Carl Siegel zum 100. Geburtstag

von Renate Tobies

Carl Ludwig Siegel (1896–1981) war einer der bedeutendsten Zahlentheoretiker dieses Jahrhunderts. Über sein Leben und Werk liegen einige Veröffentlichungen vor. [Hlawka 1982 und 1985] [Schneider/Klingen/Rüßmann 1983] (Vgl. auch [Braun 1990]) Das Jubiläum seines 100. Geburtstages, der sich am 31. Dezember 1996 jährt, ist es wert, die Materialien aus der bisher nicht ausgewerteten Promotionsakte¹ vorzustellen.

Carl Siegel reichte am 17. Februar 1920 an der Georg-August-Universität Göttingen das Gesuch ein, zur mündlichen Doktorprüfung zugelassen zu werden. Dem Gesuch fügte er folgenden Lebenslauf bei:

„Ich, Carl Siegel, preußischer Staatsangehöriger, Sohn des Briefträgers Peter Siegel, bin geboren am 31. December 1896 zu Berlin. Ich besuchte die Friedrichs-Werdersche Oberrealschule in meiner Heimatstadt und legte Michaelis 1915 die Reifeprüfung ab. Bis Ostern 1918 war ich an der Universität Berlin immatrikuliert. Dort hörte ich Vorlesungen der Herren Frobenius², E. Jacobsthal³, Knopp⁴, Planck⁵, Riehl⁶, Rothe⁷, Rubens⁸, Schottky⁹, I. Schur¹⁰, Schwarz¹¹, Witt¹².

Während des Winter-Semesters 1917–18 war ich Assistent von E. Schmidt¹³ in Berlin.

Ein Versuch, mich für militärische Zwecke zu verwenden, hatte eine psychische Erkrankung zur Fol-

ge, die mich nötigte, meine Studien von Januar 1918 bis Ostern 1919 zu unterbrechen. Seitdem bin ich in Göttingen immatrikuliert, wo ich bei den Herren Bernays¹⁴, F. Bernstein¹⁵, Hartmann¹⁶, Hecke¹⁷, Landau, Schmeidler¹⁸ und bei Fräulein Noether¹⁹ gehört habe.“

Siegel hatte insgesamt sieben Semester studiert, fünf in Berlin, zwei in Göttingen, bevor er seine Dissertationsschrift „Approximation algebraischer Zahlen“ der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen vorlegte. Edmund Landau (1877–1938)²⁰, der 1909 als Nachfolger Hermann Minkowskis (1864–1909) von Berlin nach Göttingen gekommen war, hatte den Entwicklungsweg von Siegel schon lange verfolgt, weil dieser der einzige Sohn des im Hause seines Vaters in Berlin verkehrenden Briefträgers war.²¹ Landau beurteilte die Dissertation am 18. Mai 1920 sehr ausführlich. Das Gutachten hat folgenden Wortlaut:

„Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl. Ein klassischer, aber sehr leicht beweisbarer Satz von Liouville besagt:

Es gibt ein $c = c(\xi) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{c}{y^n}$$

nur endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt. Hier-
auf hat 1908 der Norweger Thue²² eine der grössten
zahlentheoretischen Entdeckungen gemacht, indem
er bewies, dass für jedes $\delta > 0$ sogar die Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^{\frac{n}{2}+1+\delta}}$$

nur endlich viele Lösungen besitzt. Er hat also, rund
ausgedrückt, den *Faktor* 1 bei n auf $\frac{1}{2}$ herabgedrückt.
Thue konnte hieraus auf wenigen Zeilen folgern, dass
die diophantische Gleichung $U(x, y) = 0$, wo U ein
homogenes irreduzibles Polynom vom Grade ≥ 3 ist,
stets nur endlich viele Lösungen hat. Speziell dieser
Wortlaut hat Thues Namen berühmt gemacht. Ganz
überraschend und verblüffend war mir nun zu erfah-
ren, dass ein Berliner Student, eben dieser Herr Sie-
gel, (in seinem 3. Studiensemester!) selbständig ge-
funden hatte, dass durch Verschärfung der Thueschen
Methode die *Grössenordnung* n herabgedrückt wer-
den kann, auf $\sqrt{n}$. Er bewies, dass die Ungleichung

$$\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^{2\sqrt{n}}}$$

nur endlich viele Lösungen hat. Dies liefert die ent-
sprechenden Folgerungen über diophantische Glei-
chungen. Sein Beweis ist lang; alle ursprünglichen
Unrichtigkeiten konnte er in Ordnung bringen. Dies
allein wäre schon eine hochbedeutende Dissertation
gewesen. Die Berliner Kollegen gelangten nicht zum
Verständnis des Siegelschen Beweises²³, und ich liess
ihn zur Promotion herkommen.

Die vorliegende Dissertation geht noch weit über
das genannte hinaus. Vor allem untersucht er mit
gleichem Erfolg Approximationen algebraischer Zah-
len durch algebraische (nicht nur rationale) Zahlen
und zieht daraus die wichtigsten Folgerungen in dem
bisher unerforschten Gebiet der dioph.[antischen]
Gl.[eichungen], deren Koeffizienten und Unbekann-
te beliebigen alg.[ebraischen] Zahlkörpern angehören.
Von seinen vielen Sätzen hier ein Bild zu geben [,]
würde zu weit führen. Ich erwähne daher nur eine Fol-
gerung, die er aus seinen Körpersätzen auf ein Pro-
blem der elementaren Zahlentheorie zieht, welches
bisher allen Anstrengungen getrotzt hatte. Gauss
hatte vermutet, dass für jedes ganzzahlige $k > 0$ der
grösste Primfaktor von $x^2 + k^2$ mit x über alle Gren-
zen wächst. Bewiesen hat dies erst Polya²⁴ durch An-
wendung des Thueschen Satzes und eine weitere feine
Schlusskette. Siegel beweist sogar: Für jedes ganz-
zahlige Polynom $f(x)$, welches nicht lauter gleiche
Wurzeln hat, strebt der grösste Primteiler mit x ins
Unendliche. Und vieles mehr.

Unsere Fakultät kann stolz darauf sein, dass eine
solche Arbeit unter ihren Auspizien als Dissertati-
on erscheint. Ich gebrauchte (obgleich ich sein älter-
es Manuskript über die *rationalen* Approximationen

längst durchstudiert hatte und durch ihn in einwand-
freie Form hatte bringen lassen) so lange Zeit zur
Durchsicht, weil bei der Ausdehnung auf Zahlkörper
Verf.[asser] einen Fehlschluss gemacht hatte, zu des-
sen Entfernung er Teile neu redigieren musste; der
Wert seiner Ergebnisse scheint mir aber trotz aller
vorangegangenen Entgleisungen (die er ja selbständig
reparieren konnte) so gross, dass ich die Zulassung
zum mündlichen Examen mit dem Prädikat I (aus-
gezeichnet) beantrage. Landau.“

Siegel erhielt das hier vorgeschlagene Prädikat
ausgezeichnet (1) für seine Dissertation und absol-
vierte am Mittwoch, den 9. Juni 1920, die mündli-
che Doktorprüfung. Vorsitzender der Prüfungskom-
mission war der Astronom Johannes Hartmann. Sie-
gel wählte mathematische Analysis, Astronomie und
Physik als Prüfungsfächer. Die Prüfungsgegenstände
und Urteile sind im Protokoll genau festgehalten und
dokumentieren Siegels vornehmlich theoretische In-
teressen.

Als erster prüfte Landau in mathematischer Ana-
lysis von 18.07 bis 19.00 Uhr und notierte:

„Taylorscher Satz im Reellen und Komplexen.
Perfekte Mengen, Mächtigkeit. Kontinuumspro-
blem. Wohlordnung. Jordankurve. Funktionen unbe-
schränkter Variation. Lebesguescher Integralbegriff,
Fouriersche Reihen. Fejérscher Satz. Summierbare di-
vergente Reihen: Cesáro, Hölder, Borel. Gleichmässige
Konvergenz. Nichtfortsetzbare Funktionen. Mo-
dulfigur. Schwarzsches Spiegelungsprinzip. Potenz-
reihen auf Rand. Riemannsche Flächen. Geschlecht
einer Riemannschen Fläche, einer algebraischen Kur-
ve. Uniformisierung. Reguläres n -Eck. Casus irredu-
cibilis. Variationsrechnung. Dirichletsches Prinzip.
Axiom der Geometrie, insbes. Parallelenaxiom, Ar-
chimedisches Axiom. Flächenkrümmung. Minimal-
flächen. Evoluten. Idealäquivalenz. Endlichkeit der
Klassenzahl. Zusammenhang zwischen quadratischen
Formen und Körpern. Heckesche Fortsetzung der Zeta-
funktion. Norm. Galois' Hauptsatz. Sylowscher
Satz. Einfache Gruppen. Ikosaeder und Gleichung
5. Grades. Hypergeometrische Reihen. Fuchs' Exi-
stenzsatz bei linearen Differentialgleichungen. Mon-
odromiegruppe und Transformationsgruppe. Ortho-
gonale Matrix. Projektive und affine Transformati-
onen. Hauptsätze von Hilbert und Schmidt über
Integralgleichungen, insbes. Hilberts 4. Note. Alge-
braische Funktionen. Frobenius' Satz über hyper-
komplexe Zahlen. Schurs Arbeit über Gruppencha-
raktere. Burnsides Satz über $p^\alpha q^\beta$. Carathéodorysche
Ungleichung.

