Zygmunt Bućko

EINE OPERATORENMETHODE ZUR LÖSUNG VON GEWÖHNLICHEN LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN

1. Eigenschaften der Funktionenfaltung mit diskretem Argument

In der Arbeit untersuchen wir lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten mit der Methode von Operatoren, deren Definition auf dem Begriff der Funktionenfaltung mit diskretem Argument gestützt ist.

Definition 1. Wir nennen Faltung $(a(n)) * (b(n))$ zweier Funktionen $(a(n))$ und $(b(n))$ mit diskretem Argument $n=1,2,3,\dots$ eine Funktion $(c(n))$ die durch die Formel

$$(1) \quad (c(n)) := (a(n)) * (b(n)) := \left(\sum_{k=1}^{n-1} a(n-k) b(k) \right)$$

(wo $\sum_{k=1}^0 a(k) = 0$) bestimmt ist.

Aus der Definition 1 ergibt sich, dass $(c(1)) = (a(1)) * (b(1)) = 0$.

Lehrsatz 1. Es ist

$$(2) \quad (a(n)) * (b(n)) = (b(n)) * (a(n)),$$

$$(3) \quad ((a(n)) * (b(n))) * (c(n)) = (a(n)) * ((b(n)) * (c(n))).$$

Die leichten Beweise der Formeln (2) und (3) können wir auslassen.

D e f i n i t i o n 2. Die Summe zweier Funktionen $(a(n))$ und $(b(n))$ bezeichnen wir

$$(a(n)) + (b(n)) := (a(n) + b(n)).$$

Man prüft leicht nach, dass der folgende Satz gilt:

L e h r s a t z 2. Es ist

$$(4) \quad (a(n)) * (b(n) + c(n)) = ((a(n)) * (b(n))) + ((a(n)) * (c(n))).$$

D e f i n i t i o n 3. $(a(n))^k := (a(n)) * (a(n))^{k-1}$,
wo $(a(n))^1 := (a(n))$, $k = 2, 3, 4, \dots$

Augenscheinlich ist auch der Beweis des

L e h r s a t z 3. Es ist

$$(5) \quad (a(n))^k * (a(n))^l = (a(n))^{k+l},$$

$$(6) \quad (a(n))^k * (b(n))^k = ((a(n)) * (b(n)))^k,$$

$$(7) \quad ((a(n))^k)^l = (a(n))^{kl}$$

für $k, l = 1, 2, 3, \dots$

Wir geben jetzt die wichtigste Eigenschaft der Faltung an (Analogon des Titchmarsh'schen Lehrsatzes).

L e h r s a t z 4. Wenn $(a(n))$ und $(b(n))$ nicht identisch gleich Null sind, so ist die Faltung ebenfalls nicht identisch gleich Null.

Wir beweisen zuerst vier Lemmas.

L e m m a 1. Es ist

$$(8) \quad \det [j^s]_{sj} = \prod_{s=0}^{k-1} s!,$$

$[j^s]_{sj}$ $s=0, 1, 2, 3, \dots, k-1$, $j=1, 2, 3, \dots, k$ bezeichnet eine $k \times k$ Matrix.

L e m m a 3. Wenn

$$c(2r) = (a(n)) * (a(n)) = \sum_{k=1}^{2r-1} a(2r-k)a(k) = 0,$$

so ist $a(k) = 0$ für $k=1,2,\dots,r$, $r=1,2,3,\dots$

B e w e i s . Wir führen einen Induktionsbeweis über r durch. Für $r = 1$ erhalten wir $c(2) = a(1) a(1) = 0$, daher ist $a(1) = 0$. Nehmen wir an, das Lemma für $r = n$ richtig ist, das heisst

$$(10) \quad a(1) = a(2) = a(3) = \dots = a(n) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} c(2(n+1)) &= \sum_{k=1}^{2n+1} a(k) a(2n+2-k) = a(1)a(2n+1) + a(2)a(2n) + \\ &+ a(3) a(2n-1) + \dots + a(n) a(n+2) + a(n+1) a(n+1) + \\ &+ a(n+2) a(n) + \dots + a(2n+1) a(1). \end{aligned}$$

Aus (10) ergibt sich, dass $c(2(n+1)) = (a(n+1))^2 = 0$, woraus folgt $a(n+1) = 0$.

