Aharonov telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi((f_n, g_n)) = M$ et (n_k) une suite partielle telle que le produit $b_{1f_{n_k}} b_{1g_{n_k}}$ soit convergent.

En désignant la limite de cette suite par B , on aura $B \neq 0$,

sinon, en vertu de (14), on aurait $\Phi((f_{n_k}, g_{n_k})) \rightarrow -\infty \neq M$. Un raisonnement analogue au précédent mène à la conclusion que $\Phi((B\hat{f}_0, \hat{g}_0)) = M$, où $(B\hat{f}_0, \hat{g}_0) \in A$ et $\hat{f}_0, \hat{g}_0$ sont définies par (11) et (12). Dans le cas, où $\lambda = 0$, nous ne savons pas si la fonctionnelle Φ admet sa borne supérieure dans A .

2. Supposons que pour le couple (f, g) la fonctionnelle (9) admette sa valeur maximale dans A . Désignons par F_0 l'ensemble dont les éléments sont les couples de fonctions quelconques holomorphes dans U et s'annulant à l'origine. Cet ensemble sera un espace linéaire sur le corps des nombres complexes si l'on définit les opérations comme d'ordinaire, c'est-à-dire

$$(\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2),$$

$$\lambda(\varphi_1, \psi_1) = (\lambda\varphi_1, \lambda\psi_1), \quad \lambda \text{ complexe}, (\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in F_0.$$

Dans F_0 définissons encore la topologie induite par la convergence presque uniforme, de même que dans F . Donc F_0 est un espace topologique et linéaire, et même linéairement topologique, et l'on a $A \subset F \subset F_0$.

Soit maintenant Φ une fonctionnelle à valeurs réelles, définie sur un ensemble ouvert $\mathcal{G} \subset F_0$. Supposons que pour un couple $(f, g) \in \mathcal{G}$ on ait la relation

$$(16) \quad \Phi(f + \lambda h, g + \lambda k) = \Phi(f, g) + \lambda \operatorname{Re} \Lambda_{(f, g)}(h, k) + o(\lambda), \lambda > 0,$$

où $(h, k) \in F_0$, $\Lambda_{(f, g)}(h, k)$ est une fonctionnelle linéaire et continue dans F_0 , le terme $o(\lambda)/\lambda$ tend vers zéro lorsque $\lambda \rightarrow 0$ presque uniformément dans U . On voit aisément que la fonctionnelle $\Lambda_{(f, g)}$ est la dérivée complexe au sens de Gateaux de la fonctionnelle Φ . On voit aussi facilement que la fonctionnelle (9), définie dans l'ensemble ouvert $F \subset F_0$, admet en tout point $(f, g) \in A$ une dérivée complexe au sens de Gateaux. Nous la calculerons plus loin.

Soit $(f, g) \in A$. La famille de couples $\{(f_\lambda, g_\lambda)\}$, $0 \leq \lambda < \lambda_0$, sera dite variation du couple (f, g) , si $(f_0, g_0) = (f, g)$, $(f_\lambda, g_\lambda) \in A$ et si les limites

$$(17) \quad \dot{f}_0(z) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda(z) \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f_\lambda(z) - f(z)}{\lambda},$$

$$(17') \quad \dot{g}_0(z) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} g_\lambda(z) \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{g_\lambda(z) - g(z)}{\lambda}$$

existent au sens de la convergence presque uniforme dans U et $(\dot{f}_0, \dot{g}_0) \in F_0$.

Si pour la fonctionnelle Φ on a la relation (16), il résulte de (17) et (17') que

$$(18) \quad \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi(f_\lambda, g_\lambda) \right|_{\lambda=0} = \text{Re } \Lambda_{(f, g)}((\dot{f}_0, \dot{g}_0)),$$

et si l'on sait de plus que (f, g) réalise le maximum de la fonctionnelle Φ dans A , il vient de (16) que l'on doit avoir $\text{Re } \Lambda_{(f, g)}((\dot{f}_0, \dot{g}_0)) \leq 0$. Ce résultat peut être formulé sous la forme du théorème suivant.

T h é o r è m e 1. Soit Φ une fonctionnelle réelle, définie sur A et admettant pour le couple (f, g) son maximum. Admettons encore que Φ est définie dans un voisinage $K_{(f, g)} \subset F_0$ du couple (f, g) et que pour un couple quelconque $(h, k) \in F_0$ ait lieu la relation

$$\Phi((f + \lambda h, g + \lambda k)) = \Phi((f, g)) + \lambda \text{Re } \Lambda_{(f, g)}((h, k)) + o(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

où $\Lambda_{(f, g)}((h, k))$ est une fonctionnelle linéaire et continue dans l'espace F_0 et $o(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ presque uniformément dans U ; alors on a, pour toute variation $\{(f_\lambda, g_\lambda)\}$ du couple (f, g) , l'inégalité

$$(19) \quad \text{Re } \Lambda_{(f, g)}((\dot{f}_0, \dot{g}_0)) \leq 0.$$

3. Nous allons maintenant trouver quelques variations dont il a été question dans l'introduction. Ce sont les familles suivantes:

(α) $(f_{\lambda}^{(1)}, g_{\lambda}^{(1)})$, où

$$f_{\lambda}^{(1)}(z) = f(z) + \lambda a \frac{f(z)}{f(z) - f(z_0)} - \lambda a \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)^2} \right) \frac{zf'(z)}{z - z_0} + \\ + \lambda \bar{a} \left(\frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 \overline{f'(z_0)^2}} \right) \frac{z^2 \overline{f'(z)}}{1 - \bar{z}_0 z} + o(\lambda),$$

$$g_{\lambda}^{(1)}(z) = g(z) - \lambda a \frac{g^2(z)}{1 - g(z)f(z_0)} + o(\lambda), \quad z_0 \in U \text{ quelconque,}$$

a quelconque complexe;

(α') $(f_{\lambda}^{(2)}, g_{\lambda}^{(2)})$, où

$$f_{\lambda}^{(2)}(z) = f(z) - \lambda a \frac{f^2(z)}{1 - f(z)g(z_0)} + o(\lambda), \\ g_{\lambda}^{(2)}(z) = g(z) + \lambda a \frac{g(z)}{g(z) - g(z_0)} - \lambda a \left(\frac{g(z_0)}{z_0 g'(z_0)^2} \right) \frac{zg'(z)}{z - z_0} + \\ + \lambda \bar{a} \left(\frac{\overline{g(z_0)}}{z_0 \overline{g'(z_0)^2}} \right) \frac{z^2 \overline{g'(z)}}{1 - \bar{z}_0 z} + o(\lambda),$$