Überall grundsätzliche Kenntnisse und tieferes
Verständnis. Ausgezeichnet. Landau.“

Über die zweite Prüfung in Astronomie, die von
19.00 bis 19.30 stattfand, schrieb Hartmann:

„Bestimmung der großen Breite und Länge auf dem Lande und zur See, Definition der Zeit. Theorie der Fehler einfacher astronomischer Instrumente, Universal, Äquatoreal, Meridiankreis. Refraktion, Parallaxe, Venusdurchgänge. Lambertscher Cosinussatz, Albedo nach Lambert und Seeliger.

Die Kenntnisse sind gut. Hartmann“

In Physik prüfte Carl Runge (1856–1927), der seit 1904 Professor für angewandte Mathematik an der Göttinger Universität war, der erste ordentliche Professor für dieses Gebiet an einer deutschen Universität überhaupt. Die Professur für theoretische Physik war gerade unbesetzt. Peter Debye (1884–1966) war einem Ruf an die Universität Zürich gefolgt. Max Born (1882–1970) und James Franck (1882–1964) hatten ihre Professuren noch nicht angetreten. Carl Runge prüfte in Physik von 19.30 bis 20.00 Uhr und hielt fest:

„Gleichgewicht. Minimum des Potentials. Niveauflächen. Lagrangesche Gleichungen. Wirbelsätze. Divergenz der Geschwindigkeit. Van der Waal'sches Gesetz. Kinetische Gastheorie. Entropie. Maxwell'sche Gleichungen. Relativitätstheorie.

Die physikalische Anschauung fehlt gänzlich. Die Kenntnisse sind nur formal mathematisch.

Genügend. C. Runge.“

Als Gesamtergebnis erhielt Siegel die Note sehr gut (2) für die mündliche Prüfung.

Im Herbst 1920 übernahm Siegel einen Lehrauftrag an der Universität Hamburg. Er schrieb darüber in seinem Lebenslauf, den er mit dem Gesuch um Erteilung der *Venia legendi* für Mathematik am 11. August 1921 in Göttingen einreichte:

„Ich hielt dort während des Winters 1920/21 eine sechsstündige Vorlesung über Integralrechnung mit Übungen, kam aber leider in meinen eigenen Untersuchungen wegen Schwierigkeiten jeder Art in Hamburg nicht vorwärts.“ [UAG Habilitationsakte, Bl. 15]

Landau gelang es, Siegel wieder in Göttingen unterzubringen; im April 1921 wurde er Assistent von Richard Courant (1888–1972) und reichte bereits im August seine Habilitationsschrift ein. Im Lebenslauf vom 11. August 1921 beschrieb Siegel seinen wissenschaftlichen Werdegang wie folgt:

„Die Art meiner wissenschaftlichen Betätigung wurde bestimmt durch eine Vorlesung über Zahlentheorie, die ich zu Beginn meines Studiums bei Frobenius hörte. Zuerst interessierte mich mehr die algebraische Richtung der Zahlentheorie, sowie auch Gruppentheorie. Als ich dann durch eingehende Beschäftigung mit Funktionentheorie die mächtigen Hilfsmittel kennen gelernt hatte, mit denen sie insbesondere die Theorie der algebraischen Zahlkörper fördert, wandte ich mich mehr der analytischen Zahlentheorie zu. Momentan begründe ich die Anfänge

einer additiven Theorie der Zahlkörper, deren erste Sätze in meiner Habilitationsschrift entwickelt werden.“ [UAG Habilitationsakte, Bl. 16]

Die Kommission, welche die mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung der philosophischen Fakultät zur Beurteilung des Gesuchs von Siegel einsetzte, bestand aus den Mathematikern Landau, Courant, Hilbert und Runge, dem Physiker Max Born und zwei weiteren Naturwissenschaftlern. Sie äußerten sich alle ausschließlich positiv. Einem wiederum ausführlichen Urteil von Landau schlossen sich die anderen Kommissionsmitglieder an. Landau führte am 13. November 1921 u.a. aus:

„Die Fakultät kennt meine Meinung über Herrn Siegel aus Verhandlungen über Stipendien und meinem vorjährigen Gutachten über seine Dissertation. Inzwischen hat er alle Erwartungen, die ich (mich rühmend, ihn entdeckt und nach Göttingen verpflanzt zu haben) auf ihn setzte, noch weit übertroffen. Die kleine Zahl der Sachverständigen in seinen verschiedenen Forschungsgebieten sieht in dem 24jährigen Jüngling den kommenden Mann der nächsten Generation und den Stolz der deutschen Wissenschaft ...“ [UAG Habilitationsakte, Bl. 18]

Landau besprach in seinem Gutachten die bisherigen Publikationen Siegels, betonte insbesondere sein Eindringen in die Hardy-Littlewoodschen Ideen zur additiven Zahlentheorie, den Einfluß von Arbeiten Erich Heckes und daß Siegel „... in erstaunlichem Masse aus der grossen modernen mathematischen Literatur das wenige Gute herausgefunden und in kürzester Zeit mit einander vereint und vertieft hat“. [Ebenda, Bl. 19]

Landaus Ausführungen über Siegels Lehrtätigkeit und über Siegel als Mensch ergänzen das Bild treffend:

„Er weiss aber nicht nur sehr viel; er trägt auch glänzend vor, wie ich aus Seminarvorträgen und Vorträgen in der math.[matischen] Gesellschaft und anderwärts weiss. Koll. Courant, der ihn auf meine Bitte hin als Assistenten genommen hat, wird ja selbst über seine guten Erfahrungen mit ihm beim Unterricht unserer Studenten und bei gemeinsamer Arbeit berichten.

Er kann nicht nur andere gut belehren, sondern hat auch, wenn man ihn belehrt, eine phänomenal rasche Auffassungsgabe und scharfe Kritik.

Er ist ein sehr guter und anständiger Mensch, scheut jedes Lob und jede Öffentlichkeit; wir mussten ihm stark zureden, bis er sein Habilitationsgesuch einreichte. Am liebsten würde er, wenn er finanziell dazu in der Lage wäre, Privatgelehrter bleiben und von früh bis spät für die reine Wissenschaft arbeiten. Er ist ein sonderbarer Mensch; aber welcher Mathematiker wäre das nicht?“ [UAG, Habilitationsakte, Bl. 19v]

An Courants Ausführungen vom 14. November 1921 ist besonders bemerkenswert, daß sie bereits auf Siegels über Zahlentheorie hinausgehende Interessen verweisen. So schrieb er u.a.:

„Wenn seine sehr zarte seelische Konstitution nicht durch die Belastungen des Berufslebens zu stark affiziert werden wird, so darf die Wissenschaft noch viele ausserordentliche Leistungen von ihm erwarten. Sein Arbeitsgebiet, die Zahlentheorie, ist nicht der einzige Gegenstand, für welchen er ein tieferes Interesse zeigt: ich glaube, dass er sich später auch anderen Zweigen unserer Wissenschaft zuwenden wird, und weiss von ihm, dass zum Beispiel die Himmelsmechanik ihn stark anzieht ...