L e m m a 4. Wenn $(a(n)) * (b(n)) = 0$, so ist $(a(n)) * (n^s b(n)) = 0$ für $s = 1,2,3,\dots$

B e w e i s . Summieren wir in Bezug auf k von 1 bis $n-1$ der beiden Seiten der Identität

$$(n-k) b(n-k) k^t a(k) + b(n-k) k^{t+1} a(k) = n b(n-k) k^t a(k),$$

so kommen wir zur Formel

$$(nb(n)) * (n^t a(n)) + (b(n)) * (n^{t+1} a(n)) = n(b(n) * (n^t a(n))).$$

Aus der letzten Identität folgt

$$\begin{aligned} &((b(n)) * (n^{t+1} a(n))) * [(nb(n)) * (n^t a(n)) + (b(n)) * (n^{t+1} a(n))] = \\ &= [n((b(n)) * (n^t a(n)))] * [(b(n)) * (n^{t+1} a(n))] . \end{aligned}$$

Auf Grund der Lehrsätze 1 und 2 schreiben wir die letzte Gleichheit in der Form

$$(11) \quad \left[(b(n)) * (n^t a(n)) \right] * \left[(nb(n)) * (n^{t+1} a(n)) \right] + \\ + \left[(b(n)) * (n^{t+1} a(n)) \right]^2 = \left[n \left((b(n)) * (n^t a(n)) \right) \right] * \\ * \left[(b(n)) * (b(n)) * (n^{t+1} a(n)) \right].$$

Für $t = 0$ nimmt die Formel (11) die Form $((b(n)) * (n a(n)))^2 = 0$ an. Hingegen haben wir, auf Grund des Lemmas 3 $(b(n)) * (n a(n)) = 0$. Für $s = 1$ ist also das Lemma 4 wahr.

Aus der rekurrenten Beziehung (11) und dem Lemma 3 ergibt sich der zweite induktive Schritt.

Beweis des Lehrsatzes 4. Nehmen wir also an, dass die Faltung $a(n) * b(n) = 0$. Auf Grund des Lemmas 4

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^s a(n-k) b(k) = 0 \quad \text{für } s=1,2,3,\dots$$

Aus der letzten Gleichheit und dem Lemma 2 erhalten wir

$$(12) \quad a(n-k) b(k) = 0 \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Aus (12) ergibt sich, dass wenn für einen bestimmten Wert k_0 , $b(k_0) \neq 0$, so ist $a(n-k_0) = 0$, für $n \geq k_0+1$. Also ist

$$a(n) = 0, \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wenn dagegen ein solches k_0 nicht existierte, so würde es bedeuten, dass $b(n) = 0$ ist, für $n = 1, 2, 3, \dots$. Wir haben daher nachgewiesen, dass wenn die Faltung $a(n) * b(n)$ identisch gleich Null ist, so ist eine der Funktionen $a(n)$ oder $b(n)$ identisch gleich Null. Das ist eben der Schluss des Lehrsatzes 4.

2. Der Mikusinski'sche Operator für Funktionen mit diskretem Argument

Wir werden jetzt, ähnlich wie für stetige Funktionen [1], den Begriff des Operators als ein Paar von diskreten Funktionen $(a(n))$, $(b(n))$ einführen.

Definition 4. Gegeben seien diskrete Funktionen $(a(n))$ und $(b(n))$, wo $(b(n)) \neq 0$ für $n=1,2,3,\dots$. Eine Funktion $c(n)$ nennen wir Operator eines diskreten Funktionenpaares $(a(n))$, $(b(n))$ dann und nur dann, wenn

$$(13) \quad (a(n)) = (b(n)) * (c(n)),$$

falls eine solche Funktion existiert. Dem Operator $c(n)$ bezeichnen wir symbolisch auf folgende Weise

$$(14) \quad c(n) = \frac{a(n)}{b(n)}.$$

Aus dem Lehrsatz 4 ergibt sich, dass die Zuordnung (13) eindeutig ist. Tatsächlich, wenn es zwei Lösungen $(c(n))$ und $(x(n))$ der Gleichung (13) gäbe, so wäre

$$(b(n)) * (c(n)) = (b(n)) * (x(n))$$

oder

$$(b(n)) * (c(n) - x(n)) = 0.$$

Da $(b(n)) \neq 0$, so ist $(x(n)) = (c(n))$.