$z_0 \in U$ quelconque, a quelconque complexe;

(β) $(f_{\lambda}^{(3)}, g_{\lambda}^{(3)})$, où

$$f_{\lambda}^{(3)}(z) = f(z) - \lambda z f'(z) \frac{z_0 + z}{z_0 - z} + o(\lambda), \\ g_{\lambda}^{(3)}(z) = g(z), \quad z_0 \in \partial U \text{ quelconque;}$$

(β') $(f_{\lambda}^{(4)}, g_{\lambda}^{(4)})$, où

$$f_{\lambda}^{(4)}(z) = f(z),$$

$$g_{\lambda}^{(4)}(z) = g(z) - \lambda z g'(z) \frac{z_0 + z}{z_0 - z} + o(\lambda), \quad z_0 \in \partial U \text{ quelconque.}$$

Nous aurons encore besoin de la simple variation:

$$(\gamma) \quad (f_{\lambda}^{(5)}, g_{\lambda}^{(5)}), \quad \text{où}$$

$$(f_{\lambda}^{(5)})(z) = f(e^{\mp i\lambda} z), \quad g_{\lambda}^{(5)}(z) = g(z);$$

$$(\gamma') \quad (f_{\lambda}^{(6)}, g_{\lambda}^{(6)}), \quad \text{où}$$

$$f_{\lambda}^{(6)}(z) = f(z), \quad g_{\lambda}^{(6)}(z) = g(e^{\pm i\lambda} z).$$

Des variations (α) et (α') , de la condition (19) et du fait que a est quelconque complexe résultent les égalités suivantes pour le couple extrémal (f, g) :

$$(20) \quad \Lambda_{(f,g)} \left(\left(\frac{f(z)}{f(z)-f(z_0)} - \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)^2} \right) \frac{zf'(z)}{z-z_0} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{g^2(z)}{1-g(z)f(z_0)} \right) \right) + \bar{\Lambda}_{(f,g)} \left(\left(\frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 f'(z_0)^2} \right) \frac{z^2 f'(z)}{1-\bar{z}_0 z}, 0 \right) = 0.$$

$$(20') \quad \Lambda_{(f,g)} \left(\left(-\frac{f^2(z)}{1-f(z)g(z_0)}, \frac{g(z)}{g(z)-g(z_0)} - \left(\frac{g(z_0)}{z_0 g'(z_0)^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{zg'(z)}{z-z_0} \right) \right) + \bar{\Lambda}_{(f,g)} \left(0, \left(\frac{\overline{g(z_0)}}{z_0 g'(z_0)^2} \right) \frac{z^2 g'(z)}{1-\bar{z}_0 z} \right) = 0,$$

tandis que les variations (β) et (β') mènent aux inégalités

$$(21) \quad \operatorname{Re} \Lambda_{(f,g)} \left(\left(-zf'(z) \frac{z_0 + z}{z_0 - z}, 0 \right) \right) \leq 0,$$

$$(21') \quad \operatorname{Re} \Lambda_{(f,g)} \left(\left(0, -zg'(z) \frac{z_0 + z}{z_0 - z} \right) \right) \leq 0.$$

Des variations (γ) et (γ') et de la condition (19) on tire enfin les égalités:

$$(22) \quad \operatorname{Re} \Lambda_{(f,g)} \left((izf'(z), 0) \right) = 0,$$

$$(22') \quad \operatorname{Re} \Lambda_{(f,g)} \left((0, izg'(z)) \right) = 0.$$

4. Revenons maintenant à la fonctionnelle (9). Posant

$$\mu_x(z) = \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{j} x_j}{z^j}, \quad \mu_y(z) = \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{j} y_j}{z^j} \text{ et } \Gamma_1 = \{z: |z| = r_1\},$$

$\Gamma_2 = \{z: |z| = r_2\}$, où l'on prend $0 < r_2 < 1$ quelconque et $0 < r_1 < 1$ assez petit pour que $\min_{|z|=r_2} |f(z)| > \max_{|z|=r_1} |f(z)|$,

et $r_1, r_2 < |z_0|$, on observe que

$$C'_0(f)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \log \frac{f(z)}{z} \mu_x(z) \frac{dz}{z},$$

$$x'C(f)x = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \mu_x(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

$$x'K(f,g)y = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \log(1-f(z)g(\zeta)) \mu_x(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

On peut donc écrire la fonctionnelle Φ sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi((f,g)) &= \operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 \left(\gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g\lambda) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \log \frac{f(z)}{z} \mu_x(z) \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \log \frac{g(z)}{z} \mu_y(z) \frac{dz}{z} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{1}{2}\Gamma_1} \log(1-f(z)g(\zeta)) \mu_x(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \\
 & + \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{1}{2}\Gamma_1} \log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \mu_x(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \\
 & + \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{1}{2}\Gamma_1} \log \frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} \mu_y(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} \Big\} .
 \end{aligned}$$

et la fonctionnelle linéaire $\Lambda_{(f,g)}((h,k))$ de la formule (16) prend la forme

