Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis

von Erich Christian Wittmann

„Es gibt [...] keinen Grund, die Bildungsforscher heute als Helden zu feiern, die bei TIMSS und PISA Tatsachen aufgedeckt hätten, von denen vorher niemand etwas gewusst hat und wissen konnte, und die neue Zielvorstellungen ins Gespräch gebracht hätten. Wer wirklich sehen wollte, zu welchen Ergebnissen der übliche Unterricht führt, hatte bereits vor TIMSS und PISA reichlich Gelegenheit dazu [...].“[1] Genau diesen Eindruck gewannen die Herausgeber der Mitteilungen bei der Lektüre des folgenden 10 Jahre alten Textes,[2] der angesichts der Diskussion um PISA und PISA-E nichts an seiner Aktualität eingebüßt hat und den wir hier mit freundlicher Genehmigung erneut abdrucken. *(FB)*

> Die Wertlosigkeit von Büchern
>
> Die Welt drückt ihre Wertschätzung des SINNS dadurch aus, daß sie Bücher wertschätzt. Doch Bücher enthalten nur Worte. Es gibt aber etwas, wodurch die Bücher wertvoll werden. Was die Bücher wertvoll macht, sind die Gedanken. Es gibt etwas, wonach sich die Gedanken richten; das aber, wonach sich die Gedanken richten, läßt sich nicht durch Worte überliefern. Die Welt aber überliefert um der für wertvoll gehaltenen Worte die Bücher. Obwohl die Welt sie wertschätzt, sind sie in Wirklichkeit der Wertschätzung nicht wert, weil Worte nicht wertvoll sind. Ach, daß die Weltmenschen Form und Farbe, Name und Schall für ausreichend erachten, das Ding an sich zu erkennen! Form und Farbe, Name und Schall sind wirklich nicht ausreichend, um das Ding an sich zu erkennen.
>
> (Dschuang Dsi, Das wahre Buch vom südlichen Blütenland, Buch XIII, 10)

Geoff Giles stellte 1973 in einem Vortrag die Frage „Ist Lehren ein Hindernis für Lernen?“. André Revuz ging 1980 noch einen Schritt weiter, als er ein Buch mit dem Titel schrieb „Ist es unmöglich, Mathematik zu lehren?“ Beide Autoren kommen zu dem Schluß, daß ihre Fragen im wesentlichen mit „Ja“ zu beantworten sind. Damit bestätigen sie nicht etwa nur die alltägliche Erfahrung, daß das Lehren seine Grenzen hat und daß in vielen Fällen selbst die höchste Lehrkunst nichts zu bewirken vermag, sondern sie behaupten, daß didaktische Interventionen des Lehrers schädlich sein können und es in einem Ausmaß auch sind, von dem man sich gewöhnlich keine Vorstellung macht. Die Idee, daß der Lehrer, auch der sogenannte „gute“ Lehrer, seine Schüler behindern kann, während er glaubt, ihnen zu helfen, ist wie jede tiefe didaktische Idee keineswegs neu. Sie ist aber von den Didaktikern solange nicht beachtet und diskutiert worden, wie ein ungebrochener Optimismus über die prinzipiellen Möglichkeiten einer lehrerzentrierten Didaktik vorgeherrscht hat. Erst in den beiden letzten Jahrzehnten haben sich diejenigen verstärkt zu Wort gemeldet, die die Rolle des Lehrers im Unterricht und im Lernprozeß der Schüler kritischer sehen. Zu Ihnen gehört Hans Freudenthal. Er hat vor 20 Jahren einen Vortrag „Geometry between the Devil and the Deep Sea“ gehalten (Freudenthal 1971), der nicht nur mein eigenes Denken sehr stark beeinflußt, sondern auch den Titel des vorliegenden Beitrags inspiriert hat.