Für den Operator (14) führen wir folgende Operationen (Rechnungsarten) ein:

1) die Gleichheit: $\frac{a(n)}{b(n)} = \frac{c(n)}{d(n)} \iff (a(n)) * (d(n)) = (c(n)) * (b(n))$,

2) das Produkt: $\frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n)}{d(n)} := \frac{(a(n)) * (c(n))}{(b(n)) * (d(n))}$,

3) die Summe: $\frac{a(n)}{b(n)} + \frac{c(n)}{d(n)} := \frac{(a(n)) * (d(n)) + (c(n)) * (b(n))}{(b(n)) * (d(n))}$,

4) den Quotienten: $\frac{\frac{a(n)}{b(n)}}{\frac{c(n)}{d(n)}} := \frac{(a(n)) * (d(n))}{(b(n)) * (c(n))}$.

Der Quotient hat einen Sinn, wenn nicht nur $(b(n)) \neq 0$ und $(d(n)) \neq 0$ sondern auch $(c(n)) \neq 0$ ist.

Wichtig ist der Operator der Form

$$(15) \quad \frac{(a)}{(1)}$$

wo a eine komplexe Zahl ist. Für die Operatoren der Form (15) gelten die Beziehungen:

$$(16) \quad \frac{(a)}{(1)} + \frac{(b)}{(1)} = \frac{(1) * (a) + (1) * (b)}{(1) * (1)} = \frac{(a+b) * (1)}{(1) * (1)} = \frac{(a+b)}{(1)},$$

$$(17) \quad \frac{(a)}{(1)} \frac{(b)}{(1)} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} ab \right)}{(1) * (1)} = \frac{(1) * (ab)}{(1) * (1)} = \frac{(ab)}{(1)},$$

$$(18) \quad \frac{(a)}{(1)} (b(n)) = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} ab(k) \right)}{(1)} = \frac{(1) * (ab(k))}{(1)} = (ab(k)).$$

Die Formeln (16) - (18) zeigen, dass man den Operator $\frac{(a)}{(1)}$ mit der Zahl a identifizieren kann (nicht zu verwechseln mit der konstanten Funktion (a)). Speziell kann die Zahl 1 in der Form

$$1 = \frac{(1)}{(1)}$$

geschrieben werden.

Aus (18) ergibt sich, dass die Multiplikation der Funktion mit einer Konstante auf der Multiplikation ihres Wertes mit der gegebenen Konstante beruht:

$$(19) \quad a(b(n)) = (ab(n)).$$

Aus der Definition der Faltung folgt, dass

$$(1) * (a(n)) = \sum_{k=1}^{n-1} a(k).$$

Deswegen werden wir die Funktion $(1)^{1)}$ einen summierenden Operator nennen und mit dem Buchstaben S bezeichnen

$$(20) \quad S := (1), \quad S(a(n)) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a(k) \right).$$

Es wird bequem sein den Operator R einzuführen, der wie folgt definiert wird:

$$(21) \quad R := 1 + S^{-1}.$$

In den Anwendungen wichtig ist der
L e h r s a t z 5. Es ist

$$(22) \quad (x(n+t)) = R^t(x(n)), \quad \sum_{j=0}^{t-1} R^j x(t-j), \quad \left(\sum_{k=0}^{-1} a(k) := 0 \right),$$

$t = 0, 1, 2, \dots$

B e w e i s . Aus der Identität

$$(x(n+t-1)) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \Delta x(k+t-1) \right) + (x(t)),$$

ferner aus der Definition des Operators S und aus (19) erhalten wir die Beziehung

$$(x(n+t-1)) = (S \Delta x(n+t-1)) + Sx(t),$$

$$S^{-1}(x(n+t-1)) = S^{-1}(S \Delta x(n+t-1)) + x(t),$$

$$S^{-1}(x(n+t-1)) = (x(n+t) - x(n+t-1)) + x(t),$$

$$R(x(n+t-1)) = (x(n+t)) + x(t).$$

1) Der Leser ist gebeten um diesem symbol mit dem Nummer einer Formel nicht zu wechseln!