Es wird die Kollegen vielleicht interessieren, dass Siegel ein ausserordentlich allgemein gebildeter Mensch ist, der z. B. russische Litteratur im Originaltext liest ...“ [UAG, Habilitationsakte, Bl. 20]

Hilbert schloß sich Landau und Courant am 16. November 1921 „vollinhaltlich“ an und betonte: „Dass er freilich jetzt schon – womöglich noch vor seiner Habilitaion – eine Professur erhält, möchte ich ihm nicht wünschen.“ [Ebenda, Bl. 20v]

Auch Carl Runge, der Siegels Leistungen bei der mündlichen Doktorprüfung in Physik nur mit „genügend“ bewertet hatte, war nun zu einem abschließend lobenden Urteil gelangt. Er äußerte am 19. November 1921:

„Auch ich habe einen großen Eindruck von der wissenschaftlichen Bedeutung und Originalität und der feinen Menschlichkeit von Siegel erhalten. was die Universität tun kann, sein Wohlergehen zu fördern, kann ihr nur zum Nutzen und zum Ruhme gereichen.“ [Ebenda]

Siegel erhielt die *venia legendi* für das Gebiet der Mathematik mit Urkunde vom 10. Dezember 1921. Mit Schreiben vom 12. Februar 1922 beantragte die philosophische Fakultät, ihm einen „Lehrauftrag für höhere Zahlen und Funktionentheorie“ zu erteilen, insbesondere um seine finanzielle Situation zu verbessern. [UAG, Habilitationsakte, Bl. 27–28] Diese war schließlich gesichert, als er noch 1922 ordentlicher Professor an der Universität Frankfurt a.M. wurde.

Sein weiterer Weg ist in den vorliegenden Publikationen gut nachgezeichnet.

Anmerkungen

¹ [UAG] Phil. Fak. Prom. S. Vol. VIII, 1918–1922, Nr. 19. – Für die Unterstützung beim Studium dieser und weiterer Akten dankt die Autorin Herrn Dr. Hunger, Universitätsarchiv Göttingen.

² Georg Frobenius (1849–1917), o. Professor der Mathematik an der Universität Berlin seit 1892,

insbesondere maßgebliche Ergebnisse auf dem Gebiet der Gruppentheorie.

³ Ernst Jacobsthal (1882–1965), war Schüler von Frobenius, seit 1906 Privatdozent in Berlin und arbeitete besonders auf algebraisch-zahlentheoretischem Gebiet.

⁴ Konrad Knopp (1882–1957) hatte sich 1911 in Berlin habilitiert, trug insbesondere über Zahlentheorie vor. Sein Probenvortrag hatte den Titel „Betrachtungen über Zahlenfolgen, welche divergente Reihen bilden“. Vgl. [Biermann 1988, S. 366f.].

⁵ Max Planck (1858–1947) war als Nachfolger von Gustav Kirchhoff (1824–1887) 1889 auf den Lehrstuhl für theoretische Physik an die Universität Berlin gekommen.

⁶ Aloys Riehl (1844–1924), Philosoph, Vertreter der „realistischen“ Richtung des Neukantianismus.

⁷ Rudolf Rothe (1873–1942) war o. Professor an der TH Berlin und hatte daneben einen Lehrauftrag für Mathematik an der Universität vom SS 1915 bis SS 1919.

⁸ Heinrich Rubens (1865–1922), Professor der Physik, Strahlungsforschung.

⁹ Friedrich Schottky (1851–1935), Professor der Mathematik, war Weierstraß-Schüler und insbesondere auf dem Gebiet der Analysis tätig. Er war 1902 als Nachfolger von Lazarus Fuchs (1833–1902) auf massives Betreiben von Frobenius nach Berlin berufen worden. (Siehe [Biermann 1988, S. 164–170])

¹⁰ Issai Schur (1875–1941) war Schüler von Frobenius (Promotion 1901, Habilitation 1903 in Berlin) und nach einer Tätigkeit als Extraordinarius in Bonn seit 1916 a.o. und seit 1919 o. Professor in Berlin. Schur gilt als außerordentlich anregender Lehrer (Algebra, Zahlentheorie); seine bedeutendsten Leistungen erbrachte er auf dem Gebiet der Darstellungstheorie der Gruppen.

¹¹ Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) war Schwiegersohn des bekannten Mathematikers Ernst Eduard Kummer (1810–1893) und 1892 auf eine Professur nach Berlin gelangt. Seine wichtigsten Leistungen (Analysis) erbrachte er vor seiner Berliner Zeit.

¹² Damit ist der Chemiker Otto Nikolaus Witt (1853–1915) gemeint.

¹³ Erhard Schmidt (1876–1959), Schüler David Hilberts (1862–1943), gilt als Mitbegründer der Funktionalanalysis und der Theorie der Integralgleichungen. Er gelangte als Nachfolger von H. A. Schwarz 1917 als o. Professor der Mathematik an die Universität Berlin.

¹⁴ Paul Bernays (1888–1977) hatte 1912 mit einer zahlentheoretischen Arbeit bei Landau in Göttingen

gen. promoviert und kam, nach Habilitation in Zürich (1912), als Hilberts Assistent 1918 zurück nach Göttingen.

- ¹⁵ Felix Bernstein (1878–1956) hatte mit einer von Georg Cantor (1845–1918) angeregten Dissertation auf mengentheoretischem Gebiet in Göttingen promoviert und dann eine Hochschulkarriere auf dem Gebiet der Versicherungsmathematik und Statistik erreichen können. Vgl. [Tobies 1992].
- ¹⁶ Johannes Hartmann (1865–1936) war von 1909 bis 1921 o. Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen.
- ¹⁷ Erich Hecke (1887–1947), der 1910 in Göttingen bei Hilbert promovierte und sich 1912 dort mit der Arbeit „Über die Konstruktion relativ Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen“ habilitiert hatte, wirkte 1918/19 als o. Professor in Göttingen, bevor er einen Ruf nach Hamburg annahm.
- ¹⁸ Werner Schmeidler (1890–1969) habilitierte sich 1919 in Göttingen und war vor allem durch Landau und Emmy Noether geprägt worden.
- ¹⁹ Emmy Noether (1882–1935) hatte sich (im dritten Anlauf) 1919, noch vor der allgemeinen offiziellen Regelung für Frauen, habilitieren können und erhielt erst 1922 eine nichtbeamtete außerordentliche Professur.
- ²⁰ Landau hatte sich bereits 1901 in Berlin habilitiert. Über die Schwierigkeiten, ein Extraordinariat zu erlangen, und seine Lehrtätigkeit in Berlin siehe [Biermann 1988, S. 175–177]. Vgl. auch [Knopp 1951].
- ²¹ Dies schrieb Landau in seinem Gutachten für Siegel bei der Beantragung der Zulassung als Privatdozent. [UAG] Habilitationsakte, Bl. 18v.
- ²² Axel Thue (1863–1922). Alfred Brauers (1894–1985) Dissertation „Über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen“ (1928) knüpfte ebenfalls an Ergebnisse von Thue sowie von Siegel und Carl Runge an und wurde in Berlin von Issai Schur und Erhard Schmidt im Dezember 1927 mit „valde laudabile“ beurteilt. Das Gutachten ist abgedruckt in [Biermann 1988, S. 338–340].
- ²³ [Biermann 1988, S. 202] zitiert Edmund Hlawka [1985], daß man in Göttingen der Meinung war, daß die Berliner Siegels Bedeutung verkannt hätten und versucht dies damit zu widerlegen, daß er darauf verweist, daß Siegel 1922 bei Berufungsvorschlägen sehr positiv erwähnt wird. Zu diesem Zeitpunkt war dies allerdings nun nichts Besonderes mehr.
- ²⁴ George Polya (1887–1985), vielseitiger ungarischer Mathematiker, der nach Promotion 1912 ei-

ne Zeit lang in Göttingen studiert hatte.

Bibliographie

- [UAG] Universitätsarchiv Göttingen, Philosophische Fakultät, Promotionsakten, S, Vol. VIII 1918–1922, Nr. 19.
- [UAG] Universitätsarchiv Göttingen, Philosophische Fakultät, Habilitationen 1921/22.
- Biermann, Kurt-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810–1933. Berlin: Akademie-Verlag, 1988.
- Braun, Hel: Eine Frau und die Mathematik 1933–1940. Hrsg. v. M. Hoecher. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1990.
- Hlawka, Edmund: Nachruf auf Carl Ludwig Siegel. Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1982, S. 159–168.
- Hlawka, Edmund: Carl Ludwig Siegel (31.12.1896–4.4.1981). In: Journal of Number Theory, 20 (1985) No. 3, S. 373–404.
- Klingen, Helmut: Das Werk C. L. Siegels in der Funktionentheorie. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 85 (1983) S. 158–173.
- Knopp, Konrad: Edmund Landau. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 36 (1927) S. 332–348.
- Rüßmann, Helmut: Das Werk C. L. Siegels in der Himmelsmechanik. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 85 (1983) S. 201–206.
- Schneider, Theodor: Das Werk C. L. Siegels in der Zahlentheorie. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 85 (1983) S. 147–157.
- Siegel, Carl Ludwig: Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars. (Frankfurter Universitätsreden, H. 36) Frankfurt a.M. 1965.
- Tobies, Renate: Wissenschaftliche Schwerpunktbildung: der Ausbau Göttingens zum Zentrum der Mathematik und Naturwissenschaften. In: vom Brocke, B. (Hrsg.), Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftspolitik im Industriezeitalter. Das „System Althoff“ in historischer Perspektive. Edition Bildung und Wissenschaft. Hildesheim: Lax, 1991, S. 87–108.
- Tobies, Renate: Bemerkungen zur Biographie von Felix Bernstein und zur „angewandten Mathematik“ in Göttingen. In: PANEM & CIRCENSIS (Mitteilungsblatt des Fördervereins für Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik, Göttingen), Beilage zu Heft 4, 1992, S. 1–34.
- Adresse der Autorin:
Dr. Renate Tobies
Universität Kaiserslautern
Mathematik
Postfach 30 49
67653 Kaiserslautern