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \Lambda_{(f,g)}((h,k)) &= \lambda^2 \left(\frac{b_{1h}}{b_{1f}} + \frac{b_{1k}}{b_{1g}} \right) + \\
 & + 2\lambda \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{h(z)}{f(z)} \mu_x(z) \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}\Gamma_2} \frac{k(z)}{g(z)} \mu_y(z) \frac{dz}{z} \right) + \\
 & + \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{1}{2}\Gamma_1} \frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)} \mu_x(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \\
 & + \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{1}{2}\Gamma_1} \frac{k(z)-k(\zeta)}{g(z)-g(\zeta)} \mu_y(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \\
 & - \frac{2}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{1}{2}\Gamma_1} \frac{f(z)k(\zeta)+g(\zeta)h(z)}{1-f(z)g(\zeta)} \mu_x(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} .
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant transformer les relations (20)-(22), (20')-(22'). La première des égalités (20) prendra la forme

$$(24) \quad - \frac{1}{f(z_0)} \left(\lambda - (f(z_0)) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_x(z)}{f(z)-f(z_0)} \frac{dz}{z} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_y(z)}{1-g(z)f(z_0)} \left(\frac{dz}{z} \right) \Big)^2 + \frac{1}{z_0} \left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)^2} \right) \left[A_0 + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{1}{z_0^n} + \bar{A}_n z_0^n \right) \right] = 0,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
(25) \quad A_0 &= \lambda^2 + 2\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)} \mu_x(z) \frac{dz}{z} + \\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\gamma_2 \gamma_1} \frac{zf'(z) - \zeta f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} \mu_x(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \\
& - \frac{2}{(2\pi i)^2} \iint_{\gamma_2 \gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)(1-f(z)g(\zeta))} \mu_x(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= 2\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^{n+1} f'(z)}{f(z)} \mu_x(z) \frac{dz}{z} + \\
& + \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\gamma_2 \gamma_1} \frac{z^{n+1} f'(z) - \zeta^{n+1} f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} \mu_x(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \\
& - \frac{2}{(2\pi i)^2} \iint_{\gamma_2 \gamma_1} \frac{z^{n+1} f'(z)}{f(z)(1-f(z)g(\zeta))} \mu_x(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad n=1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

et γ désigne une circonférence quelconque $\{z: |z| = r\}$, où $0 < r < 1$.

Nous allons maintenant prouver que

$$(26) \quad A_n = 0 \text{ si } n > 2N,$$

donc que l'expression qui figure entre crochets dans (24) est une fonction rationnelle de la variable z_0 du degré $2N$ au plus. En effet,

$$(27) \quad \int_{\gamma} \frac{z^{n+1} f'(z)}{f(z)} \mu_X(z) \frac{dz}{z} = 0 \quad \text{si } n > N.$$

Observons ensuite que, si ζ est fixé et tel que $\zeta \in \Gamma_2$, on a

$$\begin{aligned} (28) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{z^{n+1} f'(z) - \zeta^{n+1} f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} \mu_X(z) \frac{dz}{z} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\zeta^{n+1} f'(\zeta) - z^{n+1} f'(z)}{f(\zeta)} \sum_{k=0}^N \left(\frac{f(z)}{f(\zeta)} \right)^k \mu_X(z) \frac{dz}{z} = \\ & = \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(z)^k \mu_X(z) \frac{dz}{z} \frac{\zeta^{n+1} f'(\zeta)}{f(\zeta)^{k+1}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} z^{n+1} f'(z) f(z)^k \mu_X(z) \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{f(\zeta)^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Intégrant maintenant (28) par rapport à ζ le long de la conférence Γ_2 on obtient

$$\begin{aligned} (29) \quad & \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \frac{z^{n+1} f'(z) - \zeta^{n+1} f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} \mu_X(z) \mu_X(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ & = \sum_{k=0}^N \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(z)^k \mu_X(z) \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\zeta^{n+1} f'(\zeta)}{f(\zeta)^{k+1}} \mu_X(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} z^{n+1} f'(z) f(z)^k \mu_X(z) \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{1}{f(\zeta)^{k+1}} \mu_X(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right], \end{aligned}$$

tandis que

$$(30) \quad \int_{\Gamma_1} z^{n+1} f'(z) f(z)^k \mu_X(z) \frac{dz}{z} = 0$$

pour $n > N$ et tout $k=0, \dots, N$, et

$$\int_{\frac{\Gamma}{2}} \frac{z^{n+1} f'(z)}{f(z)^{k+1}} \mu_x(z) \frac{dz}{z} = 0,$$

lorsque $n-k > N$, et, comme $k \leq N$, on a

$$(31) \quad \int_{\frac{\Gamma}{2}} \frac{z^{n+1} f'(z)}{f(z)^{k+1}} \mu_x(z) \frac{dz}{z} = 0$$

pour $n > 2N$ et tout $k=0, \dots, N$. De (29), (30) et (31) on tire

$$(32) \quad \iint_{\frac{\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{2}} \frac{z^{n+1} f'(z) - \zeta^{n+1} f'(\zeta)}{f(z) - f(\zeta)} \mu_x(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$$

pour $n > 2N$ et tout $k=0, \dots, N$. En procédant de même avec le dernier terme du second membre de (25) on voit que

$$(33) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\frac{\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{2}} \frac{z^{n+1} f'(z)}{f(z)(1-f(z)g(\zeta))} \mu_x(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$$

pour $n > N$.

Les égalités (27), (32) et (33) prouvent que l'on a bien (26). Nous écrirons la relation (24) sous la forme

$$(34) \quad \left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^2 \left[-\lambda + (f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_x(z)}{f(z) - f(z_0)} \frac{dz}{z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_y(z)}{1 - f(z_0)g(z)} \frac{dz}{z} \right]^2 = A_0 + \sum_{n=1}^{2N} (A_n z_0^{-n} + \bar{A}_n \bar{z}_0^n).$$

En procédant de même dans le cas de la variation (20'), on est amené à la relation

$$(35) \quad \left(\frac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)} \right)^2 \left[\lambda + g(z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_y(z)}{g(z) - g(z_0)} \frac{dz}{z} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_x(z)}{1-g(z_0)f(z)} \frac{dz}{z} \Bigg]^2 = B_0 + \sum_{n=1}^{2N} \left(B_n z_0^{-n} + \bar{B}_n z_0^n \right),$$

où

$$\begin{aligned} B_0 &= \lambda^2 - 2\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zg'(z)}{g(z)} \mu_y(z) \frac{dz}{z} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \frac{zg'(z) - \zeta g'(\zeta)}{g(z) - g(\zeta)} \mu_y(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \\ &- \frac{2}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \frac{zg'(z)}{g(z)(1-g(z)f(\zeta))} \mu_y(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \\ B_n &= -2\lambda \int_{\gamma} \frac{z^{n+1}g'(z)}{g(z)} \mu_y(z) \frac{dz}{z} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \frac{z^{n+1}g'(z) - \zeta^{n+1}g'(\zeta)}{g(z) - g(\zeta)} \mu_y(z) \mu_y(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \\ &- \frac{2}{(2\pi i)^2} \iint_{\Gamma_2 \Gamma_1} \frac{z^{n+1}g'(z)}{g(z)(1-g(z)f(\zeta))} \mu_y(z) \mu_x(\zeta) \frac{dz}{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \\ &n = 1, 2, \dots, 2N. \end{aligned}$$