Daher ist

$$(23) \quad (x(n+t)) = R(x(n+t-1)) - x(t).$$

Auf Grund der mathematischen Induktion aus (23) erhalten wir (22).

Wir drücken jetzt einige elementare Funktionen mit Hilfe des Operators R aus.

Indem wir (22) auf die Funktion a^{n-1} für $t = 1$ ferner (19) anwenden, erhalten wir die Gleichheit

$$(a^n) = R(a^{n-1}) - 1, \quad (a^n) = a(a^{n-1}).$$

Daher ist

$$(24) \quad \frac{1}{R-a} = (a^{n-1}).$$

Es wird bequem, ein Faktorpolynom zu verwenden, das auf folgende Weise bestimmt ist

$$(25) \quad n^{(0)} := 1 \quad n^{(k)} := n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Als Verallgemeinerung von (24) bekommen wir

$$(26) \quad \frac{1}{(R-a)^m} = \left(a^{n-m} \frac{n^{(m-1)}}{(m-1)!} \right),$$

Die Richtigkeit von (26) beweisen wir induktiv. Für $m = 1$ haben wir (24). Nehmen wir an, dass (26) für $m = k$ gelte. Wir weisen die Richtigkeit von (26) für $m = k+1$ nach. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R-a)^{k+1}} &= \frac{1}{R-a} \frac{1}{(R-a)^k} = (a^{n-1}) * \left(a^{n-k} \frac{n^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j-1} a^{j-k} \frac{j^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) = \left(a^{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^{(k-1)}}{(k-1)!} \right). \end{aligned}$$

Bemerken wir, dass

$$\Delta n^{(k)} := (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = k n^{(k-1)},$$

Indem wir die letzte Formel und die Formel für die Berechnung der endlichen Summe einer Folge $a(n)$ benutzen:

$$\sum_{k=s}^t a(k) = b(t+1) - b(s), \quad \text{wo } \Delta b(k) = a(k),$$

können wir schreiben

$$\sum_{j=1}^{n-1} (j-1)^{(k-1)} = \frac{(j-1)^{(k)}}{k} \Big|_1^n = \frac{(n-1)^{(k)}}{k},$$

was den Beweis der Formel (26) beendet.

Wenn $a = p + iq = ue^{iv}$, wo $p = u \cos v$, $q = u \sin v$, so ist

$$\frac{1}{(R-a)^k} = \frac{(R-\bar{a})^k}{((R-a)(R-\bar{a}))^k} = \frac{\sum_{s=0}^k (R-p)^{k-s} (qi)^s \binom{k}{s}}{((R-p)^2 + q^2)^k}$$

hingegen

$$\begin{aligned} & \left(a^{n-k} \frac{(n-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) = \\ & = \left(u^{n-k} \frac{(n-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} \cos(n-k)v \right) + i \left(u^{n-k} \frac{(n-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} \sin(n-k)v \right). \end{aligned}$$

Die Vergleichung der reellen und imaginären Teile ergibt weitere Verallgemeinerungen der Formeln (24) und (26):

$$(27) \quad \frac{\operatorname{Re} \left(\sum_{s=0}^k (R-p)^{k-s} (qi)^s \binom{k}{s} \right)}{((R-p)^2 + q^2)^k} = \left(u^{n-k} \frac{(n-1)(k-1)}{(k-1)!} \cos(n-k)v \right),$$

$$\frac{\operatorname{Im} \left(\sum_{s=0}^k (R-p)^{k-s} (qi)^s \binom{k}{s} \right)}{((R-p)^2 + q^2)^k} = \left(u^{n-k} \frac{(n-1)(k-1)}{(k-1)!} \sin(n-k)v \right),$$

wo $u^2 = p^2 + q^2$, $v = \arg(p+iq)$.