Der Mathematiker Ludwig Schläfli

von Ruth Kellerhals

Die Bonner Antrittsvorlesungen im Rahmen des Habilitationsverfahrens in Mathematik haben eine gute Tradition. Der Vortrag von Frau Kellerhals vom 2. Februar 1996 hatte zudem als Anlaß das 100. Todesjahr von Ludwig Schläfli (15.01.1814–20.03.1895) und die Einweihung seines Grabsteins auf dem Bremgartener Friedhof in Bern am 18. März 1896, dem 100. Geburtstag von Jacob Steiner. Frau Kellerhals vermochte, das Lebenswerk und die Persönlichkeit eines großen Mathematikers aus dem letzten Jahrhundert nachzuzeichnen, und sie hat ihre Vorlesung freundlicherweise für die „Mitteilungen“ ausgearbeitet.

Stich mit Portrait von Schläfli¹

Nach einer Mitteilung von Prof. J. J. Burckhardt, einem der Herausgeber der *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* von Schläfli, wurde bei der Aufhebung des Friedhofs das Grabmal wahrscheinlich vernichtet.² Immerhin: Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG organisiert am 15./16. März 1996 ein Steiner-Schläfli-Gedenkkolloquium in Thun.

Schläflis gesamter Nachlaß wurde von seinem Schüler und späteren Nachfolger J. H. Graf gesammelt und katalogisiert. Nach Grafs Verzeichnis hat das Steiner-Schläfli-Komitee 60 der 65 mathematischen Arbeiten von Schläfli geordnet und in 3 Bänden *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* bei Birkhäuser Basel von 1950 bis 1956 herausgegeben. Leider sind die Abhandlungen heute vergriffen!

Von Graf stammt auch ein erster und sehr aufschlußreicher Aufsatz über das Lebenswerk seines Lehrers; einen zweiten hat J. J. Burckhardt 1948 verfaßt. Daneben gibt es aber nicht sehr viel Dokumentierendes über Schläfli. Ich stütze mich auf folgende Literatur:

Schläflis Grabstein¹

- Ludwig Schläfli: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 3 Bände, Birkhäuser, Basel 1950–1956.
- J. H. Graf: *Ludwig Schläfli* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern (1896), p. 118–203.
- J. H. Graf: *Die Exhumierung Jakob Steiner's und die Einweihung des Grabdenkmals Ludwig Schläfli's* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern (1897), p. 6–24.
- J. J. Burckhardt: *Ludwig Schläfli* Beiheft 4 zur Zeitschrift *Elemente der Mathematik*, Basel 1948.
- W. Rytz: *Prof. Ludwig Schläfli als Botaniker* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern (1919), p. 213–220.
- O. Schlaginhaufen: *Der Schädel des Mathematikers Ludwig Schläfli* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern (1931), p. 35–66.
- H. S. M. Coxeter: *Star polytopes and the Schläfli function $f(\alpha, \beta, \gamma)$* *Elemente der Mathematik* 44

(1989), p. 25–56.

- *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern (1897), p. 61–264.
- *Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley* Herausgeber J. H. Graf, K. J. Wyss, Bern 1905.
- *Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit C. W. Borchardt (1856–1877)* Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern (1915), p. 50–69.

Zum Artikel von Otto Schlaginhaufen, Professor der Anthropologie, möchte ich nur kurz folgende Bemerkungen machen:

Der Arbeit kann man neben vielem makaber Anatomischen entnehmen, daß Schläfli klein gewachsen war, nur knapp 1.60 m groß. Dagegen besaß er einen ungewöhnlich, ja pathologisch großen Hirnschädel (Kapazität 1800 cm³, Gewicht 1566 gr), mit ausgeprägter Stirnregion, was denn auch in seinem Reisepaß vermerkt worden ist, und große Augenhöhlen fielen auf.

Nach damaligen Untersuchungen besaß er das drittgrößte je gemessene Hirngewicht, und es ist der Reihenfolge nach größer als jenes von Lejeune Dirichlet, Gauß, Steiner und – abgeschlagen – Kant.

1. Die erste Lebenshälfte

Bevor ich zu den wissenschaftlichen Leistungen Schläflis komme, möchte ich kurz dessen ersten Lebensabschnitt skizzieren.

Ludwig Schläfli wurde am 15. Januar 1814 in Grasswil (Kanton Bern, Schweiz) geboren, als Sohn des Kaufmanns Johann Ludwig Schläfli und der Magdalena, geb. Aebi. Er wuchs als Ältester von drei Brüdern und einer Schwester in Burgdorf auf.

Seine mathematische Begabung trat schon früh in Erscheinung. So schreibt er im Rückblick Folgendes an seinen Freund Hugo Schiff in Florenz:

„An eine Autobiographie werde ich nicht Hand legen, denn mein Leben war zu unbedeutend; alle jungen Männer, mit denen ich fort und fort bekannt werde, haben mehr Bewusstsein, als ich im selben Alter gehabt habe. Das Wenige, was ich sagen kann, will ich Ihnen sogleich hin schreiben.

Als ich in die Bürgerschule kam und als unterster (kleinster, R.K.) auf der hintersten Bank sass, zeichnete der alte Lehrer auf meine Schiefertafel ein Quadrat und einen Kreis und zwar sehr gut und hiess mich das nachmachen und die Tafel damit füllen. Ich hatte daran eine unvergessliche Freude. – Die Ausziehung der dritten Wurzel lernte ich von einem Schwager meiner Mutter, der Weber und Trüllmeister, vielleicht auch Feldmesser war. Die Destillation und die Bereitung des Wasserstoffs aus Wasserdampf

Schläfli sitzend³

und glühendem Eisen erklärte mir ein Oheim, der Arzt war, und schloss mir damit eine neue Welt auf. Ein Schulkamerad, der von einem deutschen Schuhmacher (der, wie es scheint, Freude an der Erkenntniss der Natur hatte) ein Buch geliehen hatte, las aus demselben in der Schulstube vor der Ankunft des Lehrers die Kepler'schen Gesetze vor und sprach sich über die allgemeine Gravitation aus. Das wirkte wie ein Blitz in der Finsterniss.“

Sein Vater wußte aber lange nicht, was er aus seinem Sohn machen sollte. Zunächst dachte er an eine Art Hausierer: Mit einem Korb voll Waren sollte er die umliegenden Dörfer besuchen, die Preise der Gegenstände wurden ihm eingeschärft. Doch schon nach einer Woche kehrte er abgemagert und hungrig zurück, verkauft hatte er fast nichts, weil er nicht begreifen konnte, daß man eine Ware teurer verkaufe, als man sie eingekauft habe.

So ließ man denn Ludwig studieren !

Als 15jähriger erhielt er ein Stipendium, absolvierte das Gymnasium in Bern und studierte anschließend Theologie an der Universität Bern. Daneben vertiefte er sich aber mehr und mehr in die Mathematik. Bevor er sein Theologiestudium mit dem Staatsexamen 1838 abschloß, trat er, zunächst als Vikar, eine Lehrerstelle für Mathematik und Naturkunde an der Bürgerschule (Progymnasium) in Thun an, was ihm mehr behagte. Zum Pfarramt fühlte er sich nicht berufen. Seinen Eltern erklärte er, „er könne nicht alles glauben“.

Er unterrichtete 10 Jahre lang in Thun, und dies mit großem Erfolg, zumindest aus der Sicht seiner Schüler! In seiner wenigen Freizeit widmete er sich mit ganzem Eifer dem Studium der höheren Mathematik: So saß er regelmäßig ab 3 Uhr – morgens! – vor dem Unterricht am Schreibtisch und arbeitete.

Nebenbei, auch verbunden durch seine Lehrtätigkeit, interessierte er sich für Botanik und wurde zum anerkannten Experten. Davon zeugen zwei Vorlesungen über geometrische Botanik, welche er in den Jahren 1853/54 an der Universität Bern hielt, sowie wertvolle Aufzeichnungen über die Flora des Kantons Bern. Aufschlußreich ist auch der Artikel dazu von Prof. W. Rytz: *Prof. Ludwig Schläfli als Botaniker*.