1 Eine Unterrichtsepisode

Ich beginne mit einem Beispiel aus meinem eigenen Hochschulunterricht, an dem man die Problematik von Lehren und Lernen gut studieren kann. Vor einigen Jahren habe ich eine Vorlesung „Raumgeometrie“ für Primarstufenstudenten abgehalten, in der ich mich bemüht habe, den mathematischen Formalismus auf ein Minimum zu reduzieren und statt dessen inhaltlich-anschaulichen, aber gleichwohl stichhaltigen Überlegungen zu folgen. Der erste Satz, den ich zu beweisen hatte, war der Eulersche Polyedersatz, eingeschränkt auf konvexe Polyeder. Ich führte zu diesem Zweck den Begriff des Schlegeldiagramms eines konvexen Polyeders ein und veranschaulichte ihn mit Hilfe einer Gummihaut an einigen Polyedermodellen (Abb. 1, vgl. Wittmann 1987). Anschließend wurde die Beziehung $E + F - K = 2$ (wobei E, F, K die Anzahlen der Ecken, der Flächen und der Kanten eines Polyeders sind) am Schlegel-Diagramm operativ bewiesen, indem das Diagramm, ausgehend von einem Punkt, Kante für Kante rekonstruiert wurde. Ich habe dabei nicht viel gesprochen, sondern mehr meine Handlungen wirken lassen. Nach Beendigung der Beweisführung meldete sich eine Studentin zu Wort und fragte, ob das wirklich ein Beweis gewesen sei. Ich war ziemlich irritiert, weil diese Frage

1 Ein Zitat aus einer umfassenden Diskussion der gegenwärtigen Situation des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und der Lehrerbildung: Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring und Erich Ch. Wittmann, *Jenseits von PISA: Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht.* Kallmeyer'sche Verlagsbuchhandlung Velber 2002, erscheint im September.

2 Der Beitrag erschien zuerst in: *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, Band XII, Festschrift zum 300-jährigen Bestehen der Gesellschaft (Dritter Teil), 663–679, 1992

gewöhnlich gestellt wird, wenn ein Beweis nicht formal genug ist und ich bei dieser Studentengruppe ein Interesse an nichtformalen Beweisen erwartet hatte. Auf meine Rückfrage „Warum denn nicht?“ kam aber dann die überraschende und m.E. didaktisch außerordentlich lehrreiche Antwort: „Weil ich es verstanden habe.“

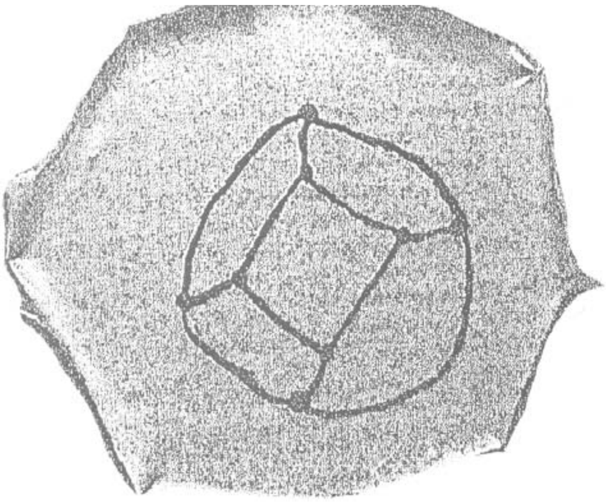


Abbildung 1. Schlegeldiagramm des Würfels

Für meinen Kollegen Gerhard Müller und mich war diese Episode der Anlaß, das Bild von der Mathematik genauer zu studieren, das unsere Lehrerstudenten vom Schulunterricht mitbringen. Wir sind dabei zu dem Schluß gekommen, daß dieses Bild von formalistischen Vorstellungen überwuchert ist und daß diese das Verständnis für Mathematik stark behindern (Wittmann & Müller 1988). Die gut gemeinten Versuche des gymnasialen Mathematikunterrichts, mathematisches Verständnis durch begriffliche und formale Präzision zu gewährleisten, bewirkt bei der großen Mehrheit der Schüler also gerade das Gegenteil, nämlich Unverständnis. Diesem scheinbar paradoxen Phänomen, das viele Lehrer nicht wahrhaben wollen, möchte ich im folgenden nachgehen.

2 Thesen zur Entwicklung von Verstehen im Mathematikunterricht

Unsere Beobachtungen und Überlegungen haben uns zu folgenden Thesen geführt, die in der neueren didaktischen Literatur immer stärker untermauert werden:

1. Mathematisches Wissen kann man in größerem Umfang nicht vermitteln, Verstehen kann man nicht lehren.
2. Ein Wissensbestand kann nur vom Schüler selbst erworben und Verständnis nur von ihm selbst aufgebaut werden.
3. Bei dem Erwerb von Wissen und dem Aufbau von Verständnis kann der Lehrer Hilfestellung leisten. „Hilfen“ sind aber prinzipiell zweischneidig. Auch in der besten Absicht gegebene Hilfen können das Verständnis behindern, wenn nicht sogar verhindern.