Für $k = 1, 2$ erhalten wir aus (27)

$$(28) \quad \frac{R-p}{(R-p)^2 + q^2} = (u^{n-1} \cos(n-1)v),$$

$$(29) \quad \frac{1}{(R-p)^2 + q^2} = \left(\frac{u^{n-2} \sin(n-1)v}{\sin v} \right),$$

$$(30) \quad \frac{R-p}{((R-p)^2 + q^2)^2} = \left(\frac{u^{n-3} (n-1) \sin(n-2)v}{2 \sin v} \right).$$

Aus (29) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{((R-p)^2 + q^2)^2} &= \left(\frac{u^{n-2} \sin(n-1)v}{\sin v} \right) * \left(\frac{u^{n-2} \sin(n-1)v}{\sin v} \right) = \\ &= \left(\frac{u^{n-4}}{\sin^2 v} \sum_{k=1}^{n-1} \sin(n-k-1)v \sin(k-1)v \right) = \\ &= \left(\frac{u^{n-4}}{2 \sin^2 v} \sum_{k=1}^{n-1} (\cos(n-2k)v - \cos(n-2)v) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{u^{n-4}}{2\sin^2 v} \left(\frac{\sin(2kv - nv - v)}{2\sin v} \right) \right) \Bigg|_1^n - (n-1) \cos(n-2)v = \\
&= \left(\frac{u^{n-4}}{2\sin^3 v} \left(\sin(n-1)v - (n-1)\sin v \cos(n-2)v \right) \right).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$(31) \quad \frac{1}{((R-p)^2 + q^2)^2} = \left(\frac{u^{n-4}}{2\sin^3 v} \left(\sin(n-1)v - (n-1)\sin v \cos(n-2)v \right) \right).$$

Aus der Formel (28) und (29), ferner aus (30) und (31) folgt

$$(32) \quad \frac{R}{(R-p)^2 + q^2} = \left(\frac{u^{n-1} \sin nv}{\sin v} \right)$$

und

$$\begin{aligned}
(33) \quad &\frac{R}{((R-p)^2 + q^2)^2} = \\
&= \left(\frac{u^{n-3}}{2\sin^3 v} \left((n-1)\sin v \cos(n-3)v - \cos v \sin(n-1)v \right) \right).
\end{aligned}$$

Durch reihenweise Faltung kann man allgemeinere Formeln für die Operatorenpotenz folgender Form erhalten:

$$(34) \quad \frac{R}{((R-p)^2 + q^2)^t}, \quad \frac{1}{((R-p)^2 + q^2)^t} \quad \text{für } t=1,2,3,\dots$$

Sie sind jedoch ziemlich kompliziert.

3. Anwendung der Operatoren zur Forschung von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die oben besprochene Operatorenrechnung liefert ein bequemes Werkzeug zur Forschung von gewöhnlichen linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, und bildet

zugleich eine neue praktische Methode zur Lösung solcher Gleichungen.

Gegeben sei ein Polynom

$$(35) \quad P(z) = \sum_{j=0}^t a_j z^j$$

wo a_j für $j = 0, 1, 2, \dots, t$ reelle Zahlen sind. Die Wurzeln dieses Polynoms werden wir mit z_k , dagegen ihre Vielfachheit mit s_k bezeichnen. Es seien

$$z_j = u_j e^{iv_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, w$$

die komplexen Wurzeln des Polynoms $P(z)$ mit der Vielfachheit s_j , $j = 1, 2, \dots, w$, dagegen seien z_j , $j = 2w+1, 2w+2, \dots, k$, die reellen Wurzeln des Polynoms $P(z)$ mit der Vielfachheit s_j , $j = 2w+1, 2w+2, \dots, k$.

Lehrsatz 6. Wenn a_j $j = 0, 1, \dots, t$ reelle Zahlen sind und $a_0 a_t \neq 0$, so ist die Lösung der Gleichung

$$(36) \quad \sum_{j=0}^t a_j x(n+j) = b(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eindeutig bestimmt durch die Angabe der Anfangswerte

$$(37) \quad x(j) = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, t$$

wo p_j gegebene konstante Zahlen sind.