Moyennant les variations (γ) et (γ') on trouve ensuite que $\text{Im } A_0 = \text{Re } \Lambda_{(f,g)}((-izf'(z), 0))$, $\text{Im } B_0 = \text{Re } \Lambda_{(f,g)}((0, -izg'(z)))$, ce qui donne, en tenant compte de (22) et (22'),

$$(36) \quad \text{Im } A_0 = \text{Im } B_0 = 0.$$

Utilisant enfin les variations (β) et (β') on obtient, après un simple calcul,

$$\Lambda_{(f,g)} \left(\left(-zf'(z) \frac{z_0 + z}{z_0 - z}, 0 \right) \right) = - \left(A_0 + 2 \sum_{n=1}^{2N} A_n z_0^{-n} \right),$$

$$\Lambda(f, g) \left(\left(0, -zg'(z) \frac{z_0 + z}{z_0 - z} \right) \right) = - \left(B_0 + 2 \sum_{n=1}^{2N} B_n z_0^{-n} \right),$$

où $z_0 \in \partial U$, et, en tenant compte de (21), (21') et (26), on trouve

$$(37) \quad A_0 + \sum_{n=1}^{2N} (A_n z_0^{-n} + \bar{A}_n z_0^n) = \operatorname{Re} \left(A_0 + 2 \sum_{n=1}^{2N} A_n z_0^{-n} \right) \geq 0$$

et de même

$$(38) \quad B_0 + \sum_{n=1}^{2N} (B_n z_0^{-n} + \bar{B}_n z_0^n) \geq 0.$$

5. Nous allons maintenant transformer les premiers membres des égalités (34), (35) en profitant des relations bien connues

$$(39) \quad \begin{cases} \log(1 - tf(z)) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (F_{fm}(t) - mc_{m0}(f)) z^m, \\ \log(1 - tg(z)) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (F_{gm}(t) - mc_{m0}(g)) z^m, \end{cases}$$

où F_{fm} et F_{gm} sont respectivement les m -ièmes polynômes de Faber pour les fonctions $1/f$ et $1/g$. En tenant compte de (3) et (4), on tire des relations (39) les égalités

$$(40) \quad F_{fm}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^m} - \sum_{n=1}^{\infty} mc_{mn}(f) z^n,$$

$$(41) \quad F_{gm}(f(z)) = - \sum_{n=1}^{\infty} mk_{mn}(g, f) z^n + mc_{m0}(g),$$

ainsi que des égalités analogues pour $F_{gm}\left(\frac{1}{g(z)}\right)$ et $F_{fm}(g(z))$.
Dérivant (39) par rapport à t on obtient

$$\frac{1}{1 - tf(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t F'_{fm}(t) z^m,$$

$$\frac{1}{1 - tg(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} t F'_{gm}(t) z^m,$$

et, en posant dans la première de ces relations $t = \frac{1}{f(z_0)}$, dans la seconde $t = f(z_0)$, on a

$$(42) \quad \frac{f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{f(z_0)} F'_{fm} \left(\frac{1}{f(z_0)} \right) z^m,$$

$$\frac{1}{1 - f(z_0)g(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} f(z_0) F'_{gm}(f(z_0)) z^m.$$

En tenant compte de (42) et en remplaçant z_0 par $z \in U$, on obtient la relation (34) sous la forme

$$(43) \quad \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 \left(\lambda + \sum_{m=1}^N \left(\frac{x_m}{\sqrt{m}} \frac{1}{f(z)} F'_{fm} \left(\frac{1}{f(z)} \right) - \frac{y_m}{\sqrt{m}} f(z) F'_{gm}(f(z)) \right) \right)^2 =$$

$$= A_0 + \sum_{m=1}^{2N} \left(A_m z^{-m} + \bar{A}_m z^m \right)$$

et, après des transformations semblables, la relation (35) prend la forme

$$(44) \quad \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} \right)^2 \left(\lambda - \sum_{m=1}^N \left(\frac{y_m}{\sqrt{m}} \frac{1}{g(z)} F'_{gm} \left(\frac{1}{g(z)} \right) - \frac{x_m}{\sqrt{m}} g(z) F'_{fm}(g(z)) \right) \right)^2 =$$

$$= B_0 + \sum_{m=1}^{2N} \left(B_m z^{-m} + \bar{B}_m z^m \right).$$

En tenant compte de (43), (44) on voit immédiatement que les seconds membres de ces relations n'admettent dans U que des racines d'ordre pair et, grâce à la symétrie par rapport à ∂U , il en est de même avec des racines situées à l'extérieur de U . Les racines situées sur ∂U sont aussi paires - ce qui résulte du fait que les seconds membres de (43), (44) sont

non négatifs sur ∂U . Extrayant les racines des deux membres de (43) et (44) on obtient

$$(45) \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} \left(\lambda + \sum_{m=1}^N \left(\frac{x_m}{\sqrt{m}} \frac{1}{f(z)} F_{fm} \left(\frac{1}{f(z)} \right) - \frac{y_m}{\sqrt{m}} f(z) F_{gm}(f(z)) \right) \right) = \\ = Q_1(z),$$

$$(46) \quad \frac{zg'(z)}{g(z)} \left(\lambda - \sum_{m=1}^N \left(\frac{y_m}{\sqrt{m}} \frac{1}{g(z)} F_{gm} \left(\frac{1}{g(z)} \right) - \frac{x_m}{\sqrt{m}} g(z) F_{fm}(g(z)) \right) \right) = \\ = Q_2(z),$$

où $Q_1(z)$ et $Q_2(z)$ sont des fonctions rationnelles, n'admettant des pôles d'ordre N au plus qu'aux points $0, \infty$ et réelles sur la circonférence ∂U ; elles sont donc de la forme

$$Q(z) = \frac{E_N^{(j)}}{z^N} + \dots + E_0^{(j)} + \dots + \overline{E_N^{(j)}} z^N, \quad j = 1, 2,$$

où $E_0^{(j)}$ sont réels. Égalant les termes libres des seconds membres de (45), (46) et tenant compte de (40) et (41), on constate que $E_0^{(j)} = \lambda$ pour $j=1, 2$.