Den Thesen 1 und 2 liegt eine bestimmte Sicht des Lehr-Lern-Prozesses zugrunde, die ich zunächst kurz beschreiben möchte. Anschließend möchte ich These 3 für den Mathematikunterricht konkretisieren. Im letzten Abschnitt möchte ich aufzeigen, daß es nur einen einzigen Ausweg aus dem Dilemma gibt: die Förderung der Selbstorganisation der Schüler in einem aktiv-entdeckenden Unterricht, in dem sich der Lehrer möglichst zurücknimmt.

3 Die Oberflächen- und die Tiefenstruktur der mathematischen Kommunikation

In der Linguistik unterscheidet man zwischen der Oberflächen- und der Tiefenstruktur der Sprache. Diese Unterscheidung kann man auf die Kommunikation ganz allgemein übertragen. Jede Kommunikation bedarf äußerer Hilfsmittel, nämlich Systemen von Zeichen, Bildern und Handlungen. Diese sind aber nicht mit der Bedeutung, dem inneren Gehalt, dem Sinn der Mitteilung identisch. Für die didaktischen Interventionen des Lehrers ergibt sich daraus eine prinzipielle Schranke. H. von Foerster, der große Altmeister der Biokybernetik und Systemtheorie, hat dies in einem Vortrag wunderbar ausgedruckt:

> Die ursprünglichsten und zutiefst persönlichen Prozesse in jedem Menschen und in der Tat in jedem Organismus, nämlich „Information“ und „Erkenntnis“ werden gegenwärtig durchwegs als Dinge bzw. Waren aufgefaßt, also als materielle Güter. In Wirklichkeit ist Information der Prozeß, durch den wir Erkenntnisse gewinnen, und Erkenntnisse sind Prozesse, die vergangene und gegenwärtige Erfahrungen integrieren, um neue Tätigkeiten auszubilden, entweder als Nerventätigkeit, die wir innerlich als Denken und Wollen wahrnehmen können, oder aber als äußerlich wahrnehmbare Sprache und Bewegung. Keiner dieser Prozesse kann „Weitergegeben“ werden, wie man uns immer wieder sagt, z. B. mit Sätzen wie „. . . Universitäten sind Horte des Wissens, das von Generation zu Generation weitergegeben wird . . .“ usw., denn *Ihre* Nerventätigkeit ist *Ihre* Nerventätigkeit und – leider! – nicht *meine*.
>
> Es ist kein Wunder, daß ein Bildungssystem, welches den Prozeß der Erzeugung neuer Prozesse mit der

> Verteilung von Waren, genannt „Wissen“, verwechselt, in den dafür bestimmten Empfängern große Enttäuschung hervorrufen muß, denn die Waren kommen nie an: es gibt sie nicht! Die Konfusion, die Wissen als materielles Gut auffaßt, geht historisch auf ein Flugblatt zurück, das im 16. Jahrhundert in Nürnberg gedruckt wurde. Es zeigt einen sitzenden Schüler mit einem Loch im Kopf, in das ein Trichter gesteckt ist. Daneben steht ein Lehrer, der einen Kübel „Wissen“ in den Trichter gießt: Buchstaben des Alphabets, Zahlen und einfache Gleichungen. Was die Erfindung des Rades für die ganze Menschheit gebracht hat, brachte der Nürnberger Trichter für die Bildung: es kann nun noch schneller abwärts gehen.
>
> Gibt es ein Heilmittel? Natürlich gibt es eines! Wir müssen Vorträge, Bücher, Diapositive, Filme usw. *nicht als Information*, sondern als *Träger* potentieller Information ansehen. (von Foerster 1985, 4–5)

Obwohl die Unterscheidung zwischen der Oberflächen- und der Tiefenstruktur sehr alt ist (vgl. das Eingangszitat über die „Wertlosigkeit von Büchern“), ist diese Erkenntnis in der Didaktik nahezu ignoriert worden. Im Gegenteil: Die Geschichte der Didaktik, und namentlich die der Mathematikdidaktik, ist geprägt von planmäßigen Versuchen, Bedeutung, Sinn, Verstehen von außen, von der Oberfläche her, in den Griff zu bekommen. Diese Versuche stellen Musterbeispiele für gut gemeinte Hilfen dar, die das genaue Gegenteil von dem bewirken können, was man bewirken will, und dies oft genug tun. Im wesentlichen gibt es zwei solcher didaktischer Hilfsprogramme, die ganz unterschiedliche Wurzeln haben: den mathematischen und den methodischen Formalismus. Im folgenden möchte ich getrennt auf sie eingehen, obwohl sie einander in der Praxis oft genug in die Hände spielen.