Dabei hat die Lösung die Form

$$(38) \quad x(n) = h(n) + f(n)$$

$$\begin{aligned}
 (39) \quad (h(n)) &= \frac{\sum_{k=0}^{t-1} R^k G(k)}{\sum_{j=0}^t a_j R^j} = \\
 &= \sum_{j=1}^w \sum_{l=1}^{s_j} \left(u_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(l-1)}}{(l-1)!} \left(m_1^j \cos(n-1)v_j - n_1^j \sin(n-1)v_j \right) \right) + \\
 &+ \sum_{j=2w+1}^k \sum_{l=1}^{s_j} A_1^j \left(z_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(l-1)}}{(l-1)!} \right),
 \end{aligned}$$

$$(40) \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} c(n-k) b(k),$$

$$\begin{aligned}
 (41) \quad c(n) &= \frac{1}{\sum_{j=0}^t a_j R^j} = \\
 &= \sum_{j=1}^w \sum_{l=1}^{s_j} \left(u_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(l-1)}}{(l-1)!} \left(\hat{m}_1^j \cos(n-1)v_j - \hat{n}_1^j \sin(n-1)v_j \right) \right) + \\
 &+ \sum_{j=2w+1}^k \sum_{l=1}^{s_j} \hat{A}_1^j \left(z_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(l-1)}}{(l-1)!} \right),
 \end{aligned}$$

$$G(k) = \sum_{j=k+1}^t a_j p_{j-k},$$

und die Konstanten m_1^j , n_1^j , $\hat{m}_1^j$, $\hat{n}_1^j$, A_1^j und $\hat{A}_1^j$ sind genau bestimmt.

Vermerke

Die Funktion $h(n)$ bildet

1^0 die Lösung der homogenen Gleichung

$$(42) \quad \sum_{j=0}^t a_j x(n+j) = 0$$

die die Anfangsbedingungen (37) erfüllt;

2° die allgemeine Lösung der Gleichung (42), wenn m_1^j , n_1^j und A_1^j beliebige Konstanten bezeichnen.

Die Funktion $f(n) = c(n) * b(n)$ bildet

3° die Partikularlösung der Gleichung (36), die die Bedingungen

$$(43) \quad f(n) = 0, \text{ für } n=1,2,3,\dots,t \text{ (wo } c(t) = 1:a_t)$$

erfüllt;

4° die Funktion (38) ist die allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung, wenn m_1^j , n_1^j , und A_1^j beliebige Konstanten sind.

B e w e i s . Wegen der Formel (22) kann man die Gleichung (36) in der Form schreiben

$$\sum_{j=0}^t a_j R^j(x(n)) = \sum_{j=0}^t a_j \sum_{k=0}^{j-1} R^k x(j-k) + (b(n))$$

oder nach Ausrechnungen

$$(x(n)) \sum_{j=0}^t a_j R^j = \sum_{k=0}^{t-1} R^k \sum_{j=k+1}^t a_j x(j-k) + (b(n))$$

wo $\sum_{k=0}^{-1} a(k) := 0$ ist. Daher ist

$$(44) \quad (x(n)) = \frac{\sum_{k=0}^{t-1} R^k G(k)}{\sum_{j=0}^t a_j R^j} + \frac{1}{\sum_{j=0}^t a_j R^j} (b(n)),$$

wo $G(k) := \sum_{j=k+1}^t a_j p_{j-k}$.

Wir untersuchen den ersten Summanden der Funktion (44).
Zu diesem Zweck zerlegen wir den Nenner in Faktoren

$$(45) \quad \sum_{j=0}^t a_j R^j = a_t \prod_{j=1}^k (R-z_j)^{s_j}, \quad \sum_{j=1}^k s_j = t,$$

wo z_j die Nullstelle des Polynoms (35) mit der Vielfachheit s_j ist. Indem wir den Zähler des durch a_t geteilten Bruches (39) mit $M(R)$ bezeichnen, können wir die Funktion $h(n)$ in Partialbrüche nach dem Schema (46)

$$(46) \quad \frac{M(R)}{\prod_{p=1}^k (R-z_p)^{s_p}} = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{s_j} \frac{A_m^j}{(R-z_j)^m}$$

zerlegen. Daher ist

$$(47) \quad \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{s_j} A_m^j \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (R-z_p)^{s_p} (R-z_j)^{s_j-m} = M(R).$$

