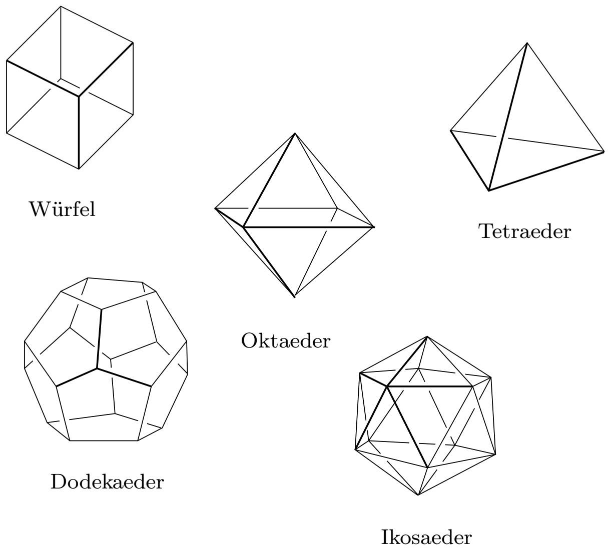
Symmetrie der Sphären

von Bernhard Hanke

Nach meiner Promotion im Bereich der algebraischen Topologie (Prof. R. Fritsch, Prof. V. Puppe) schloss ich mich der Arbeitsgruppe Geometrie und Topologie (Prof. D. Kotschick) an der LMU München an. Seit meiner Studienzeit interessiere ich mich besonders für das Zusammenspiel geometrischer und topologischer Methoden, die daraus resultierenden Fragestellungen und Anwendungen. Ausgehend von den gewöhnlichen Sphären, einem klassischen Objekt mathematischer Forschung, möchte ich im folgenden Beitrag mein Arbeitsgebiet vorstellen.

Eines der ältesten und schönsten Ergebnisse der Mathematik ist die Klassifikation der regulären dreidimensionalen Polyeder.



Bekanntlich heißt ein kompakter Polyeder $P \subset \mathbb{R}^3$ *regulär*, falls er konvex ist, seine Seitenflächen kongruente regelmäßige Vielecke sind und sich an jeder Ecke gleich viele Kanten treffen. Nach der Eulerschen Polyederformel sind für die Zahl e der Ecken und k der Kanten eines regelmäßigen Polyeders nur die Paare $(e, k) = (4, 6), (6, 12), (8, 12), (12, 30), (20, 30)$ möglich. Man überlegt sich nun zunächst, dass für jedes dieser Paare nur ein kombinatorischer Typ eines regelmäßigen Polyeders existieren kann, und realisiert diesen mittels einer expliziten geometrischen Konstruktion. Schließlich folgt aus dem Starrheitssatz von A. Cauchy [3], dass alle so erhaltenen Polyeder durch ihren kombinatorischen Typ bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt sind. Dieses Argument führt zu den obigen fünf wohlbekannten Exemplaren.

Alle regelmäßigen Polyeder können in die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ einbeschrieben werden. Diejenigen orientierungserhaltenden orthogonalen Transformationen dieser Sphäre (bzw. des umgebenden Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$), die die Menge der Ecken des Polyeders in sich selbst abbilden, bilden eine endliche Untergruppe von SO(3), die man auch als *Symmetriegruppe* des Polyeders bezeichnet.[1] Unter den regelmäßigen Polyedern gibt es zwei Paare von dualen Objekten: Die Mittelpunkte der Seitenflächen des Oktaeders sind die Eckpunkte eines Würfels, die des Dodekaeders die Eckpunkte eines Ikosaeders. Daher stimmen auch die entsprechenden Symmetriegruppen überein. Jede endliche Untergruppe von SO(3), die nicht eine der insgesamt drei Symmetriegruppen der regelmäßigen Polyeder ist, lässt eine Ebene durch den Ursprung invariant, wie eine explizite Klassifikation zeigt.[2] Zusammenfassend hat also jede endliche Untergruppe G von SO(3) genau eine der folgenden Gestalten: Entweder ist G eine der drei Symmetriegruppen der regelmäßigen Polyeder, oder es existiert eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, so dass G nur Rotationen um die Achse orthogonal zu dieser Ebene und Spiegelungen an Achsen durch diese Ebene enthält.