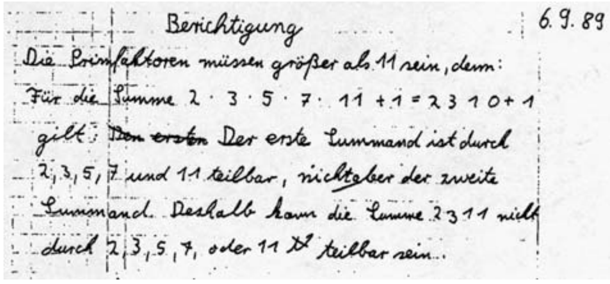
3.1 Die Bedrohung des Verstehens durch den mathematischen Formalismus

Ich möchte zunächst an drei Beispielen aufzeigen, wie der Unterricht in die Fänge der Skylla des mathematischen Formalismus geraten kann und wie dadurch das Verstehen bedroht wird.

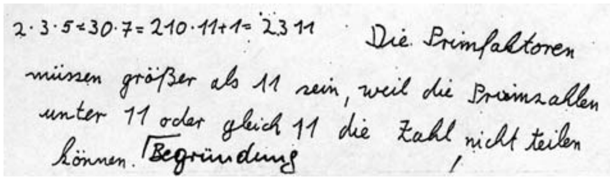
(1) In einer Klassenarbeit für das 6. Schuljahr wurde folgende Aufgabe gestellt:

Begründe mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln, daß alle Primfaktoren der Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$ *größer als 11 sein müssen. (Jeder Primfaktor muß die Zahl teilen).*

Kein einziger Schüler der Klasse konnte diese Aufgabe so lösen, wie es der Lehrer erwartet hatte, so daß die Lösung bei der Berichtigung der Arbeit vom Lehrer ausführlich angegeben wurde:


Berichtigung 6.9.89
Die Primfaktoren müssen größer als 11 sein, denn:
Für die Summe 2 · 3 · 5 · 7 · 11 + 1 = 2310 + 1
gilt: ~~Den ersten~~ Der erste Summand ist durch
2, 3, 5, 7 und 11 teilbar, nicht aber der zweite
Summand. Deshalb kann die Summe 2311 nicht
durch 2, 3, 5, 7, oder 11 teilbar sein.

Zum Vergleich hier der Lösungsansatz eines guten Schülers:


2 · 3 · 5 = 30 · 7 = 210 · 11 + 1 = 2311 Die Primfaktoren
müssen größer als 11 sein, weil die Primzahlen
unter 11 oder gleich 11 die Zahl nicht teilen
können. Begründung

Der Ansatz enthält Fehler und ist sicherlich nicht vollständig. Der Lehrer bemängelt mit Recht eine fehlende Begründung für die angegebene Behauptung. Gleichwohl erkennt man bei genauerem Hinsehen, daß sich der Schüler einige Gedanken gemacht hat. Stutzig macht besonders die Wendung „nicht teilen können“. Wir haben den Schüler nachträglich gefragt, was er sich bei der Lösung der Aufgabe gedacht hat. Seine Antwort lautete ungefähr so:

> Ich habe 2311 zuerst durch 2 geteilt und den Rest 1 erhalten. Dann durch 3. Wieder war der Rest 1. Dann durch 5. Erneut war der Rest 1. Dann ist mir aufgefallen, daß 2311 ja $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$ ist und daß der Rest 1 auch herauskommen muß, wenn man durch 7 und 11 teilt.

Ich halte es für tragisch, wenn der Unterricht solche verständnisvollen, inhaltlichen Überlegungen nicht aufgreift, sondern den Schülern stattdessen eine formale Sprache überstülpt, die für sie unverständlich ist.

