Bohdan Leszek Cygan

ISOMORPHISMUS DER KOLLINEATIONENGRUPPE DES P_3 MIT EINER AUTOKOLLINEATIONENGRUPPE DER PLÜCKERQUADRIK

Gegeben sei ein Repräsentant (x', x'') einer Gerade x des projektiven Raumes P_3 über einem bestimmten Körper K , d.h. $x' \in x$, $x'' \in x$, $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$, $x'' = (x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$, $x' \neq x''$, $x'_i, x''_i \in K$, $\sum X_i'^2 > 0$ und $\sum X_i''^2 > 0$.

1. Definition

$$f : (x', x'') \rightarrow (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}) \\ \equiv (p_{(0)}, p_{(1)}, p_{(2)}, p_{(3)}, p_{(4)}, p_{(5)}) \in P_5$$

und $p_{01} = x'_0 x''_1 - x'_1 x''_0, \dots, p_{12} = x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1$.

Aus den Sätzen über die sogenannten plückerschen Koordinaten der Gerade (siehe 42.1–42.6 in [1]) hervorgehen folgende Eigenschaften der oben definierten Abbildung f .

2. Eigenschaft I der Abbildung f

Die oben definierte Zahlen: $p_{(0)}, \dots, p_{(5)}$ erfüllen immer die Gleichung:

$$3. \quad Q : p_{(0)} p_{(3)} + p_{(1)} p_{(4)} + p_{(2)} p_{(5)} = 0 \text{ die man Plückerquadrik nennt.}$$

4. Eigenschaft II der Abbildung f

Die Abbildung f überführt alle Repräsentanten gegebener Gerade $x \in P_3$ in die Menge der Repräsentanten eines festbestimmten Punktes der Quadrik $Q \subset P_5$.

5. Eigenschaft III der Abbildung f

Für jeder Punkt $p \in Q$ nur die Repräsentanten einer festbestimmten Gerade aus P_3 werden bei der Abbildung f dem Punkt p zugeordnet.

Die Abbildung f bestimmt zwar die eindeutige Zuordnung zwischen den Geraden des P_3 und den Punkten der Quadrik Q aber bedeutet das

nich, dass der projektiväquivalenten Mengen der Geraden in P_3 projektiväquivalente miteinander Mengen der Punkten in P_5 entsprechen, und umgekehrt, dass der projektiväquivalenten Mengen der Punkten der Quadrik Q projektiväquivalente Mengen der Geraden in P_3 entsprechen. Aus Grassmannsmannigfaltigkeitentheorie (siehe Satz 1 und Satz 2 auf der Seite 298 in [2]) folgt, dass der Gruppe aller projektiven Abbildungen des P_3 eine festbestimmte Untergruppe der Autokollineationen der Quadrik Q in P_5 entspricht. Es ist wichtig explizite die Zuordnung F zwischen diesen Gruppen zu finden. Die Abbildung F wird selbstverständlich durch die in 1. definierte Funktion f induziert.

Übergehen wir zu der Definition der Zuordnung F .

Eine projektive Abbildung

$$\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x_0 + \dots + a_{03}x_3 \\ 6. \quad a : & \dots \det(a_{ij}) \neq 0 \\ y_3 &= a_{00}x_0 + \dots + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

des P_3 zuordnet der Gerade $x = (x', x'')$ eine festbestimmte Gerade $y = (y', y'')$. Die in 1. definierte Abbildung f zuordnet dem Paar miteinander durch a verbundenen Geraden x und y ein Paar festbestimmten Punkten p und q des P_5 , die miteinander in einer Beziehung bleiben.

Finden wir diese Beziehung.