Intégrant maintenant (45) et (46), après avoir divisé par z , on obtient

$$(47) \quad \lambda \log \frac{f(z)}{z} - \sum_{m=1}^N \left(\frac{x_m}{\sqrt{m}} F_{fm} \left(\frac{1}{f(z)} \right) + \frac{y_m}{\sqrt{m}} F_{gm}(f(z)) \right) = P_1(z) + G_1,$$

$$(48) \quad \lambda \log \frac{g(z)}{z} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{y_m}{\sqrt{m}} F_{gm} \left(\frac{1}{g(z)} \right) + \frac{x_m}{\sqrt{m}} F_{fm}(g(z)) \right) = P_2(z) + G_2,$$

où

$$P_j(z) = \frac{-E_N^{(j)}}{N} \cdot \frac{1}{z^N} + \dots + \frac{-E_1^{(j)}}{z} + \overline{E_1^{(j)}} z + \dots + \overline{E_N^{(j)}} z^N, \quad j=1, 2;$$

les $P_j(z)$ sont donc des fonctions purement imaginaires sur U .

On constate ensuite que

$$(49) \quad \operatorname{Re} C_2 = -\operatorname{Re} C_1.$$

Pour prouver (49) nous allons d'abord démontrer que $\partial f(U) \cap \partial h(U) \neq \emptyset$. Sinon on aurait $\overline{f(U)} \cap \overline{h(U)} = \emptyset$. Mais, d'autre part, $\overline{C} - (f(U) \cup h(U)) = \overline{C} - (f(U) \cup h(U))$, étant un ensemble de mesure plane nulle, ne contient pas de points intérieurs, donc il en est de même (avec $\overline{C} - (f(U) \cup h(U)) = \overline{C} - (\overline{f(U)} \cup \overline{h(U)})$), mais cet ensemble est ouvert, donc il est vide, d'où l'on tire $\overline{C} = \overline{f(U)} \cup \overline{h(U)}$, ce qui est impossible, puisque l'espace $\overline{C}$ est connexe. Soit maintenant $w_0 \in \partial f(U) \cap \partial h(U)$. Il existe donc deux suites de points $z_n, \zeta_n \in U$, $n=1, 2, \dots$, telles que

$$(50) \quad f(z_n) \rightarrow w_0 \longleftarrow h(\zeta_n) = \frac{1}{g(\zeta_n)},$$

et telles que $z_n \rightarrow z^*, \zeta_n \rightarrow \zeta^*, z^*, \zeta^* \in \partial U$. Mettant enfin $z = z_n$ dans (47) et $\zeta = \zeta_n$ dans (48) et tenant compte de (50) et du fait que $\operatorname{Re} P_1(z^*) = \operatorname{Re} P_2(\zeta^*) = 0$, on obtient (49).

Profitant des relations (47), (48), ainsi que (40) et (41), on peut calculer les constantes C_1 et C_2 . On trouve ainsi

$$(51) \quad C_1 = \lambda c_{00}(f) - \sum_{m=1}^N y_m \sqrt{m} c_{m0}(g),$$

$$(52) \quad C_2 = \lambda c_{00}(g) + \sum_{m=1}^N x_m \sqrt{m} c_{m0}(f).$$

Revenons maintenant à (47) et (48). Comme les parties principales des premiers membres de (47), (48) sont, respectivement, de la forme $-\sum_{m=1}^N \frac{x_m}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{z^m}$ et $\sum_{m=1}^N \frac{y_m}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{z^m}$, les relations (47) et (48) prendront la forme

$$(53) \quad \lambda \log \frac{f(z)}{z} - \sum_{m=1}^N \left(\frac{x_m}{\sqrt{m}} F_{fm} \left(\frac{1}{f(z)} \right) + \frac{y_m}{\sqrt{m}} F_{gm}(f(z)) \right) =$$

$$= - \sum_{n=1}^N \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{z^n} - \frac{\bar{x}_n}{\sqrt{n}} z^n \right) + C_1,$$

$$(54) \quad \lambda \log \frac{g(z)}{z} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{y_m}{\sqrt{m}} F_{gm} \left(\frac{1}{g(z)} \right) + \frac{x_m}{\sqrt{m}} F_{fm}(g(z)) \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(\frac{y_n}{\sqrt{n}} \frac{1}{z^n} - \frac{\bar{y}_n}{\sqrt{n}} z^n \right) + C_2.$$

Égalons maintenant les coefficients de z^n , $n=1,2,\dots$, dans les deux membres de (53) et (54), profitant encore des relations (40), (41); nous obtenons ainsi

$$(55) \quad \lambda c_{no}(f) - \sum_{m=1}^N \left(\frac{-x_m}{\sqrt{m}} mc_{mn}(f) - \frac{y_m}{\sqrt{m}} mk_{mn}(g,f) \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\bar{x}_n}{\sqrt{n}} & n = 1, \dots, N, \\ 0 & n = N+1, \dots, \end{cases}$$

$$(56) \quad \lambda c_{no}(g) + \sum_{m=1}^N \left(\frac{-y_m}{\sqrt{m}} mc_{mn}(g) - \frac{x_m}{\sqrt{m}} mk_{mn}(f,g) \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\bar{y}_n}{\sqrt{n}}, & n = 1, \dots, N, \\ 0, & n = N+1, \dots \end{cases}$$

Multiplions ensuite (55) par $\sqrt{n} x_n, n=1,\dots,N$, (56) par $-\sqrt{n} y_n, n=1,\dots,N$, et ajoutons, en tenant compte des définitions des matrices $C_o(f)$, $C_o(g)$, $C(f)$, $C(g)$, $K(f,g)$, $K(g,f)$ et de l'égalité (6) donc on obtient

$$(57) \quad \lambda (C'_o(f)x - C'_o(g)y) + x'C(f)x + y'C(g)y +$$

$$+ 2x' K(f,g)x = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

En multipliant les relations (51) et (52) par λ et en les ajoutant on obtient

$$\lambda (C_1 + C_2) = \lambda^2 (c_{00}(f) + c_{00}(g)) + \lambda (C'_0(f)x - C'_0(g)y),$$

d'où, en tenant compte de (49), on tire

$$(58) \quad \operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 (c_{00}(f) + c_{00}(g)) + \lambda (c'_0(f)x - c'_0(g)y) \right\} = 0.$$

Les égalités (57) et (58) pour le couple (f, g) , qui maximalise la fonctionnelle (9), permettent de calculer la valeur maximale de cette fonctionnelle. On obtient ainsi

$$(59) \quad \Phi((f, g)) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Les résultats obtenus ci-dessus peuvent être énoncés sous la forme du théorème suivant.