*

(2) In Schulbüchern der Mittelstufe findet man nicht selten ganze Abschnitte, in denen bestimmte Begriffe geradezu vorlesungsartig eingeführt werden. Als Beispiel sei die folgende Passage genannt:

Endgültige Definitionen für die Gleichheit von Termen: $f(x)$ *und* $g(x)$ *seien Terme mit denselben Variablen und den Definitionsmengen* D_f *und* D_g. *Die beiden Terme heißen einsetzungsgleich oder äquivalent in* $D_f \cap D_g$, *wenn sie bei jeder Einsetzung von rationalen Zahlen aus* $D_f \cap D_g$ *für die Variablen in eine Bezeichnung für dieselbe rationale Zahl übergehen.*
Wir schreiben: $f(x) = g(x)$ *für* $x \in D_f \cap D_g$.

Solche belehrenden formalen Erklärungen in einer für Schüler völlig unverständlichen, wunderlichen Diktion mögen ja von den Autoren gut gemeint sein. Ein Verständnis für Terme gewinnt man durch sie nicht, sondern nur durch Verwendung von Termen in sinnvollen Zusammenhängen und durch Aufarbeiten der dabei gemachten Erfahrungen.

*

(3) Vor einigen Jahren war ich in ein mathematisches Institut einer deutschen Universität zu einem Kolloquiumsvortrag eingeladen. Ich hatte ziemliche Mühe, mich in dem Gebäudekomplex zurecht zu finden, und bei meiner Suche kam ich zufällig an einem Hörsaal vorbei, dessen hintere, obere Tür offen stand und in dem, wie ich hören konnte, gerade eine Vorlesung stattfand. Da ich genügend Zeit hatte und ein wenig neugierig war, trat ich ein und setzte mich in die oberste Reihe. In der Vorlesung ging es um Mannigfaltigkeiten. Die Tafeln waren schon eng beschrieben. Der Dozent hatte gerade den Satz formuliert, daß auf jeder C^k-Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik existiert, und schickte sich an, ihn zu beweisen. Zu diesem Zweck mußte er eine Reihe von topologischen Begriffen und Hilfssätzen bereitstellen, an die ich mich nicht mehr im einzelnen erinnere, mit einer Ausnahme: der Zerlegung der Eins. Als er die Definition dieses Begriffs anschrieb, steigerte sich unter den etwa 30 Studenten die schon vorher spürbare Unruhe soweit, daß ein Student rief: „Wir verstehen überhaupt nichts mehr!“ Der Dozent, etwas verunsichert, wehrte sich mit der Bemerkung: „Es steht doch alles da!“, und wiederholte noch einmal Wort für Wort, Buchstabe für Buchstabe, die Definition. Dann ging die Vorlesung weiter.

Ich glaube, der Dozent war sich überhaupt nicht im klaren darüber, daß die formale Präsentation der Theorie, die für ihn selbst aufgrund seiner Erfahrungen als Forscher mit reichhaltigen Bedeutungen verbunden war, für seine Studenten, denen diese Erfahrungen fehlten bzw. vorenthalten wurden, einen bloßen, unverständlichen Formalismus darstellte.

Als ich den Hörsaal wieder verlassen hatte und mich mit dem Aufzug in ein höheres Stockwerk begab, sah ich zufällig unter den vielen Graffiti von Studentenhand eines, das mir besonders gut zu passen schien. Es lautete: „Tod dem Formalismus“.

Ich möchte hier nicht missverstanden werden. Ich wende mich nicht gegen den Gebrauch einer formalen Sprache und Theorieentwicklung in der Mathematik an sich. Was ich als „Formalismus“ kritisiere, ist die Verwendung einer formalen Sprache in der Lehre und im Unterricht, die sich nicht auf bewusst entwickelte inhaltliche Vorstellungen bezieht oder nicht an diese angepasst ist.

Es darf hierbei nicht übersehen werden, daß dieser didaktische Aspekt des mathematischen Formalismus keineswegs zufälliger Natur ist. Die zu Anfang des Jahrhunderts entstandene Doktrin des Formalismus war nämlich nicht nur von dem Wunsch genährt, die mathematischen Strukturen ausgehend von Grundlagen systematisch aufzubauen, sondern ganz entscheidend auch von Bemühungen der Mathematiker getragen, die Mathematik lehr- und verstehbar zu machen. Diese Bemühung ging von dem Glauben aus, eine mathematische Theorie ließe sich ausgehend von Grundbegriffen und Axiomen durch eine logische Kette von Definitionen und abgeleiteten Sätzen genau und vollständig darstellen. Das erste in dieser Richtung groß angelegte System war wohl der Wissenschaftskanon von Christian Wolff im 18. Jahrhundert, der den universitären Stil der Vorlesungen und Lehrbücher für die folgenden Jahrhunderte wesentlich prägte. Wolff selbst beschrieb seine „Lehr-Art“ folgendermaßen (Wolff 1726 [1973], 52–54):