Bei dem Autodidakten Schläfli wuchs langsam das Bedürfnis, bei den damaligen Kapazitäten der Mathematik, Steiner, Jacobi und Lejeune Dirichlet, zu lernen und Anregungen zu bekommen.

Als Jakob Steiner, der Professor in Berlin war, zu Besuch in Bern weilte, vermittelte ein gemeinsamer Bekannter ein Zusammentreffen der beiden. Steiner war sehr beeindruckt von Schläfli, seinen mathematisch profunden Kenntnissen und stichhaltigen Beweisführungen und seinem scharfen analytischen Verstand. Und er beschloß, sich Schläfli anzunehmen, dies allerdings auf seine eigene Weise: Steiner bot Schläfli an, ihn, Jacobi und Dirichlet nach Rom zu begleiten und den Winter 1843/44 dort zu verbringen. Da gäbe es genug Möglichkeit zum fachsimpeln. Seinen Kollegen dagegen erklärte er, daß er in Bern einen ländlichen Mathematiker kenne, für die Welt ein Esel und genialster Töpel, der ihm je vorgekommen sei, der aber Sprachen lerne wie ein Kinderspiel und den man somit als Dolmetscher mitnehmen könne! Tatsächlich findet man in Schläflis Nachlaß Notizen und Hefte mit Sprachstudien beispielsweise über (in alphabetischer Reihenfolge): Arabisch, Englisch, Französisch, Griechisch, Hebräisch, Italienisch, Koptisch, Neupersisch, Polnisch, Russisch, Sanskrit und Rigveda (über 90 Hefte), Schwedisch, Türkisch.

Dennoch kann die Reise nach Rom als wichtige Station und Wendepunkt im Leben Schläflis bezeichnet werden. Dort erhielt er täglich morgens Unterricht von Dirichlet in Zahlentheorie, und er übersetzte mathematische Arbeiten von Jacobi und Steiner ins Italienische.

Mit Steiner führte er im Anschluß einen intensiven Briefwechsel, der ihn mit mathematischen Hausaufgaben ständig eindeckte:

„Ihr letzter Brief vom 31. Juli 1851 hat mich herzlich gefreut; nur muss ich jetzt zu meiner Beschämung gestehen, dass ich an den darin angeregten schweren und schönen Sachen bis jetzt noch nicht gearbeitet habe, dass ich aber nun bald Fleiss darauf verwenden werde, darf ich jetzt um so mehr versprechen, weil ich unlängst (November) einen der

für mich seltenen glücklichen Augenblicke im Studium der Mathematik erlebt habe.

Entschuldigen Sie es mit meiner armseligen Lage, dem fast gänzlichen Mangel an geselligem Verkehr und der daraus hervorgehenden gedrückten Stimmung, dass ich fast den ganzen Sommer der morphologischen Botanik widmete.

Wenn ich nur wüsste, die reine Mathematik mit objektiver Wirklichkeit zu verbinden! Es war früher mein Wunsch, mathematische Physik zu studieren; aber wenn man nicht die Mittel hat, um eigene Versuche (zu machen), so ist da kaum etwas zu leisten.“

Zurück in Thun verspürte Schläfli zunehmend das Bedürfnis, sich ausschließlich der Mathematik zu widmen. Er bewarb sich um die *venia legendi* und eine Anstellung an der Universität Bern. 1848 wurde er zum Privatdozenten ernannt und erhielt ein bescheidenes Dozentenonorar von nur 400 Franken pro Jahr. Dazu gibt es folgende Anekdote: Die Steuerbehörde des Kantons Bern mochte nicht glauben, daß jemand von lediglich 400 Franken pro Jahr existieren könne, veranlagte ihn zum doppelten Gehalt und brummte ihm erst noch Verzugszins auf. Schläfli wehrte sich nicht. Die Universitätsbehörde stellte ihm aber eine Professur in Aussicht. Doch mit diesem Hungerlohn mußte er sich bis zu seiner Ernennung im Jahre 1853 zum außerordentlichen Professor über Wasser halten, eine Beförderung, die nur auf massiven Druck von Steiner erfolgte. Materiell war dies eine schwere Zeit für Schläfli. So schreibt er an das Erziehungsdepartement in Bern:

„Ich bin daher durch meine Habilitation an hiesiger Hochschule, zu welcher ich unter Eröffnung günstiger Aussichten von der Behörde aufgefordert worden, in der That in die drückendste Lage geraten.

Eigenes Vermögen habe ich nicht; das kleine Erbe, das mir von meinen Eltern selig zugefallen, habe ich seiner Zeit der Waisenbehörde von Burgdorf zur Unterhaltung meiner unglücklichen imbecillen Schwester abgegeben; beschränkt einzig auf das Honorar von 400 Franken, muss ich im eigentlichen Sinne des Wortes darben, nicht nur an meiner Person, was ich mit Freuden ertrüge, sondern auch an allen Hilfsmitteln meiner Wissenschaft.“

Seinen Unterhalt mußte er sich von 1854 bis 1860 zusätzlich mit Berechnungen für die Schweizerische Nationalversicherungskasse verdienen, was einen großen Teil seiner Energie in Anspruch nahm.

2. Übersicht über Schläflis mathematische Leistungen

Es ist unmöglich, einen vollständigen Einblick in Schläflis mathematische Werk zu vermitteln. Er war

sehr vielseitig tätig, und dementsprechend sind die *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* nicht nach Fachrichtung, sondern – bis auf wenige Ausnahmen – chronologisch angeordnet.

In den Abhandlungen fallen zwei dicke Arbeiten auf, beide stammen aus Schläflis mathematischer Jugendzeit:

1. Zur Eliminationstheorie und algebraischen Geometrie: *Über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen: Ein Beitrag zur Theorie der Elimination*, 1852 (104 Seiten).

2. Zur Geometrie in n Dimensionen: *Die Theorie der vielfachen Kontinuität*, 1850–1852 (239 Seiten).

Bevor ich etwas näher auf diese beiden fundamentalen Arbeiten Schläflis eingehe, möchte ich kurz einen Überblick über das weitere Schaffen geben:

• Zur Differentialgeometrie:

In der Arbeit *Nota alla memoria del Signor Beltrami: Sugli spazi di curvatura costante*, 1871, beweist er die Umkehrung eines Satzes von Beltrami, nämlich:

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ hat konstante Krümmung, falls in einem passenden Koordinatensystem die Geodätischen Geraden sind.

Ferner vermutet er, daß jede Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ in den $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ einbettbar ist. Diese Vermutung wurde 1926/27 von E. Cartan und M. Janet bewiesen.

• Zur Zahlentheorie:

Veröffentlicht hat Schläfli nur gerade eine Arbeit, *Über eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binären quadratischen Formen bezieht*, 1860. Doch in seinem Nachlaß (Landesbibliothek Bern) befinden sich viele wertvolle Aufzeichnungen und Ausarbeitungen, und wie bei Gauß, riesige Tabellen über binäre quadratische Formen

$$(a, b, c) := ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

mit Diskriminante $D := b^2 - ac$, sowie Klassifikationsresultate über reduzierte Formen zu gegebener Diskriminante modulo Äquivalenz. Insbesondere für $D > 0$ reichen seine Listen von $D = 75$ bis $D = 1006$ und sind weit umfangreicher als jene von Gauß, welche $D \leq 300$ und $800 \leq D \leq 1000$ umfassen. Schläflis Tabellen führen zu einigen Korrekturen in Gauß' Listen.

• Zur Funktionentheorie:

Bereits zu Lebzeiten sind Schläflis Arbeiten zur Funktionentheorie voll anerkannt worden. Seine zum Teil umfangreichen Veröffentlichungen behandeln die Theorie der Kugelfunktionen (60 Seiten), der Besselfunktionen, abelsche Integrale und die Gaußsche hypergeometrische Reihe. Für diese Reihe gibt er eine Integraldarstellung an:

Die *hypergeometrische Reihe*, die schon von Euler und Gauß studiert worden ist, ist für $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$c \notin -\mathbb{N} \cup \{0\}$, definiert durch

$$F(a, b; c; x) = \sum \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)} \frac{x^n}{n!},$$

$|x| < 1$, $(a, n) := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, und erfüllt die Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0.$$

Als Integral ist sie darstellbar durch

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_1^\infty u^{b-c}(u-1)^{c-a-1}(u-x)^{-b} du$$

für $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re}(c-a) > 0$.