T h é o r è m e 2. Si (f, g) est le couple pour lequel la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \Phi((f, g)) = \operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 (\gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g)) + 2\lambda (C'_0(f)x - C'_0(g)y) + \right. \\ \left. + x'C(f)x + y'C(g)y + 2x'K(f, g)y \right\}, \end{aligned}$$

où λ est un scalaire réel et x, y sont des vecteurs complexes à N dimensions, admet une valeur maximale dans A , alors on a les conclusions suivantes:

1° les fonctions f, g satisfont au système d'équations

$$\begin{aligned} (60) \quad \sum_{m=1}^N \left(\frac{x_m}{\sqrt{m}} F_{fm} \left(\frac{1}{f(z)} \right) + \frac{y_m}{\sqrt{m}} F_{gm} (f(z)) \right) - \lambda \log \frac{f(z)}{z} = \\ = \sum_{m=1}^N \left(\frac{x_m}{\sqrt{m}} z^{-m} - \frac{\bar{x}_m}{\sqrt{m}} z^m \right) + D_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (61) \quad & \sum_{m=1}^N \left(\frac{y_m}{\sqrt{m}} F_{gm} \left(\frac{1}{g(z)} \right) + \frac{x_m}{\sqrt{m}} F_{fm}(g(z)) \right) + \lambda \log \frac{g(z)}{z} = \\
 & = \sum_{m=1}^N \left(\frac{y_m}{\sqrt{m}} z^{-m} - \frac{\bar{y}_m}{\sqrt{m}} z^m \right) + D_2,
 \end{aligned}$$

où $\operatorname{Re} D_1 = \operatorname{Re} D_2$;

2° les équations (60) et (61) entraînent les égalités

$$\begin{aligned}
 \lambda (C'_0(f)x - C'_0(g)y) + x'C(f)x + y'C(g)y + 2x'K(f,g)y = \\
 = \|x\|^2 + \|y\|^2,
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 (\gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g)) + \lambda (C'_0(f)x - C'_0(g)y) \right\} = 0;$$

$$3^0 \quad \Phi((f,g)) = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

4° dans le cas, où $\lambda \neq 0$, il existe un couple (f,g) maximisant la fonctionnelle $\Phi(f,g)$, c'est-à-dire que dans ce cas l'inégalité

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left\{ \lambda^2 (\gamma_{00}(f) + \gamma_{00}(g)) + 2\lambda (C'_0(f)x - C'_0(g)y) + \right. \\
 \left. + x'C(f)x + y'C(g)y + 2x'K(f,g)y \right\} \leq \|x\|^2 + \|y\|^2
 \end{aligned}$$

est exacte.

6. Exemples

(a) Mettant $\lambda = 1$, $x=0$, $y=0$ dans (9), on obtient la fonctionnelle

$$\Phi((f,g)) = \log |b_1(f)b_1(g)|.$$

En vertu du théorème 2, 4°, cette fonctionnelle admet dans A un maximum et, en vertu de 3°, ce maximum est 0, donc

$$|b_1(f)b_1(g)| = 1.$$

De la conclusion 1° il résulte que, si (f, g) est le couple qui réalise ce maximum, on a $\log \frac{f(z)}{z} = -D_1$, $\log \frac{g(z)}{z} = D_2$, $\operatorname{Re} D_1 = \operatorname{Re} D_2$. On en tire $f(z) = e^{-\alpha} e^{i\beta_1} z$, $g(z) = e^{\alpha} e^{i\beta_2} z$, où

α, β_1, β_2 sont des nombres réels. Il n'y a pas d'autres couples extrémaux et tout couple de cette forme est un couple extrémal. Ce même résultat a été établi par Jenkins au moyen de la méthode de la différentielle quadratique dans [9], p.195-196.

(b) Mettant $\lambda = 0$, $x=1$, $y=1$ dans (9), on obtient la fonctionnelle

$$(62) \quad \Phi((f, g)) = \operatorname{Re} \left\{ c_{11}(f) + c_{11}(g) - 2k_{11}(f, g) \right\}.$$

Supposons que le couple (f, g) réalise le maximum de cette fonctionnelle dans A ; alors, en vertu du théorème 2,2°, les fonctions f et g satisfont aux équations

$$(63) \quad F_{f1} \left(\frac{1}{f(z)} \right) - F_{g1}(f(z)) = \frac{1}{z} - z + D_1,$$

$$(64) \quad -F_{g1} \left(\frac{1}{g(z)} \right) + F_{f1}(g(z)) = -\frac{1}{z} + z + D_2,$$

où $\operatorname{Re} D_1 = \operatorname{Re} D_2$ et

$$(65) \quad \Phi((f, g)) = 2.$$

Un calcul facile donne

$$F_{f1}(w) = b_1(f)w + a_2(f), \quad F_{g1}(w) = b_1(g)w + a_2(g),$$

$$c_{11}(f) = a_3(f) - a_2^2(f), \quad c_{11}(g) = a_3(g) - a_2^2(g),$$

$$k_{11}(f, g) = -b_1(f)b_1(g).$$

En vertu de (62) et (65), on a donc pour tout couple $(f, g) \in A$ l'inégalité

$$(65') \quad \operatorname{Re} \{ (a_3(f) - a_2^2(f)) + (a_3(g) - a_2^2(g)) + 2b_1(f)b_1(g) \} \leq 2,$$

et pour le couple (f, g) qui réalise le maximum de la fonctionnelle (62) on a, en vertu de (63) et (64), les relations

$$b_1(f) \frac{1}{f(z)} - b_1(g)f(z) + a_2(f) - a_2(g) = \frac{1}{z} - z + D_1,$$

$$-b_1(g) \frac{1}{g(z)} + b_1(f)g(z) - a_2(g) + a_2(f) = -\frac{1}{z} + z + D_2.$$