> In meinem Vortrage der Sachen habe ich hauptsächlich auf dreyerley gesehen, 1. daß ich kein Wort brauchte, welches ich nicht erkläret hätte, wo durch den Gebrauch des Wortes sonst eine Zweydeutigkeit entstehen könnte, oder es an einem Grunde des Beweises fehlte: 2. daß ich keinen Satz einräumete, und im folgenden als einen Förder-Satz in Schlüssen zum Beweise anderer brauchte, den ich nicht vorher erwiesen hätte: 3. daß ich die folgenden Erklärungen und Sätze mit einander beständig verknüpffte und in einer steten Verknüpffung aus einander herleitete. Jedermann weiß, daß dieses die Regeln sind, nach welchen man sich in der Mathematick richtet. Wer nun aber die mathematische Lehr-Art, wie sie daselbst von mir beschrieben worden, mit meiner Logick vergleichet, die ich den vernünfftigen Gedanken von den Kräfften des Verstandes abgehandelt; der wird finden, daß die mathematische Lehr-Art in einer sorgfältigen Ausübung der Vernunfft-Lehre bestehe. Und demnach ist es gleich viel, ob man nach der mathematischen Lehr-Art etwas ausführet, oder nach den Regeln der Vernunfft-Lehre, wenn nur diese ihre Richtigkeit haben. Ja da ich erwiesen, daß man in der Mathematick die natürliche Art zu gedenken behält und daß die Vernunfft-Lehre nichts anders ist als eine deutliche Erklärung derselben; so kan ich auch sagen, ich habe mir angelegen seyn lassen alles so vorzutragen, wie es sich auf eine natürliche Art gedenken lässet.

Der Versuch, Verständnis auf dem Weg formaler Begriffsklärung zu erreichen, führte im 20. Jahrhundert zu dem Lehrbuchwerk „Eleménts de mathématique“, das von einer französischen Mathematikergruppe unter dem Pseudonym N. Bourbaki veröffentlicht wurde. Dieses Mammutunternehmen ist bezeichnender Weise aus einer Diskussion von A. Weil und J. Delsarte über die Frage hervorgegangen, wie Analysis am besten zu lehren sei. J. Dieudonné, einer der führenden Köpfe der Gruppe beschreibt die zugrundeliegende „Lehrtheorie“ folgendermaßen (Dieudonné 1974, 404):

> Die Kommunikation unter den Mathematikern mit Hilfe einer gemeinsamen Sprache muß aufrecht erhalten bleiben ..., und die Übermittlung von Erkenntnissen kann nicht nur den Genies überlassen werden. In den meisten Fällen wird man sie Professoren anvertrauen, die ... entsprechend ausgebildet und vorbereitet sind, um die Beweisführung zu verstehen. Da der größte Teil von ihnen wohl kaum die außerordentliche Gabe der „Intuition“ der Schöpfer besitzt, kann ein hinreichend gutes Verständnis der Mathematik und die Fähigkeit, diese an Studenten weiterzugeben, nur dadurch erreicht werden, daß der Lehrstoff sorgfältig dargeboten wird: Definitionen, Voraussetzungen und Beweise müssen so präzise sein, dass Missverständnisse vermieden werden können, und auf mögliche Trugschlüsse und Irrtümer ist erforderlichenfalls hinzuweisen.

Der Glaube, man könne mathematisches Verständnis durch eine logisch lückenlose Beschreibung des Stoffes mit Hilfe einer „hinreichend präzisen“ mathematischen Sprache erzwingen, hat weitreichende didaktische Konsequenzen: Die logischen Analysen der Mathematiker bilden die natürliche, voll ausreichende Grundlage für die Lehre. Didaktik und Logik werden sozusagen identifiziert. Diese Auflassung hat sich im Zeitalter der „Neuen Mathematik“ auch im Schulunterricht weit verbreitet und ist für den Formalismus verantwortlich, den man dort noch vielfach vorfindet (vgl. Andelfinger & Voigt 1988). Unmittelbare Konsequenz dieser Sichtweise ist übrigens, daß Didaktik in der Lehrerbildung eigentlich überflüssig ist. Die Unfähigkeit vieler Mathematiker, den Sinn von Didaktik und von didaktischen Lehrstühlen einzusehen, beruht somit keineswegs auf Böswilligkeit, wie man manchmal meinen könnte, sondern auf der ideologischen Befangenheit in einer impliziten Lehr-Lern-Theorie, die in der Mathematik eine lange Tradition hat.