Dabei zeigt sich immer wieder, welch hervorragender Analytiker Schläfli war, und wie geschickt er beispielsweise mit Integralen durch komplexe Integration umzugehen wußte. Dies beweist er in einer kleinen Veröffentlichung *Über den Gebrauch des Integrationsweges*, 1862, wo er etwa

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} a < 1,$$

berechnet und abschließend bemerkt:

„Die hier aufgeführten Beispiele stehen in allen Lehrbüchern, werden aber meist mit Hilfe von Doppelintegralen bewiesen. Ich wollte nur zeigen, daß man für diese Zwecke weder Doppelintegrale noch unendlichen Summen oder Produkte bedarf.“

• Zur Theorie der elliptischen Modularfunktionen:

Zu diesem Thema veröffentlicht Schläfli eine Arbeit, in seinem Nachlaß befinden sich wiederum umfangreiche Studien dazu, die von A. Häusermann in seiner Dissertation *Über die Berechnung singulärer Moduln bei L. Schläfli* (Zürich, 1943) durchgearbeitet worden sind. So stellt sich unter anderem heraus, daß Schläfli 1867, also 10 Jahre vor Dedekind, den Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe kannte.

Weitere Veröffentlichungen von Schläfli befassen sich mit:

- Elliptische Funktionen (Darstellung durch unendliche Doppelprodukte)
- Mechanik (zum Beispiel das sphärische Pendel)
- Himmelsmechanik (Planetenbahnen)

3. Die beiden großen Jugendarbeiten

I. Zur Arbeit über die *Eliminationstheorie* will ich nicht viel sagen. Sie ist von der Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlicht worden. Im zweiten Teil der Arbeit befaßt sich Schläfli mit Anwendungen für allgemeine algebraische Mannigfaltigkeiten und insbesondere für Flächen F^3 dritten Grades,

$$F^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\},$$

wobei

$$f(x, y, z) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq 3} a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad a_{ijk} \in \mathbb{R},$$

ein Polynom dritten Grades in den reellen Variablen x, y, z ist. Darauf aufbauend und inspiriert durch den Briefwechsel mit Steiner, der sich intensiv mit Kubiken (etwa die *Römerfläche*) beschäftigte und ihm auch von Cayleys Entdeckung der 27 Geraden auf einer glatten Kubik berichtete, befaßte sich Schläfli eingehend mit Kubiken.

In den zwei wichtigen Arbeiten *An attempt to determine the 27 lines upon a surface of third order, and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface*, 1858, und *On the distribution of surfaces of the third order into species, in reference to the absence or presence of singular points, and the reality of their lines*, 1863, klassifizierte er die Kubiken in Abhängigkeit der auftretenden Singularitäten und beschrieb die Konfiguration der 27 Geraden und seine Entdeckung des sogenannten *Doppelsechlers*, was ihm später den Steiner-Preis eintrug:

Die 27 Geraden können auf 72 Arten durch 6 paarweise windschiefe Geraden ausgezeichnet werden. Zu jedem solchen Sextupel $(1, \dots, 6)$ gibt es ein Gegenstück $(1', \dots, 6')$ windschiefer Geraden, welche zusammen einen der insgesamt 36 Doppelsechser bilden. Die 15 verbleibenden Geraden g sind durch ihr Schnittverhalten mit den Geraden $1, \dots, 6, 1', \dots, 6'$ eines Doppelsechlers eindeutig bestimmt, nämlich als $g = (ij) = \text{Gerade durch } i, i', j, j' \text{ für } i < j$.

Dies kann am schönen Beispiel der Clebschen Fläche nachvollzogen werden. Die Fläche von Clebsch kann in homogenen Koordinaten dargestellt werden durch

$$x_0^3 + \dots + x_4^3 = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$x_0 + \dots + x_4 = 0.$$

Eine Gipsnachbildung der Clebschen Fläche aus der Rodenberger Serie ist in einem Schauschrank des Mathematischen Instituts in Göttingen zu bestaunen. Von Gerd Fischer stammt folgende Photographie, die sich auf Seite 13 im Bildband des zweibändigen Werks *Mathematical Models* von Gerd Fischer (Vieweg-Verlag, 1986) befindet:

Im Verlauf dieser Forschungen entdeckte Schläfli offenbar als Erster die Nichtorientierbarkeit der projektiven Ebene, was er 1874 in einem Brief an F. Klein mitteilte.

II. Die *Theorie der vielfachen Kontinuität* titulierte Steiner begeistert die „weltumstürmende, erdewälzende“. Sie ist in den Jahren 1850–1852 entstanden ist. P.H. Schoute würdigt die Arbeit wie folgt:

Die Diagonalfäche von Clebsch

„Diese Abhandlung übertrifft an wissenschaftlichem Wert einen guten Teil von allem, was bis heute auf diesem Gebiet der mehrdimensionalen Geometrie erschienen ist.“

Schoute bedauert, daß die Arbeit nicht zu Lebzeiten Schläflis veröffentlicht werden konnte, mit den Worten:

„So erfuhr denn dieser das tiefe Leid, das dem zufällt, der seiner Zeit voraus ist: Die Früchte seiner reifsten Studien nicht weltbekannt machen zu können. Und hierfür wird der Erfolg der Einteilung der kubischen Flächen nur eine kleine Entschädigung gewesen sein, weil diese, so verdienstvoll sie auch sein möge, nach meiner Meinung lange nicht so von Genie spricht, wie die Theorie der vielfachen Kontinuität.“

Tatsächlich wurde die „Theorie“ oder ∞^n , wie Schläfli sie gelegentlich auch bezeichnete, abgesehen von wenigen Auszügen vollständig erst 1901 veröffentlicht: Die 239 Seiten dicke Arbeit, die schwierig zu lesen ist und keinerlei Illustrationen enthält, wurde wegen ihres Umfangs weder von der Akademie in Wien noch von Crelle's Journal akzeptiert, was Schläfli sehr unglücklich machte.

Zum Inhalt: Die Arbeit ist in 3 Teile aufgeteilt, und nach Schläflis Worten so „wie wenn man etwa in der Geometrie 1. die Gerade und Ebene, 2. den Kreis und die Kugel, 3. die Kurven und Flächen 2. Grades und endlich die infinitesimalen Eigenschaften der Kurven und Flächen überhaupt nacheinander behandeln würde.“

Ikosaeder, fotografiert bei der Hauptpost, Basel 1995

Im ersten Teil entwickelt Schläfli die Geometrie im euklidischen Raum der Dimension $n \geq 2$. Dazu gehören Untersuchungen über

- orthogonale Transformationen;
- die Definition des Abstands zwischen zwei Richtungen;
- Volumenformeln für Parallelotope und Pyramiden in Abhängigkeit der (Projektionen der) Kanten.

Zu den Hauptresultaten gehören zweifellos das n -dimensionale Analogon des Eulerschen Polyedersatzes und die Klassifikation und Konstruktion der *regelmäßigen Polytope im E^n* .

• *Der n -dimensionale Eulersche Polyedersatz:*

Es sei $P \subset E^n$ ein konvexes Polytop definiert als elementar-geometrische Summe von endlich vielen Simplexen. Es bezeichne

$$a_i = a_i(P) := \# \{ i\text{-dimensionale Seite von } P \},$$

$0 \leq i \leq n-1$, $a_n := 1$. Dann gilt:

$$a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n = 1.$$

Für $n = 3$ ist dies der wohlbekannte Satz von Euler-Descartes:

$$a_0 - a_1 + a_2 = 2.$$

• *Reguläre Polytope in E^n , $n \geq 2$:*

Ein *reguläres* Polytop kann induktiv wie folgt definiert werden:

Ein konvexes Polygon P heißt *regulär*, falls alle Kanten und alle Winkel gleich sind. Ist die Kantenzahl gleich p , so schreibt Schläfli kurz $P = \{p\}$.

Ein n -dimensionales Polytop P heißt *regulär*, falls alle Fazetten (Seiten der Dimension $n-1$) regulär und alle Eckenfiguren regulär sind. Dabei entsteht die Eckenfigur zur Ecke $v \in P$ wie folgt: Man trage gleiche Längen auf allen von v ausgehenden Kanten ab und bilde die konvexe Hülle der so entstehenden Endpunkte.

Man beachte, daß alle Fazetten und alle Eckenfiguren eines regulären Polytops gleich sind.

Schläfli führt dann folgende Bezeichnung für reguläre Polytope P_{reg} ein: $P_{\text{reg}} = \{p_1, \dots, p_n\}$, falls die Fazetten gegeben sind durch $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ und die Eckenfiguren durch $\{p_2, \dots, p_n\}$.