Comme $D_1 = -a_2(g)$, $D_2 = a_2(f)$, les relations (63) et (64) prennent la forme

$$(66) \quad b_1(f) \frac{1}{f(z)} - b_1(g)f(z) = \frac{1}{z} - z - a_2(f),$$

$$b_1(g) \frac{1}{g(z)} - b_1(f)g(z) = \frac{1}{z} - z - a_2(g).$$

Posant

$$f_1(z) = \frac{1}{b_1(f)} f(z), \quad g_1(z) = \frac{1}{b_1(g)} g(z), \quad \beta = b_1(f)b_1(g),$$

on tire de (66)

$$(67) \quad \frac{1}{f_1(z)} - \beta f_1(z) = \frac{1}{z} - z - a_2(f),$$

$$\frac{1}{g_1(z)} - \beta g_1(z) = \frac{1}{z} - z - a_2(g),$$

d'où l'on obtient ensuite

$$a_3(f) - a_2^2(f) = a_3(g) - a_2^2(g) = 1 - \beta.$$

Déterminant $f_1(z)$ à partir de la première des relations (67), on a

$$(68) \quad f_1(z) = \frac{1}{2\beta z} \left(z^2 + a_2(f)z - 1 + \sqrt{(z^2 + a_2(f)z - 1)^2 + 4\beta z^2} \right),$$

où la branche du radical est celle qui prend la valeur 1 pour $z=0$. Le second membre de (68) est une fonction univoque dans le voisinage de $z=0$. Pour qu'elle puisse être prolongée sur U comme fonction holomorphe et univoque, il faut et il suffit que tous les points de ramification du radical soient situés dans le complémentaire de U . La décomposition

$$\begin{aligned} (z^2 + a_2(f)z - 1)^2 + 4\beta z^2 &= \\ &= (z^2 + (a_2(f) - 2i\sqrt{\beta})z - 1)(z^2 + (a_2(f) + 2i\sqrt{\beta})z - 1) \end{aligned}$$

montre que pour que le radical n'admette pas de points de ramification dans U il faut et il suffit que toutes les racines des équations

$$z^2 + (a_2(f) - 2i\sqrt{\beta})z - 1 = 0,$$

$$z^2 + (a_2(f) + 2i\sqrt{\beta})z - 1 = 0$$

soient sur la circonférence ∂U ; on voit aisément que parmi ces racines doivent se trouver les nombres de la forme $e^{i\varphi}$, $-e^{-i\varphi}$, $e^{i\psi}$, $-e^{-i\psi}$, d'où il résulte encore que

$$(69) \quad a_2(f) = -2i(\sin\varphi - \sqrt{\beta}) \quad \text{et} \quad a_2(f) = -2i(\sin\psi + \sqrt{\beta}).$$

Il résulte de (69) que $\sin\varphi = \sin\psi + 2\sqrt{\beta}$, d'où il s'ensuit, en particulier, que $\beta > 0$, et si l'on admet $\sqrt{\beta} > 0$, on a $-1 + \sqrt{\beta} \leq \sin\varphi + \sqrt{\beta} \leq 1 - \sqrt{\beta}$. On trouve finalement que la fonction $w = f_1(z)$ satisfait à l'équation

$$(70) \quad \frac{1}{w} - \beta w = \frac{1}{z} - z + 2i(\sin\psi + \sqrt{\beta}),$$

où ψ est un nombre quelconque tel que

$$(71) \quad -1 + \sqrt{\beta} \leq \sin\psi + \sqrt{\beta} \leq 1 - \sqrt{\beta},$$

et la même équation est satisfaite par la fonction $w = g_1(z)$. On voit aisément que la fonction $\varphi(z) = \frac{1}{z} - z + 2i(\sin \psi + \sqrt{\beta})$ représente ∂U sur le segment de l'axe imaginaire $I = [-2i + 2i(\sin \psi + \sqrt{\beta}), 2i + 2i(\sin \psi + \sqrt{\beta})]$, qui contient, en vertu de (71), le segment $J = [-2\sqrt{\beta}i, 2\sqrt{\beta}i]$. Voyons maintenant quel est l'ensemble dont l'intervalle I est l'image dans l'application $\psi(w) = \frac{1}{w} - \beta w$. Résolvant par rapport à w l'équation $\frac{1}{w} - \beta w = it$, où $it \in I$, on obtient

$$(72) \quad w = \frac{1}{2\beta} (-it + \sqrt{4\beta - t^2}).$$

On peut montrer que la fonction (72) représente l'intervalle $[-2\sqrt{\beta}, 2\sqrt{\beta}]$ sur la circonférence $\{w: |w| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\}$, tandis que les segments $[-2+2(\sin \psi + \sqrt{\beta}), -2\sqrt{\beta}]$ et $[2\sqrt{\beta}, 2+2(\sin \psi + \sqrt{\beta})]$ sont transformés en coupures rectilignes issues des points $\frac{i}{\sqrt{\beta}}, \frac{-i}{\sqrt{\beta}}$; la coupure issue du point $-\frac{i}{\sqrt{\beta}}$ peut disparaître. La fonction $w=f(z)$ représente donc U sur le cercle

$$\left\{ w: |w| < \sqrt{\frac{b_{1f}}{b_{1g}}} \right\}, \text{ dépourvu de deux segments rectilignes symé-}$$

triques par rapport au centre, tandis que la fonction $w=h(z)$ représente U sur l'extérieur de ce cercle, aussi dépourvu de deux segments appartenant à la même droite que précédemment.

On voit finalement que si les nombres quelconques b_{1f}, b_{1g} sont tels que $0 < b_{1f}b_{1g} \leq 1$, il existe un couple de Aharonov (f, g) pour lequel la fonctionnelle (62) admet un maximum; de plus tout couple de Aharonov, pour lequel la fonctionnelle (62) admet un maximum, est de la forme $(b_{1f}f_1, b_{1g}g_1)$, où b_{1f}, b_{1g} sont quelconques, pourvu que $0 < b_{1f}b_{1g} \leq 1$, $f_1 = g_1 = w$ est une solution de l'équation (70), où $\beta = b_{1f}b_{1g}\sqrt{\beta} > 0$, ψ est un paramètre satisfaisant à l'inégalité (71); enfin $\frac{dw}{dz}\bigg|_{z=0} = 1$. Mais on voit aussi aisément que, inversement, tout couple de la forme mentionnée ci-dessus, où le paramètre quelconque ψ satisfait à l'inégalité (71), est un couple de Aharonov pour lequel la fonctionnelle (62) admet un maximum.