Wir wollen nun diese Symmetriebetrachtung in zwei Richtungen verallgemeinern. Als geometrisches Objekt wählen wir die n-dimensionale Einheitssphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(bezüglich der üblichen Euklidischen Norm). Als Symmetrien dieses Objektes lassen wir nicht nur orthogonale Transformationen zu, sondern beliebige Selbstdiffeomorphismen (d. h. umkehrbar unendlich oft differenzierbare Selbstabbildungen). Diese bilden eine Gruppe $\mathrm{Diff}(S^n)$. Unser Grundproblem ist damit das folgende:

Man klassifiziere die endlichen Untergruppen $G < \mathrm{Diff}(S^n)$.

Eine befriedigende Behandlung dieses Problems in dieser Allgemeinheit ist nicht zu erwarten. Das Studium einiger seiner Teilaspekte initiierte jedoch in der Topologie und Geometrie intensive Forschung, führte zu tiefliegenden Sätzen und ist nach wie vor Testfall und Motivation bei der Entwicklung neuer und der

1 Sie ist – nach dieser Beschreibung – bis auf Konjugation mit einem Element in SO(3) festgelegt.
2 In [18] wird diese Klassifikation durchgeführt. Dort findet sich auch – ebenso wie in [5] – eine allgemeinverständliche Einführung in das Thema Symmetrie.

Weiterentwicklung bewährter Methoden für das Studium differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Wir wollen einige dieser Aspekte und die damit verbundenen Techniken vorstellen:

- Geometrisierung in der dreidimensionalen Topologie und die Smith-Vermutung,
- Konstruktion freier Gruppenoperationen auf Sphären der Dimension größer oder gleich fünf durch Chirurgie,
- Eichtheorie und Restriktionen an mögliche Operationen endlicher Gruppen auf vierdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Im folgenden sagen wir im Falle $G < \mathrm{Diff}(S^n)$ auch, *G operiert* auf S^n. Diese Operation heißt *orthogonal*, falls bereits $G < \mathrm{O}(n+1) < \mathrm{Diff}(S^n)$. Die oben über die regelmäßigen Polyeder konstruierten Operationen sind orthogonal.

Die Smith-Vermutung

Ein wichtiger Spezialfall ist der einer endlichen zyklischen Symmetriegruppe G. Ist $f \in G$ ein Erzeuger, so heißt f auch *periodische Transformation* der Sphäre. Wir beschränken uns hier auf den orientierungserhaltenden Fall. Die lineare Algebra zeigt, dass orthogonale Transformationen dieser Art durch Rotation um einen Untervektorraum gerader Kodimension im $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeben sind.

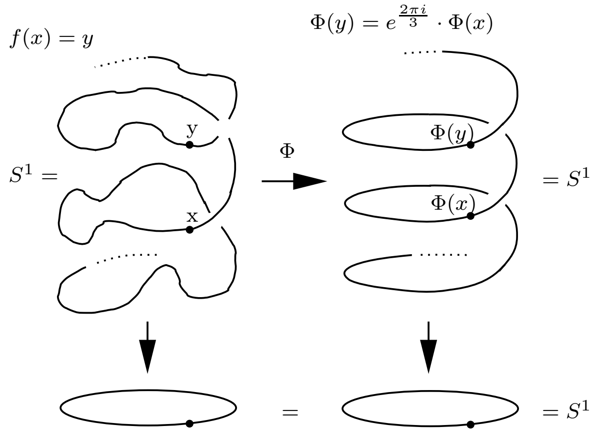
Es stellt sich nun die Frage, wie sehr sich beliebige periodische Transformationen von orthogonalen unterscheiden. Nicht jede periodische Transformation ist automatisch orthogonal: Falls $G < \mathrm{SO}(n+1)$, $n \geq 1$, mit Erzeuger f und $f \neq \mathrm{id}$, so existiert ein Diffeomorphismus $\Phi \in \mathrm{Diff}(S^n)$, so dass die Konjugation $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} \notin \mathrm{SO}(n+1)$. An der zugrundeliegenden periodischen Symmetrie von S^n ändert sich dabei nicht viel, nur der Blickwinkel auf diese Sphäre verschiebt sich. Im ein- und zweidimensionalen Fall ist die Situation nun klar:

Alle periodischen Transformationen der Kreislinie S^1 und der Sphäre S^2 sind in $\mathrm{Diff}(S^n)$ zu orthogonalen periodischen Transformationen konjugiert.

Den Fall der Kreislinie S^1 behandelt man wie folgt. Es sei r die Ordnung von G. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $r > 1$ an. Die Operation der Gruppe G ist durch einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $f : S^1 \to S^1$ mit $f^r = \mathrm{id}$ gegeben. Es folgt, dass $f(x) \neq x$ für alle Punkte $x \in S^1$ gelten muss. Der Raum

$$S^1/(x \sim f(x))\,,$$

der entsteht, indem man jeden Punkt auf S^1 mit seinem Bild unter f identifiziert, ist also wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und diffeomorph zu einer Kreislinie. Diesen Diffeomorphismus kann man zu einem Diffeomorphismus Φ der r-fachen Überlagerungen hochheben, die einmal durch die gegebene Operation und einmal durch die orthogonale Standardoperation (d. h. durch Drehung gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel $\frac{2\pi}{r}$) bestimmt sind. Konjugation mit Φ überführt dann die gegebene Transformation in diese Standardtransformation. In der folgenden Darstellung wurde $r = 3$ gewählt. Die oberen und unteren gestrichelten Teile jeder Figur sind zu identifizieren.



Im Falle der Sphäre S^2 folgt aus dem Fixpunktsatz von Lefschetz,[3] dass f genau 2 Punkte $A, B \in S^2$ festhält und alle anderen Punkte auf S^2 wirklich bewegt. Nimmt man die Menge $K = \{A, B\}$ aus S^2 heraus, erhält man einen (unendlich langen) Zylinder mit einer periodischen Transformation. Nach der Klassifikation der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist der Raum

$$Q = (S^2 - K)/(x \sim f(x))$$

wieder ein Zylinder. Mit einem Argument ähnlich zum eindimensionalen Fall ist die Operation auf $S^2 - \{A, B\}$ bis auf Konjugation durch Rotation um den Winkel $\frac{2\pi}{r}$ gegeben, wobei r wieder die Ordnung von G ist. Dasselbe gilt dann auch für die ursprüngliche Sphäre.

Wesentlich für diesen Beweis ist die übersichtliche Klassifikation der ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Eine derartige Klassifikation existiert für den dreidimensionalen Fall nicht. Deshalb ist das folgende Resultat viel schwerer zu zeigen.

3 In der Form für periodische Abbildungen.

Satz 1. *Jede periodische und orientierungserhaltende Transformation von S^3, die einen Fixpunkt besitzt, ist in* $\mathrm{Diff}(S^3)$ *konjugiert zu einer orthogonalen Transformation.*

Die Anstrengungen, diesen Satz zu beweisen, der 1940 von P. A. Smith vermutet wurde, waren erheblich und konnten erst 1978 durch Kombination der Arbeiten zahlreicher Mathematiker zu einem erfolgreichen Ende geführt werden (siehe [1] für eine detaillierte Darstellung). Bereits P. A. Smith konnte zeigen, dass die Fixpunktmenge K einer solchen periodischen Transformation diffeomorph zu einer Kreislinie S^1 ist. Man muss nun beweisen, dass unter den gegebenen Annahmen die Menge $K \subset S^3$ eine unverknotete Kreislinie ist; daraus folgt zusammen mit älteren Ergebnissen von P. A. Smith und E. Moise die Behauptung des obigen Satzes. Analog zum ein- und zweidimensionalen Fall untersucht man dazu den Quotienten