Beispiel: Das Ikosaeder $\{3, 5\}$ (vgl. Abb.).

Mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel und kombinatorischen Relationen zwischen den Zahlen a_i und p_j für $P_{\text{reg}} \subset E^n$ – zum Beispiel $p_2 a_0 = 2a_1 = p_1 a_2$ für $n = 3$ – erhält Schläfli durch Induktion folgende uns heute wohlbekannte Liste:

$n = 3 :$	$\{3, 3\}$	reguläres Tetraeder
	$\{4, 3\}$	regulärer Würfel
	$\{3, 4\}$	reguläres Oktaeder
	$\{3, 5\}$	reguläres Ikosaeder
	$\{5, 3\}$	reguläres Dodekaeder
$n = 4 :$	$\{3, 4, 3\}$	24-Zell
	$\{3, 3, 5\}$	600-Zell
	$\{5, 3, 3\}$	120-Zell
$n \geq 4 :$	$\{3, \dots, 3\}$	reguläre Pyramide
	$\{3, \dots, 3, 4\}$	reguläres Kreuzpolytop
	$\{4, 3, \dots, 3\}$	regulärer Hyperwürfel

Weiter findet Schläfli 4 der insgesamt 10 regelmäßigen Sternpolytope, die schon von Kepler und Poinot entdeckt und von Hess schließlich vollständig klassifiziert worden sind.

Im zweiten Teil beschäftigt sich Schläfli mit n -dimensionaler sphärischer Geometrie. Er führt zunächst sphärische Koordinaten ein und betrachtet dann bald das Volumenfunktional auf der Menge der Simplexe auf der Sphäre S^n ($n \geq 2$).

Es sei $S \subset S^n \subset E^{n+1}$ ein Simplex berandet von $n+1$ Hyperebenen $H_i \cap S^n$, $H_i \subset E^{n+1}$ mit $H_i = e_i^\perp$, und mit Keilwinkeln $\alpha_{ij} = \angle(H_i, H_j)$. Die Keilwinkel von S treten an den Seiten $F_{ij} = H_i \cap H_j \cap S$ auf.

Schläfli beweist nun folgenden fundamentalen Satz:

Schläflis Differentialformel:

$$d\text{vol}_n(S) = \frac{1}{n-1} \sum_{i < j} \text{vol}_{n-2}(F_{ij}) d\alpha_{ij},$$

$$\text{vol}_0(\{\text{Pkt}\}) := 1.$$

Insbesondere für sphärische Dreiecke $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ gilt:

$$d\text{vol}_2(\Delta) = d\alpha + d\beta + d\gamma,$$

woraus man unschwer die bekannte Exzeßformel

$$\text{vol}_2(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

ableiten kann.

In einem Brief an Steiner schreibt Schläfli über seine Entdeckung:

„Ich glaube, den erwähnten allgemeinen Satz nicht zu überschätzen, wenn ich ihn dem Schönsten, was in der Geometrie geleistet worden ist, an die Seite stelle.“

Für diesen Satz gibt Schläfli zwei Beweise an, einen differentialgeometrischen und – 15 Jahre später – einen funktionentheoretischen. Der zweite Beweis befindet sich in einer Arbeit über Besselfunktionen, *Über die Entwickelbarkeit des Quotienten zweier bestimmter Integrale von der Form $\int dx dy \cdots dz$* , 1867, im dritten Band der Abhandlungen.

Die Differentialformel vereinfacht sich, wenn man die normierte *Schläflische Funktion* für Simplexes S

$$f_n = f_n(S) := \frac{2^{n+1}}{\text{vol}_n(S^n)} \text{vol}_n$$

benützt, welche $f_n = 1$ für orthogonale Simplexes (alle $\alpha_{ij} = \frac{\pi}{2}$) erfüllt. Damit folgt

$$df_n = \sum_{\sigma} f_{n-2}(\sigma) df_1(\alpha_{\sigma}),$$

wobei die Summe über alle $(n-2)$ -dimensionalen Seiten von S erstreckt wird, und α_{σ} den Keilwinkel an der Seite σ von S bezeichnet.

Für diese sphärische Simplexfunktion f_n beweist er im weiteren einige schöne Eigenschaften. Sind beispielsweise die Normalenvektoren e_i zu den benachbarten Hyperebenen von S so beschaffen, daß

$$e_0, \dots, e_m \perp e_{m+1}, \dots, e_n,$$

so gilt für $f(0, \dots, n) := f_n(S)$ die Produktregel

$$f(01 \cdots m)f([m+1] \cdots n) = f(0 \cdots n).$$

Mit diesen Eigenschaften und der Differentialformel gelangt Schläfli schließlich zum zweiten Hauptsatz:

Schläflis Reduktionsformel:

Für ein $(2n)$ -dimensionales sphärisches Simplex gilt:

$$f_{2n}(S) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \sum_V f_{2(n+k)-1}(V),$$

$$\sum f_{-1} := 1,$$

wobei V alle (sphärischen) Eckenfiguren der ungeraden Dimensionen $< 2n$ durchläuft, und die a_k gegeben sind durch *Tangentenzahlen*

$$\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

welche sich durch Bernoulli-Zahlen darstellen lassen als

$$a_k = 2^{2k+1} \cdot \frac{2^{2k+2} - 1}{k+1} \cdot B_{k+1} = 1, 2, 16, 17 \cdot 16, \dots$$

Beispiel: Für ein sphärisches Dreieck $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ ergibt sich $f_2(\Delta) = f_1(\alpha) + f_1(\beta) + f_1(\gamma) - 2$, d.h. $\text{vol}_2(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Es ist allerdings miraculös, wie Schläfli auf die Form der Koeffizienten a_k gekommen ist. Dahinter stecken viele Berechnungen, die im endgültigen und sehr eleganten Induktionsbeweis unterdrückt werden können. Denn dank der Differentialformel benötigt er lediglich eine gewisse Rekursionsformel für die Koeffizienten a_k .

Mit diesen Sätzen, der Differential- und der Reduktionsformel, ist Schläfli imstande, Volumenrelationen für seine *Orthoscheme* herzuleiten. Orthoscheme sind Simplexes beschrieben durch $n+1$ Vektoren $e_i \in E^{n+1}$ mit der Eigenschaft

$$e_i \perp e_j \quad \text{für} \quad |i-j| > 1.$$

Für die Keilwinkel folgt daraus, daß $\alpha_{ij} = \frac{\pi}{2}$ für $|i-j| > 1$. Orthoscheme sind somit gegeben durch höchstens n nicht-rechte Keilwinkel $\alpha_i := \angle(H_{i-1}, H_i)$ für $1 \leq i \leq n$. Sie bilden einen Polyederbaukasten.

In der heutigen modernen Sprache ausgedrückt ist er schließlich imstande, alle Kovolumina der endlichen Coxetergruppen mit linearem Coxeter-Schläfli-Diagramm

$$\circ \xrightarrow{p_1} \circ \cdots \circ \xrightarrow{p_n} \circ$$

zu berechnen. Zum Beispiel erhält er für $n \geq 1$:

$$f_n\left(\frac{\pi}{3}, \dots, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!},$$

$$f_n\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Schläfli vermutet, daß dies für $n \geq 4$ die *einzigsten* Formeln sind, worin sowohl die Argumente kommensurabel mit π , als auch die f_n -Werte rationale Zahlen sind. Diese Vermutung ist immer noch offen und – wie Schläfli selbst schon angedeutet hat – wohl sehr schwierig zu beweisen.

Im dritten Teil schließlich behandelt Schläfli verschiedene Anwendungen seiner Theorie auf quadratische Kontinua, er beweist Aussagen über die Hauptachsen, Mittelpunkte und konjugierte Durchmesser

solcher Gebilde und verallgemeinert einige bekannte Resultate von Monge, Chasles und Dupin von drei auf höhere Dimensionen. Neben Sylvester und Gauß kann er auch als Mitentdecker des Trägheitsgesetzes für quadratische Formen angesehen werden, für welches er einen Beweis mit Hilfe von Stetigkeitsbetrachtungen angibt.

Darauf möchte ich jetzt aber nicht weiter eingehen. Vielmehr möchte ich zum Schluß meiner Vorlesung über Schläflis zweite Lebenshälfte erzählen.

4. Die zweite Lebenshälfte

Schläflis Lebensumstände verbessern sich langsam. Nach seiner Berufung zum außerordentlichen Professor im Jahre 1853 wird er mit 54 Jahren zum Ordinarius befördert, und ab 1879 erhält er endlich ein einigermaßen standesgemäßes Gehalt.