7. Soit S_1 la classe des fonctions f de la forme $f(z) = bz + \dots$, $b > 0$, holomorphes et univalentes dans U et satisfaisant dans U à la condition $|f(z)| < 1$ et soit B la classe des fonctions de la même forme, holomorphes et univalentes dans U et telles que $f(z)f(\zeta) \neq 1$ pour $z, \zeta \in U$ quelconques. Les fonctions de la classe S_1 sont appelées fonctions univalentes bornées au sens de Löwner, les fonctions de la classe B sont dites fonctions univalentes de Bieberbach-Eilenberg.

Évidemment $S_1 \subset B$. On voit aisément que si $f \in S_1$, les couples $(f(z), f(z))$, $(f(z), \overline{f(z)})$, $(f(z), z) \in A$ et que si $f \in B$, le couple $(f(z), f(z)) \in A$. Inversement, si le couple $(f(z), \overline{f(z)}) \in A$, on a $f \in B$, et, en partie inversement, si $(f(z), \overline{f(z)}) \in A$ ou $(f(z), z) \in A$, on a $f \in S_1$. En particulier, si $f \in S_1$ ou $f \in B$, le couple $(f, f) \in A$ et, comme les inégalités (10) et (65') pour un tel couple de fonctions prennent respectivement la forme

$$(73) \quad 0 \leq b \leq 1,$$

$$(74) \quad \operatorname{Re} \{ a_3 - a_2^2 + b^2 \} \leq 1,$$

les inégalités (73), (74) ont lieu pour toutes les fonctions $f \in S_1$ ou $f \in B$. Il résulte de l'exemple (a) que la seule fonction de la classe S_1 ou B tel que $0 \leq b < 1$ est l'identité $f(z) = z$. D'autre part, il résulte de l'exemple (b) que les seules fonctions dans la classe S_1 ou dans la classe B qui réalisent le signe d'égalité dans (74) sont les fonctions $w = f(z) = bz + \dots$, où b quelconque dans $(0, 1)$ satisfait à l'équation

$$b \left(\frac{1}{w} - w \right) = \frac{1}{z} - z + 2i(\sin \psi + b),$$

ψ est quelconque, mais tel que $\sin \psi \leq 1 - 2b$. Ce sont les fonctions qui représentent U sur U dépourvu de deux segments de droite, issus des points $\pm i$, dirigés vers l'origine. Dans le cas $\psi = -\frac{\pi}{2}$, un de ces segments disparaît et

la fonction extrémale est une fonction bornée de Koebe de la forme

$$\frac{w}{(1 - iw)^2} = b \frac{z}{(1 - iz)^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. A h a r o n o v: A generalization of a theorem of J.A.Jenkins, Math.Z. 110 (1969), 218-257).
- [2] D. A h a r o n o v: On pairs of functions and related classes, Duke Math.J. 40 (1973) 669-676.
- [3] Ю.Е. А л е н и ц ы н: К теории однолистных функций и функций Бибербаха-Эйленберга, Dokl. Akad. Nauk SSSR 109 (2) (1956) 247-250.
- [4] Ю.Е. А л е н и ц ы н: О функциях без общих значений и внешней границе области значений функции, Mat. Sb. 46 (88) 4 (1958) 373-388.
- [5] Г.М. Г о л у з и н: О р-листных функциях, Mat. Sb. 8 (50), 2 (1940) 277-284.
- [6] Г.М. Г о л у з и н: Метод вариаций в конформном отображении, IV, Mat. Sb. 29 (1951) 455-468.
- [7] H. G r u n s k y: Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen, Math.Z.45 (1939) 29-61.
- [8] J.A. H u m m e l: Inequalities of Grunsky type for Aharonov pairs, J.Analyse Math. 25 (1972) 217-257.
- [9] J.A. J e n k i n s: Univalent functions and conformal mapping, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958) 192-204.
- [10] J.A. J e n k i n s: Some area theorems and a special coefficient theorem, Illinois, J.Math. 8 (1964) 80-99.
- [11] J.A. J e n k i n s: On Bieberbach-Eilenberg functions III, Trans. Amer.Math.Soc. 119 (1965) 195-215.
- [12] J.A. J e n k i n s: A remark on "pairs" of regular functions, Proc. Amer.Soc. 31 (1972) 119-121.

- [13] Н.А. Лебедев: К теорий конформных отображений круга на неналегающие области, Dokl. Akad. Nauk SSSR 103 (4) (1955) 553-555.
- [14] Н.А. Лебедев: Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях, Dokl. Akad. Nauk SSSR 115 (6) (1957) 1070-1073.
- [15] Н.А. Лебедев: Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR 60 (1961) 211-232.
- [16] Н.А. Лебедев: Принцип площадей в теории однолистных функций, Москва (1975) 167-220.
- [17] K. L ö w n e r: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann. 89 (1923) 103-121.
- [18] И.М. М и л и н: Метода площадей в теории однолистных функций, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154, (2), (194) 264-267.
- [19] R.N. P e d e r s o n: On unitary properties of Grunsky's matrix, Arch. Rational Mech. Anal. 29 (1968) 301-330.
- [20] Ch. P o m m e r e n k e: On the Grunsky inequalities for univalent functions, Arch. Rational Mech. Anal. 35 (1968) 234-244.
- [21] Ch. P o m m e r e n k e: Univalent functions, Vandenhoeck Ruprecht, Gottingen (1975) 181-204.
- [22] Ch. P o m m e r e n k e: Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen, Math. Z. 85 (1964) 197-208.
- [23] M. S c h i f f e r: Faber polynomials in the theory of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 503-517.
- [24] W.W o l l i b n e r: Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit univalente, Colloq. Math. 2 (1951) 249-253.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE SILÉSIE

Received June 17, 1977.