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \begin{vmatrix} y'_1, y'_j \\ y''_i, y''_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i0}x'_0 + \dots + a_{i3}x'_3, a_{j0}x'_0 + \dots + a_{j3}x'_3 \\ a_{i0}x''_0 + \dots + a_{i3}x''_3, a_{j0}x''_0 + \dots + a_{j3}x''_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{i0}, a_{i1} \\ a_{j0}, a_{j1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_0, x'_1 \\ x''_0, x''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i0}, a_{i2} \\ a_{j0}, a_{j2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_0, x'_2 \\ x''_0, x''_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i0}, a_{i3} \\ a_{j0}, a_{j3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_0, x'_3 \\ x''_0, x''_3 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{i2}, a_{i3} \\ a_{j2}, a_{j3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_2, x'_3 \\ x''_2, x''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i3}, a_{i1} \\ a_{j3}, a_{j1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_3, x'_1 \\ x''_3, x''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i1}, a_{i2} \\ a_{j1}, a_{j2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_1, x'_2 \\ x''_1, x''_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Führen wir die Benennungen ein

$$\begin{vmatrix} a_{ik}, a_{il} \\ a_{jk}, a_{jl} \end{vmatrix} = a_{ij,kl}; \quad ij, kl := 01, 02, 03, 23, 31, 12$$

und wechselweise

$$a_{ij,kl} = a_{(m,n)}; \quad m, n := 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Demnach, die Abbildung f überführt das Paar der Geraden aus P_3 : die Gerade $x = (x', x'')$ und ihr Bild $y = (y', y'')$ bei dem projektiven Zuordnen

a auf ein Paar der Punkte p und q in P_5 , die miteinander in folgender Zusammenhang bleiben:

$$\begin{aligned} q(0) &= a_{(0,0)}p(0) + \dots + a_{(0,5)}p(5) \\ 7. \quad F &: \dots\dots\dots \\ q(5) &= a_{(5,0)}p(0) + \dots + a_{(5,5)}p(5). \end{aligned}$$

Andersgesagt, die Abbildung f induziert die Abbildung F , die beliebiger nicht entarteten Matrix viertes Grades eine Matrix sechstes Grades zuordnet.

Überprüfen wir ob der Rang der Matrix der Abbildung 7. nicht gleich Null ist?

Dem Satz von Laplace über die Verteilung einer Determinante auf die Summe der Produkte der komplementären Unterdeterminanten (siehe Satz II, 8, II in [3]) gemäss

$$|(a_{(m,n)})| = \sum (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{vmatrix} a_{(0,j_1)}, a_{(0,j_2)}, a_{(0,j_3)} \\ a_{(1,j_1)}, a_{(1,j_2)}, a_{(1,j_3)} \\ a_{(2,j_1)}, a_{(2,j_2)}, a_{(2,j_3)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{(3,j_4)}, a_{(3,j_5)}, a_{(3,j_6)} \\ a_{(4,j_4)}, a_{(4,j_5)}, a_{(4,j_6)} \\ a_{(5,j_4)}, a_{(5,j_5)}, a_{(5,j_6)} \end{vmatrix}.$$

Die oben auftretende Determinanten benennen wir entsprechend als $A_{j_1 j_2 j_3}$ und $\bar{A}_{j_4 j_5 j_6}$.

Die letzte Gleichung kann man jetzt kürzer fassen.

$$8. \quad |(a_{(m,n)})| = \sum (-1)^{j_1+j_2+j_3} A_{j_1 j_2 j_3} \bar{A}_{j_4 j_5 j_6},$$

wo das Summieren auf alle mögliche Untermengen $\{j_1, j_2, j_3\}$ und $\{j_4, j_5, j_6\}$ der Zahlenmenge $\{0, \dots, 5\}$ sich erstreckt.

In diesem Fall die Zahl der Summanden ergibt $C_6^3 = 20$. Aus der Elementareigenschaften der Determinanten geht hervor, dass die $A_{j_1 j_2 j_3}$ folgende Gestalt: $a_{00}a_{00}|(a_{ij})|, -a_{00}a_{01}|(a_{ij})|, a_{00}a_{02}|(a_{ij})|, \dots$ und die $\bar{A}_{j_4 j_5 j_6}$ entsprechend die Gestalt: $A_{00}A_{00}, A_{00}A_{01}, A_{00}A_{02}, \dots, /A_{ij}$ das algebraische Komplement des a_{ij} in (a_{ij}) bedeutet/haben. Die Summanden: $A_{123}\bar{A}_{345}, A_{135}\bar{A}_{246}, A_{235}\bar{A}_{146}, A_{456}\bar{A}_{123}$ sind gleich Null und die $\bar{A}_{j_4 j_5 j_6}$ die nicht volle Quadrate der Determinante drittes Grades sind treten paarweise auf. Demnach:

$$\begin{aligned} |(a_{(m,n)})| &= |(a_{ij})|(a_{00}^2 A_{00}^2 + \dots + a_{03}^2 A_{03}^2 - 2a_{00}a_{01}A_{00}A_{01} \\ &\quad + \dots - 2a_{02}a_{03}A_{02}A_{03}) \\ &= |(a_{ij})|(a_{00}A_{00} - \dots - a_{03}A_{03})^2 = |(a_{ij})|^2, \quad i, j := 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Folglich es gilt:

9. Satz. Die Abbildung $F : (a_{ij}) \rightarrow (a_{(m,n)}); a_{(m,n)} = a_{ij,kl} = \begin{vmatrix} a_{ik}, a_{il} \\ a_{jk}, a_{jl} \end{vmatrix};$ wobei, wenn $m, n := 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dann entsprechend $i, j; k, l := 0, 1; 0, 2; 0, 3; 2, 3; 3, 1; 1, 2$ die den Matrizen viertes Grades (a_{ij}) die Matrizen sechstes Grades zuordnet, hat die folgende Eigenschaft: wenn $|(a_{ij})| \neq 0$ dann $|(a_{(m,n)})| \neq 0$.

Man kann fragen, ob die Abbildung F die Gruppenoperation d.h. die Multiplizierung der Matrizen behält? Diese Frage bejaht der folgende.

10. Satz. Wenn

$$F : (a_{ij}) \rightarrow (a_{(m,n)}) \text{ und } F : (b_{ij}) \rightarrow (b_{(m,n)}) \text{ dann} \\ F : (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) \rightarrow (a_{(m,n)}) \cdot (b_{(m,n)}).$$

Beweis. Das Produkt der Matrizen (a_{ij}) und (b_{ij}) - die Matrix (c_{ij}) hat $c_{ij} = \sum_{h=0}^3 a_{ih} b_{hj}$. Die Abbildung F zuordnet der Matrix (c_{ij}) die Matrix $(c_{(m,n)})$, für die

$$\begin{aligned} c_{(m,n)} = c_{ij,kl} &= \begin{vmatrix} c_{ik}, c_{il} \\ c_{jk}, c_{jl} \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{u=0}^3 a_{iu} b_{uk} \right) \left(\sum_{v=0}^3 a_{jv} b_{vl} \right) - \left(\sum_{u=0}^3 a_{iu} b_{ul} \right) \left(\sum_{v=0}^3 a_{jv} b_{vk} \right) \\ &= \sum_{\substack{u=0 \\ v=0}}^3 a_{iu} a_{jv} (b_{uk} b_{vl} - b_{ul} b_{vk}) \\ &= \sum_{\substack{u=0 \\ v=0}}^3 a_{iu} a_{jv} |b_{uk}, b_{ul} b_{vk}, b_{vl}|. \end{aligned}$$

Das Produkt der Matrizen $(a_{(m,n)})$ und $(b_{(m,n)})$ - die Matrix $(\bar{c}_{(m,n)})$ hat das allgemeine Element