Als Universitätslehrer setzt er sich sehr ein und ist überaus beliebt. Er unterrichtet durchschnittlich 10 Stunden pro Woche, und dies auf sehr lebendige Weise. Sein Schüler Graf berichtet dazu:

„Er bewegte sich mit jugendlicher Behendigkeit an der Wandtafel, und da er von kleiner Statur war, mußte er sich oft des Stuhles bedienen, um mächtige Ausdrücke von Formeln auf der Tafel unterzubringen. Er war ein fabelhafter Kopfrechner, und nach seinem eigenen Geständnis, arbeitete er jedes Kolleg (Vorlesung), wenn er es zum zweiten oder dritten Male hielt, neu um.“

Schläfli selbst schreibt Folgendes (Schläfli an C. W. Borchardt):

„Was die rein wissenschaftliche Tätigkeit betrifft, so steht ihr die allgemeine Ermüdung des Geistes, daher die Häufigkeit logischer Irrtümer und Schwerfälligkeit des Herauswindens aus wirklichen oder vermeintlichen Widersprüchen entgegen. Ich bin über pflichtmässige Unterrichtstätigkeit äusserst froh und bemühe mich, meine mathematische Hartnäckigkeit und Routine auf andere zu übertragen. Ich trachte immer im Unterricht so frisch und unmittelbar als möglich zu sein und, wenn es mir gelingt, mich in dieser Tätigkeit aufzubrechen, so will ich mich für glücklich halten.“

Schläfli hatte 12 Doktoranden, davon wurden 6 Universitätsprofessoren – eine für damalige und auch heutige Verhältnisse erstaunlich große Zahl. Steiner dagegen hatte keine eigenen, direkten Doktoranden.

Neben Graf möchte ich Schläflis Doktoranden Arnold Meyer nennen. Seine Dissertation über indefinite ternäre Formen wurde später für die Arbeiten von Martin Eichler sehr bedeutungsvoll.

Schläfli erfährt nun auch zunehmend und zahlreich *Ehrungen* aus dem In- und Ausland:

Die Schläflistrasse, Bern 1996

• 1863: Doctor honoris causa der philosophischen Fakultät Bern. Das Doktordiplom lautet ins Deutsche übersetzt wie folgt:

Diplom doctor honoris causa, 10. März 1863

„Der Senat der Universität Bern unter dem Rektorat von Ant. Biermer, o. Professor der Medizin, auf Anregung der philosophischen Fakultät und deren Dekan Moritz Lazarus, o. Professor der Philosophie, ertheilt dem hervorragenden und gelehrten Mann:

Ludwig Schläfli

Bürger von Burgdorf

*Diener des Göttlichen Wortes und
außerordentlicher Professor der Mathematik*

Honoris causa

*die Würden, die Rechte und die Privilegien eines
Doktors der Philosophie.*

Dies in Anbetracht von dessen staunenswerther und umfangreicher Gelehrsamkeit, welche die verschiedensten Wissenschaften, deren Beherrschung durch einen einzigen Mann kaum möglich zu sein scheint: Mathematik, Naturkunde, Theologie, alte und neue Sprachen, mit derselben Gründlichkeit umfaßt und welche durch Scharfsinn und Belesenheit hervorragende Veröffentlichungen nicht nur bei uns, sondern auch überall im Auslande bekannt gemacht und zur Anerkennung gebracht hat.“

• Korrespondierendes Mitglied von

- 1868: Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Mailand;
- 1871: Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen;
- 1883: Reale Academia dei Lincei, Rom.

• Als Zeichen der Anerkennung erhält Schläfli Geschenke von

- dem Institut de France: Werke von Cauchy;
- dem Kultusministerium Norwegens: Werke von Abel;
- der Berliner Akademie der Wissenschaften: Werke von Lejeune Dirichlet.

• 1883: Steiner-Preis von 600 Thalern (1 Thaler $\cong$ 15 Franken) von der Berliner Akademie der Wissen-

schaften für seine Arbeiten über die Kubiken.

• 1889: Ehrenmitglied des Komitees bei der 100-jährigen Gedenkfeier von N.I. Lobatschewskij.

Gesundheitlich geht es Schläfli im höheren Alter immer schlechter. 1891 läßt er sich deshalb pensionieren. Er leidet an Atemnot und Wassersucht, und eine alte Beinbruchverletzung, die er gedankenverloren beim Zusammenstoß mit einem Betrunkenen erlitten hat, fesselt ihn ans Bett. Bis zuletzt ist er geistig dagegen hellwach. Er stirbt am 20. März 1895.

Ich möchte meinen Vortrag schließen mit folgendem Auszug aus Grafs Gedenkrede bei der Denkmalseinweihung an Schläflis Grab am 18. März 1896:

„Und was war er als Mensch! So unscheinbar und bescheiden im Auftreten, eine wahre Gelehrtennatur, nur glücklich in der Stille des Studierzimmers. Wer sein Schüler sein durfte, weiss, welche Aufopferung und Hingebung, gepaart mit Herzensgüte, in diesem Manne wohnten. Sein gerader und offener Charakter verabscheute jede Ungerechtigkeit, am Vaterlande hing er treu, ihm wollte er dienen, darum allein schlug er die ehrenvolle Berufung in fremde Lande aus. Über sein Leben lässt sich das Motto setzen, das

in der Gratulationsschrift zu seinem 70. Geburtstage in Sanskrit geschrieben steht: Die Wissenschaft ist des Mannes schönste Schönheit, ein tief geborgener Schatz. Man darf wohl sagen, seit des unvergleichlichen Leonhard Euler's Tode hat kein Schweizer wie er das mathematische Wissen beherrscht und unter den zeitgenössischen Mathematikern kann man ihm nur Wenige, was die Mannigfaltigkeit der durchforschten Gebiete anbetrifft, an die Seite stellen.“

¹Die Abbildungen sind den beiden Artikeln von J. H. Graf entnommen; vgl. Literaturliste.

²Nachtrag: Das Grab Schläflis ist doch noch vorhanden. Die Konzession der Grabstätte Nummer 52 der Abteilung 9201 auf dem Bremgartener Friedhof läuft bis zum Jahre 2004.

³Reproduktion aus den Gesammelten Mathematischen Abhandlungen von Ludwig Schläfli, Band I, Seite 3, Birkhäuser, Basel 1950.

Adresse der Autorin:

Ruth Kellerhals

Mathematisches Institut, Universität Göttingen
Bunsenstr. 3–5, 37073 Göttingen

Euler-Vorlesung 1996

Am 10. Mai 1996 fand im Schloßtheater von Sanssouci die vierte Euler-Vorlesung statt, die gemeinsam von den Fachbereichen Mathematik der Universitäten in Berlin und Potsdam sowie dem Weierstraß-Institut und dem Konrad-Zuse-Zentrum veranstaltet wurde. Den zentralen Vortrag über „Graphs and their geometric representations“ hielt László Lovász von der Yale University. Vor diesem Vortrag gibt es traditionsgemäß eine historische Einführung und eine Laudatio auf den Referenten, in diesem Jahr wurden sie von Herbert Pieper und Martin Grötschel gegeben.

Die Eulersche Identität – eine Brücke zwischen Analysis, Arithmetik und Kombinatorik

von Herbert Pieper

In seiner Arbeit „Euler and the Jacobians of elliptic functions“ (1) aus dem Jahre 1983 beschrieb André Weil (geb. 1906), wie er sich 1947 beim Schreiben seines Buches über Abelsche Mannigfaltigkeiten darüber ärgerte, daß er eine bestimmte Aussage nicht zeigen konnte. Bei seinen Versuchen, die Lücke zu füllen, entdeckte er, daß eine Abhandlung von Charles Hermite (1822–1901) aus dem Jahre 1856 (2) die meisten der Formeln zur Behandlung eines ziemlich typischen Spezialfalls enthält. Hermites Ergebnisse von 1856 regten Weil 1954 zu einer Arbeit über die genannte Problematik an (3).

Weil gehört bekanntlich zu den wenigen produktiven Mathematikern, die in größerem Umfang selbst

mathematikhistorisch tätig sind. Ein Zeugnis dafür ist seine Monographie „Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre“ (4).

Wahrscheinlich bei der Vorbereitung dieses Buches fand Weil überraschenderweise alle für die 1954 behandelte Problematik entscheidenden Formeln schon bei Leonhard Euler (1707–1783). In seiner eingangs genannten Note beschrieb Weil Eulers Vorgehen und konnte mit den Worten schließen: „This completes the solution found in 1765 by Euler for a problem first formulated in 1954.“

Wie sagte doch Karl Weierstraß (1815–1897) im Jahre 1873 in seiner Ansprache bei der Übernahme des Rektorats der Universität zu Berlin (5): „In den