$$Q = (S^3 - K)/(x \sim f(x)),$$

eine dreidimensionale differenzierbare (nichtkompakte) Mannigfaltigkeit. Die dabei angewandten Methoden sind typisch für die Untersuchung dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten und basieren darauf, geeignete geometrische Strukturen (d. h. Riemannsche Metriken) auf den zugrundeliegenden topologischen Objekten zu konstruieren, um anschließend auf die Topologie dieser Objekte zurückzuschließen. Im konkreten Fall der Smith-Vermutung sind dies vor allem die Methode der minimalen Flächen von W. Meeks und S. Yau und das Geometrisierungsprogramm von W. Thurston. Dieses Programm, das bisher nur zum Teil verwirklicht werden konnte, zielt letztlich darauf ab, alle dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten in Stücke zu zerlegen, auf denen gewisse gut verstandene Standardgeometrien existieren. Dies ist im zweidimensionalen Fall aufgrund des Uniformisierungssatzes immer möglich.[4] In den Fällen, die sich nicht durch klassische Methoden oder die Methode der minimalen Flächen abdecken lässt, besitzt der zu untersuchende Quotient Q eine explizite geometrische – hier hyperbolische – Struktur, die auch in diesem verbleibenden Fall die mögliche topologische Gestalt dieses Quotienten so weit einschränkt, dass $K \subset S^3$ unverknotet sein muss. Dies schließt den Beweis der Smith-Vermutung ab.

Alle bisher bekannten fixpunktfreien periodischen orientierungserhaltenden Transformationen von S^3 sind ebenfalls konjugiert zu orthogonalen Transformationen. Ob dies immer gilt, ist nach wie vor offen.

Freie Operationen

Eine Operation einer Gruppe auf einer Sphäre heißt *frei*, falls jedes Gruppenelement, das nicht die Identität ist, wirklich alle Punkte auf der Sphäre bewegt. Wir beschränken uns wieder auf den Fall endlicher Gruppen G. Eine wichtige Tatsache ist, dass bei freien Operationen von G der Raum, der entsteht, indem man jeden Punkt mit all seinen Translaten unter G identifiziert, wieder eine Mannigfaltigkeit ist; man vergleiche die obige Diskussion der Smith-Vermutung. Das fundamentale *sphärische Raumformenproblem* fragt, welche endlichen Gruppen frei auf einer Sphäre operieren können. Falls die Dimension der Sphäre gerade ist, so folgt aus dem Fixpunktsatz von Lefschetz, dass bei einer solchen freien Operation jedes nichttriviale Gruppenelement orientierungsumkehrend wirkt. Dies ist nur für die einelementige Gruppe und für die Gruppe $\mathbb{Z}/2$ möglich – und durch die antipodische Abbildung ist bekanntermaßen eine freie Operation der letzteren Gruppe auf jeder Sphäre gegeben. Der Fall geradedimensionaler Sphären ist also nicht sehr interessant. Aber auch auf ungeradedimensionalen Sphären kann nicht jede Gruppe frei operieren: Mit klassischen homologischen Methoden wird in [4] gezeigt, dass für eine beliebige Primzahl p die Gruppe $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ nicht frei auf einer Sphäre operieren kann. Insbesondere sind alle Untergruppen von G der Ordnung p^2 zyklisch, falls G frei auf einer Sphäre operiert. Schwieriger ist es, algebraische Eigenschaften einer Gruppe als hinreichend für die Existenz freier Operationen dieser Gruppe auf Sphären zu etablieren. Der folgende Satz fasst die zentralen Ergebnisse zusammen.