Setzen wir in der letzten Identität $R = z_j$ so erhalten wir

$$A_{s_j}^j \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (z_j - z_p)^{s_p} = M(z_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, k,$$

woraus

$$(48) \quad A_{s_j}^j = \frac{M(z_j)}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (z_j - z_p)^{s_p}}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Nach Einsetzung der berechneten Werte (48) in die Formel (47) können wir der Gleichung (47) die Gestalt geben

$$(49) \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{s_j-1} A_m^j \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (R-z_p)^{s_p} (R-z_j)^{s_j-m} = M(R) - \sum_{j=1}^k A_{s_j}^j \prod_{p=1}^k (R-z_p)^{s_p}.$$

Die rechte Seite (49) ist ein Polynom, dessen Nullstellen die Zahlen z_j sind; man kann sie daher in der Form

$$M_1(R) \prod_{j=1}^k (R-z_j)$$

darstellen, wo $M_1(R)$ der Quotient der rechten Seite (49) und des Ausdrucks $\prod_{j=1}^k (R-z_j)$ ist. Beide Seiten von (49) durch $\prod_{j=1}^k (R-z_j)$ teilend, erhalten wir die der Formel (47) analoge Beziehung

$$\sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{s_j-1} A_m^j \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (R-z_p)^{s_p-1} (R-z_j)^{s_j-1-m} = M_1(R)$$

aus der wir

$$A_{s_j-1}^j = \frac{M_1(z_j)}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (z_j - z_p)^{s_p-1}}$$

berechnen. Auf die beschriebene Weise berechnen wir alle Konstanten A_j^i . Für $j = 1, 2, \dots, w$, ist $z_j = p + iq$ eine komplexe Zahl und in der Zerlegung in Partialbrüche werden konjugierte Summanden auftreten. Auf Grund der Formel (27) haben wir

$$\frac{A_1^j}{(R-z_j)^1} + \frac{\bar{A}_1^j}{(R-\bar{z}_j)^1} = 2\operatorname{Re} \frac{A_1^j}{(R-z_j)^1} = 2\operatorname{Re} \frac{A_1^j \sum_{s=0}^1 \binom{1}{s} (R-p_j)^{1-s} (iq_j)^s}{[(R-p_j)^2 + q_j^2]^1} =$$

$$= m_1^j \left(u_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(1-1)}}{(1-1)!} \cos(n-1)v_j \right) - n_1^j \left(u_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(1-1)}}{(1-1)!} \sin(n-1)v_j \right),$$

wo $2A_1^j = m_1^j + i n_1^j$. Für $j = 2w+1, 2w+2, \dots, k$ die Nullstelle z_j ist eine reelle Zahl und auf Grund der Formel (25) ist

$$\frac{A_1^j}{(R-z_j)^1} = \left(z_j^{n-1} \frac{(n-1)^{(1-1)}}{(1-1)!} \right) A_1^j.$$

Die Funktion $(c(n))$ ist ein Sonderfall der Funktion $(h(n))$ daher unterscheidet sie sich davon nur durch die Koeffizienten m_1^j , n_1^j und A_1^j . Auf diese Weise wurden die Formeln (38) - (41) abgeleitet, die die eindeutige Lösung der Gleichung (36) sind. Wenn $b(n) = 0$ ist, so reduziert sich die Funktion (38) zur Funktion $x(n) = h(n)$, welche die Lösung einer homogenen Gleichung ist, die die Anfangsbedingungen (37) erfüllt.

Die Gleichung (38) haben wir für beliebige Konstanten p_j erhalten, sie ist also die allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung, wenn m_1^j , n_1^j und A_1^j als beliebige Konstanten behandelt werden. Wenn $p_j = 0$ ist, für $j = 1, 2, \dots, t-1$, $p_t = 1:a_t$, $b(n) = 0$, dann ist $G(0) = a_t p_t = 1$, $G(k) = 0$ für $k = 1, 2, \dots, t-1$ und die Funktion (44) reduziert sich zu (41), dabei ist $x(n) = c(n)$ offenbar die Lösung einer homogenen Gleichung, welche die Bedingungen $x(j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, t-1$, $x(t) = 1:a_t$ erfüllt. Daher ergibt sich, dass $f(1) = \sum_{k=1}^0 z(k) =: 0$ hingegen

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} c(k) b(n-k) = 0, \quad \text{für } n=2,3,\dots,t,$$

das heisst, dass die Eigenschaft (43) auch erfüllt ist. Somit ist der Lehrsatz 6 bewiesen.