$$\begin{aligned} \bar{c}_{(m,n)} &= \sum_{g=0}^5 a_{(m,g)} b_{(g,n)} \\ &= \sum_{uv:=01,02,03,23,31,12} (a_{iu} a_{ju} b_{uk} b_{ul} - a_{iu} a_{ju} b_{uk} b_{ul} \\ &\quad + a_{iu} a_{jv} b_{uk} b_{vl} - a_{iu} a_{jv} b_{ul} b_{vk} + a_{iv} a_{ju} b_{vk} b_{ul} \\ &\quad - a_{iv} a_{ju} b_{uk} b_{vl} + a_{iv} a_{jv} b_{vk} b_{vl} - a_{iv} a_{jv} b_{vk} b_{vl}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=v=0,1,2,3} (a_{iu}a_{jv}b_{uk}b_{vl} - a_{iu}a_{jv}b_{ul}b_{vk}) \\
&+ \sum_{uv=01,02,03,23,31,12} (a_{iu}a_{jv}b_{uk}b_{vl} - a_{iu}a_{jv}b_{ul}b_{vk}) \\
&+ \sum_{uv=10,20,30,32,13,21} (a_{iu}a_{jv}b_{uk}b_{vl} - a_{iu}a_{jv}b_{ul}b_{vk}) \\
&= \sum_{u=0}^3 a_{iu}a_{jv} |b_{uk}, b_{ul}b_{vk}, b_{vl}| = c_{(m,n)}.
\end{aligned}$$

Von den Sätzen 9. und 10. folgt, dass die Abbildung F die volle Gruppe Γ^3 der projektiven Abbildungen des P_3 (d.h. die Gruppe der Kollineationen des P_3) in eine Gruppe $\overline{O}(Q)$ der projektiven Abbildungen des P_5 überführt. Die Abbildungen, die der Gruppe $\overline{O}(Q)$ gehören sind natürlich die Autokollineationen der Quadrik Q .

Man kann fragen, ob die Gruppe $\overline{O}(Q)$ die volle Gruppe $O_5(Q)$ der Autokollineationen Q in P_5 ist? Es zeigt sich, dass die Antwort negativ ist.

Aus dem Satz 2 auf der Seite 233 in [2] folgt, dass die Menge aller Ebenen auf Q in zwei Klassen zerfällt. Und aus dem Satz in 51.4 in [2] folgt, dass die Autokollineationen welche die oben erwähnte Klasse von Ebenen als ganze je in sich überführen eine Untergruppe $Q_5^+(Q)$ der Gruppe $O_5(Q)$ bilden. Aus den Überlegungen in 44 in [1], besonders aus 44.6, folgt, dass die Abbildung f die Menge aller Geraden die durch einen bestimmten Punkt in P_3 gehen in die Menge der Punkten einer bestimmten Ebene auf Q überführt. Und analogisch, die Menge aller einer festen Ebene in P_3 gehörenden Geraden ist durch f überführt auch in die Menge der Punkten einer Ebene auf Q .

Die Abbildung F behält die Gruppenoperation d.h. die Superposition der projektiven Abbildungen. Demnach die Menge der Ebenen auf Q zerfällt bei $\overline{O}(Q)$ in zwei trennbare Scharen, was ist charakteristisch für $O_5^+(Q)$. Also, es gilt:

11. Satz. Die Abbildung $F : (a_{ij}) \rightarrow (a_{(m,n)})$ ist der Isomorphismus der Gruppe Γ^3 aller projektiven Abbildungen des P_3 in sich mit der Gruppe $O_5(Q)$ der Autokollineationen Q , die die Teilung der Menge aller Ebenen von Q in zwei trennbare Scharen behält.

Obenstehender Satz deckt sich teilweise mit dem bekannten Satz über eindeutige Korrelation der Gruppe Γ^n aller Kollineationen des P_n mit der Untergruppe der Autokollineationen der Grassmannschen Manigfaltigkeiten $G_{n,h}$. In unserem Fall, wo $G_{n,h} = G_{3,1} = Q \subset P_5$, haben wir bewiesen, dass die Abbildung F , explizite definiert in 7. nicht nur eindeutige Zuordnung der Gruppen bestimmt sondern behält die Superposition der Abbildun-

gen. Außerdem der Satz 11. präzisiert, welche Gruppe der Autokollineationen der Quadrik Q als Bild der Gruppe aller Kollineationen ist.

Literatur

- [1] H. Busemann, P.J. Kelly, *Projective geometry and projective metrics*. Academic Press Inc., New York, 1953.
- [2] W. Burau, *Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie*. D.V.W., Berlin, 1961.
- [3] W.V.D. Hodge, D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*. Cambridge, 1947.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
WARSAW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
00-661 WARSAW, POLAND

Received February 23, 1996.