Satz 2.
- (Swan [17]) *G kann dann und nur dann frei auf einem (endlichdimensionalen) Raum operieren, der homotopieäquivalent zu einer Sphäre ist, falls alle Untergruppen von G der Ordnung p^2 für alle Primzahlen p zyklisch sind.*
- (Milnor [14], Madsen-Thomas-Wall [11, 12]) *G kann dann und nur dann frei auf einer Sphäre operieren, falls alle Untergruppen von G der Ordnung p^2 und $2p$ für alle Primzahlen p zyklisch sind.*
- (Wolf [19]) *Es sei G auflösbar. Die Gruppe G kann dann und nur dann frei und orthogonal auf einer Sphäre operieren, falls alle Untergruppen von G der Ordnung pq für alle Primzahlen p und q zyklisch sind.*

Es wird deutlich, wie die „geometrische Qualität“ der möglichen Operationen von G mit algebraischen Eigenschaften von G in Beziehung steht. Trotz der Ähnlichkeit dieser Ergebnisse haben ihre Beweise ein sehr

4 Alle geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten besitzen eine Riemannsche Metrik konstanter Schnittkrümmung.

unterschiedliches Flair. Das erste (homotopietheoretische) Resultat ist am einfachsten zu erhalten. Allerdings muss der entstehende Raum noch keine echte Sphäre sein. Die Existenz eines zu einer Sphäre homotopieäquivalenten Raumes mit einer freien G-Operation ist aber der erste Schritt in der Konstruktion einer echten Sphäre mit einer freien G-Operation. Dies ist der konstruktive Teil des zweiten Resultates und eine schöne Illustration des sogenannten Chirurgie-Programmes in der geometrischen Topologie, das ein wirkungsvolles Mittel für die Klassifikation von (differenzierbaren und auch topologischen) Mannigfaltigkeiten der Dimension größer oder gleich fünf bereitstellt: Der Quotient des abstrakten Gebildes aus Swans Satz nach der freien Operation kann systematisch zu einer homotopieäquivalenten Mannigfaltigkeit verbessert werden, deren universelle Überlagerung eine Standardsphäre ist (auf der die Gruppe dann frei operiert). Diese Verbesserung erfolgt mit Schneide- und Klebetechniken – eben chirurgischen Methoden. Im Allgemeinen existieren (theoretisch) gut verstandene Hindernisse gegen diese Konstruktion; diese können aber im Falle der sphärischen Raumformen alle zum Verschwinden gebracht werden. Dazu muss man auf das oben zitierte Ergebnis von J. Wolf zurückgreifen, das auf der Untersuchung orthogonaler reeller Darstellungen endlicher Gruppen beruht, bei der kein von der Einheit verschiedenes Gruppenelement den Eigenwert eins besitzt. Das Resultat von J. Wolf beinhaltet eine (hier nicht beschriebene) isometrische Klassifikation der geometrischen sphärischen Raumformen, also derjenigen vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die lokal isometrisch zu Sphären sind. (Es berücksichtigt auch nichtauflösbare Gruppen wie die binäre Ikosaedergruppe, die frei und orthogonal auf S^3 operiert; der Einfachheit halber haben wir diesen Fall jedoch ausgeklammert.) Es ist daher das „geometrischste" der hier diskutierten Ergebnisse. Eine Diffeomorphieklassifikation der sphärischen Raumformen im Sinne des zweiten oben angesprochenen Resultates ist bislang nicht bekannt.

Gruppenoperationen und Eichtheorie

S. Donaldson revolutionierte Anfang der achtziger Jahre durch die Anwendung eichtheoretischer Methoden das Studium vierdimensionaler differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Grob gesprochen beruht diese Methode auf dem Studium gewisser partieller (nichtlinearer) Differentialgleichungen auf der gegebenen Viermannigfaltigkeit. Die von der Elektrodynamik motivierten Yang–Mills-, bzw. Seiberg–Witten-Gleichungen führten zu spektakulären Resultaten. Diese Gleichungen besitzen natürliche Symmetrien, die durch sogenannte Eichtransformationen gegeben sind. Modulo dieser Symmetrien sind die betrachteten Gleichungen elliptisch, ihre Lösungsräume (modulo Eichsymmetrie) mithin endlichdimensional. Es stellt sich nun heraus, dass diese sogenannten Modulräume subtile Eigenschaften der differenzierbaren Struktur der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit widerspiegeln, die klassischen Methoden nicht zugänglich waren. Andererseits ist aber in vielen interessanten Fällen eine detaillierte Analyse dieser Modulräume möglich. Hierauf beruht die Stärke des eichtheoretischen Ansatzes. Wir wollen diese Vorgehensweise anhand der folgenden Frage illustrieren, die in [15] gestellt wurde.