4. Zwei Beispiele

B e i s p i e l 1. Es sei folgende Gleichung zu lösen:
 $x(n+4) - 4x(n+3) + 8x(n+2) - 8x(n+1) + 4x(n) = f(n)$, $n=1,2,\dots$
 wo $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Die Formel (38) nimmt folgende Form an:

$$\begin{aligned} (x(n)) = & \frac{R^3 x(1) + R^2(-4x(1) + x(2)) + R(8x(1) - 4x(2) + x(3)) +}{(R^2 - 2R + 2)^2} + \\ & + \frac{-8x(1) + 8x(2) - 4x(3) + x(4)}{(R^2 - 2R + 2)^2} + \frac{1}{(R^2 - 2R + 2)^2} (f(n)). \end{aligned}$$

Zerlegen wir die Funktion $h(n)$ in Partialbrüche, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (h(n)) = & \frac{Rx(1) + (x(2) - 2x(1))}{(R-1)^2 + 1} + \frac{2x(1) - 2x(2) + x(3)}{((R-1)^2 + 1)^2} + \\ & + \frac{-4x(1) + 6x(2) - 4x(3) + x(4)}{((R-1)^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich auf Grund der Formeln (32), (29), (33) und (31)

$$\begin{aligned} x(n) = & x(1) 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{\pi n}{4} + x(2) - 2x(1) 2^{\frac{n-1}{2}} \sin(n-1) \frac{\pi}{4} + \\ & + (2x(1) - 2x(2) + x(3)) 2^{\frac{n-3}{2}} \left(\sin(n-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \cos(n-1) \frac{\pi}{4} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left(-4x(1) + 6x(2) - 4x(3) + x(4) \right) 2^{\frac{n-3}{2}} \left(\sin(n-1) \frac{\pi}{4} + \right. \\ \left. - \frac{n-1}{\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} f(n-k) 2^{\frac{k-3}{2}} \left(\sin(k-1) \frac{\pi}{4} - \frac{k-1}{\sqrt{2}} \sin \frac{k}{4} \right) \right).$$

Beispiel 2. Als zweite Anwendung werden wir die Formel für vielfache Summation abzuleiten.

Aus der Formel (25) und (21) für $a = 1$ erhalten wir

$$(50) \quad S^k = \frac{(n-1)^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

Bemerken wir, dass

$$S^k(a(n)) = S^{k-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a(k) \right) = S^{k-2} \left(\sum_{j_2=1}^{n-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a(j_1) \right) = \\ = S^{k-3} \left(\sum_{j_3=1}^{n-1} \sum_{j_2=1}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a(j_1) \right) = \dots = \left(\sum_{j_k=1}^{n-1} \dots \sum_{j_2=1}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a(j_1) \right).$$

Den Ausdruck $S^k(a(n))$ kann man auch als Faltung der Funktionen (50) und $(a(n))$ betrachten:

$$S^k(a(n)) = \left(\frac{(n-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) * (a(n)) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1-j)^{(k-1)}}{(k-1)!} a(j) \right).$$

Daraus erhalten wir das Analogon der Cauchy'schen Formel für vielfache Summation

$$\sum_{j_k=1}^{n-1} \sum_{j_{k-1}=1}^{j_k-1} \dots \sum_{j_2=1}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} a(j_1) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-j-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} a(j).$$

Diese letzte Formel gab A.O.Gelfond in [2] an, indem er spezielle Differenzengleichungen mit ziemlich komplizierten Methoden löste.

LITERATURNACHWEIS

- [1] J. M i k u s i ń s k i : Rachunek operatorów, Warszawa 1957.
- [2] A.O. G e l f o n d : Isczisljenje kaniecznych raznostiej, Moskwa, 1967.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY, RADOM
Received April 20, 1978.