Kann eine endliche Gruppe auf einer Sphäre so operieren, dass diese Operation genau einen Fixpunkt hat?

(Ein *Fixpunkt* wird von allen Elementen der Gruppe festgelassen.) Es ist klar, dass so eine Operation nicht orthogonal sein kann, da die Fixpunktmenge in diesem Fall wieder eine Sphäre sein müsste. Die nulldimensionale Sphäre besteht aber aus zwei Punkten.

Erstaunlicherweise ist die obige Frage zu bejahen. E. Stein konstruiert in [16] eine Operation der binären Ikosaedergruppe auf S^7 mit genau einem Fixpunkt. Diese Konstruktion benutzt wieder Chirurgiemethoden wie sie schon im letzten Abschnitt zur Sprache kamen. Andererseits kann man ziemlich schnell einsehen, dass solche exotischen Operationen auf Sphären der Dimension kleiner oder gleich drei nicht existieren können. Für den Fall der vierdimensionalen Sphäre konnte M. Furuta folgendes Resultat mittels Donaldsontheorie beweisen:

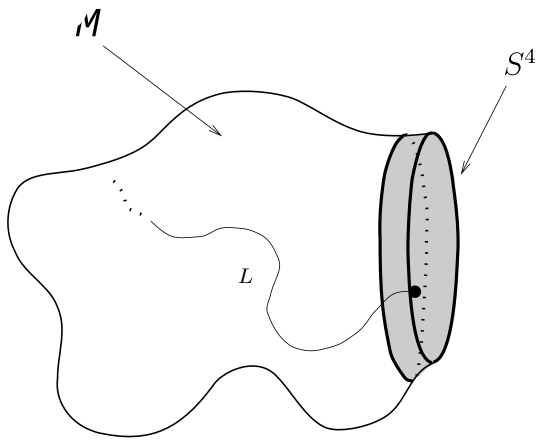
Satz 3 ([7]). *Falls eine endliche Gruppe differenzierbar und orientierungserhaltend auf der Sphäre S^4 operiert, so hat diese Operation nicht genau einen Fixpunkt.*[5]

Der Yang-Mills-Modulraum $\mathcal{M}$ für die vierdimensionale Sphäre hat in unserem Fall die folgende Gestalt:[6] Der Raum $\mathcal{M}$ ist eine fünfdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die durch Anfügen eines Kragens der Form $S^4 \times [0,1]$ zu einer kompakten berandeten Mannigfaltigkeit gemacht werden kann. In

5 In der Arbeit [13] wurde Furutas Resultat mittels klassischer homologischer Methoden auf beliebige topologische Operationen endlicher Gruppen auf S^4 verallgemeinert. Trotzdem gibt es viele Ergebnisse über Operationen endlicher Gruppen auf vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten, die bisher nur mit Eichtheorie gezeigt werden konnten ([2, 9]).

6 Nach geeigneter Wahl eines $SU(2)$-Prinzipalbündels und einer G-invarianten Metrik auf S^4.

unserer Zeichnung ist der angefügte Kragen grau unterlegt.



Zum Beweis von Furutas Satz nehmen wir an, eine endliche Gruppe G operiert orientierungserhaltend und differenzierbar auf S^4 mit genau einem Fixpunkt. Falls sich diese Operation auf den ganzen (kompaktifizierten) Modulraum $\mathcal{M}$ differenzierbar fortsetzen lässt, so kommt man zu folgender Situation: Der Fixpunkt auf S^4 ist Endpunkt einer eindimensionalen kompakten differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $L \subset \mathcal{M}$, nämlich einer Komponente der Fixpunktmenge der fortgesetzten Gruppenoperation. Wir nehmen hier zusätzlich an, dass die Operation in einer Umgebung des Randes S^4 durch die Produktoperation auf $S^4 \times [0,1]$ gegeben ist. Dann ist L wirklich eindimensional und kann nicht in den grauen Bereich zurückkehren. Da eine eindimensionale kompakte Mannigfaltigkeit nicht genau einen Endpunkt haben kann, ergibt sich daraus ein Widerspruch.[7]

Natürlich ist die ganze Situation nicht so einfach wie eben dargestellt. Die Fortsetzung der Gruppenoperation auf $\mathcal{M}$ ist im allgemeinen nur in einer Umgebung des Randes S^4 möglich, weil die generische Metrik auf S^4, die man zur Konstruktion eines glatten Modulraumes braucht, in der Regel nicht invariant unter der Operation von G ist. Diese technische Schwierigkeit lässt sich jedoch lösen, wenn man zulässt, dass der Modulraum $\mathcal{M}$ etwas schwächere Eigenschaften als die einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat [8].

Gegenüber der Donaldsontheorie hat die etwa zehn Jahre später entwickelte Seiberg–Witten-Theorie entscheidende technische Vorteile; einen Überblick gibt der Artikel [6]. Insofern ist es bemerkenswert, dass die eichtheoretischen Ergebnisse über Gruppenoperationen bisher ausschließlich mittels Donaldsontheorie erzielt wurden. Es ist eine interessante ungeklärte Frage, welche Anwendungen die Seiberg–Witten-Theorie auf das Studium von Gruppenoperationen auf differenzierbaren Viermannigfaltigkeiten zulässt.

Literatur

[1] H. Bass, J. Morgan, *The Smith conjecture*, Academic Press (1984).
[2] P. Braam, G. Matič, *The Smith conjecture in dimension four and equivariant gauge theory*, Forum Math. 5, 299–311 (1993).
[3] A. Cauchy, *Sur les polygones et les polyèdres, seconde mémoire,* J. École Polytechnique XVIe Cahier, Tome IX, 87-98 (1813); Œuvres Complètes, IIe Série, Vol. 1, 26-38, Paris 1905.
[4] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956).
[5] H. Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, zweite Auflage, Birkhäuser (1981).
[6] S. Donaldson, *The Seiberg–Witten equations and 4-manifold topology*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 33, 45–70 (1996).
[7] M. Furuta, *A remark on a fixed point of finite group action on S^4*, Topology 28, 35–38 (1989).
[8] I. Hambleton, R. Lee, *Perturbation of equivariant moduli spaces*, Math. Ann. 293, 17–37 (1992).
[9] I. Hambleton, R. Lee, *Smooth group actions on definite 4-manifolds and moduli spaces*, Duke Math. J. 78, 715–732 (1995).
[10] M. Hirsch, *A proof of the nonrectrectability of a cell onto its boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. 14, 364–365 (1963).
[11] I. Madsen, *Smooth spherical space forms*, Proceedings, Evanston 1977, Lecture Notes in Math. 657, Springer-Verlag (1978), 303–352.
[12] I. Madsen, C. Thomas, C. Wall, *The topological spherical space form problem – II. Existence of free actions*, Topology 15, 375–382 (1976).
[13] S. de Michelis, *The fixed point set of a finite group action on a homology four sphere*, Enseign. Math (2) 35, 107–116 (1989).
[14] J. Milnor, *Groups which act on S^n without fixed points*, Amer. J. Math. 79, 623–630 (1957).
[15] D. Montgomery, H. Samelson, *Fiberings with singularities*, Duke Math. J. 13, 51–56 (1946).
[16] E. Stein, *Surgery on products with finite fundamental group*, Topology 16, 473–493 (1977).
[17] R. Swan, *Periodic resolutions for finite groups*, Ann. of Math. 72, 267–291 (1960).
[18] H. Weyl, *Symmetrie*, zweite deutsche Auflage, Birkhäuser (1981).
[19] J. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, Publish or Perish (1984).

Adresse des Autors
Dr. Bernhard Hanke
Ludwig-Maximilians-Universität
Theresienstraße 39
80333 München
`hanke@rz.mathematik.uni-muenchen.de`

7 Dieses Argument erinnert an den eleganten Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes von M. Hirsch ([10]).