Es gibt seit einigen Jahren deutliche Anzeichen dafür, daß sich die Mathematiker weltweit der überragenden Bedeutung der nicht formalisierbaren Aspekte ihrer Tätigkeit und der Gefahren des Formalismus bewußt werden (vgl. hierzu Ossermann 1983, Davis & Hersh 1983, Wittmann & Müller 1988). Z. B. hat R. Thom (Thom 1973) in einem Hauptvortrag anläßlich des 2. Internationalen Kongresses über Mathematikunterricht, Exeter 1972, die „moderne“ Mathematik einer grundsätzlichen Kritik unterzogen (Thom 1973) und die „Sinngebung, die ‚Existenz‘ mathematischer Objekte“, nicht die formale Strenge als das wirkliche Problem des Mathematikunterrichts bezeichnet. Auch bei den Bourbakisten selbst haben sich die Auffassungen über die Notwendigkeit der formalen Präzision für das Verständnis zu wandeln begonnen:

> Der Professor bereitet in vollem Bewußtsein einen schönen Kurs vor, streng und kristallklar wie das Wasser einer Quelle, und bei der Prüfung sieht er zu seiner Verwunderung, daß sich dieses klare Wasser In eine trübe Brühe verwandelt hat. Man kommt also nicht daran vorbei, daß die formale Schönheit der unterrichteten Materie und die Klarheit der Darstellung für das Verständnis nicht ausreichen und vielleicht nicht einmal notwendig sind. (G. Choquet, zitiert nach Bouvier 1981, 134)

Weiter ist unübersehbar, daß, angeregt durch das Beispiel der Russen, neue Lehrbücher erscheinen, die sich deutlich von dem in den sechziger und siebziger Jahren üblichen formalen Stil absetzen. Gleichwohl meine ich, daß auch heute noch die Gymnasiallehrerausbildung unnötig formal ist. Zumindest wird zu wenig gegen den Formalismus als heimlichen Lehrplan unternommen. Trotzdem habe ich die Hoffnung, daß wir auf lange Sicht in Lehrerbildung und Unterricht der Skylla des mathematischen Formalismus entrinnen können, und daß didaktische Ansätze Boden gewinnen werden, die auf eine umfassendere Berücksichtigung der epistemologischen Struktur mathematischen Wissens ausgerichtet sind (Steinbring 1988).

3.2 Die Bedrohung des Verstehens durch den methodischen Formalismus

Während der mathematische Formalismus mit der Entwicklung der Fachwissenschaft Mathematik eng verbunden war und dementsprechend in der Gymnasiallehrerbildung den größten Einfluß ausgeübt hat, geht eine zweite Bedrohung des Verstehens, der methodische Formalismus, mit bestimmten Entwicklungen der Psychologie und der allgemeinen Didaktik einher und ist am stärksten in der Volksschullehrerbildung wirksam gewesen, wo er zu einer ungeheuren Überschätzung der didaktischen Möglichkeiten, ja sogar zu einer „Überdidaktisierung“, geführt hat.

Der methodische Formalismus wurde entscheidend durch die Philosophie und die Psychologie des Empirismus geprägt, welche die Erkenntnisgewinnung bzw. die Entstehung von Wissen im Lernenden durch die sozusagen „mechanische“ Wirkung äußerer Ursachen erklären: In das anfangs „leere Kabinett“ des Geistes (J. Locke) strömen von außen (d. h. von der natürlichen und sozialen Umwelt und dem Lehrer) kommende Sinneseindrücke, prägen sich durch Wiederholung ein und schlagen sich in geordneten Vorstellungen und Verhaltensweisen nieder. In der lapidaren Sprache des Behaviorismus ist Lernen nichts anderes als ein relativ stabiler Zuwachs im Verhaltensrepertoire, der das Ergebnis von Übung und dabei erfolgender Verhaltenskontrolle ist. Der Lernende versucht nachzuahmen, was ihm vorgemacht wird, bleibt aber ansonsten passiv. Er läßt sich gewissermaßen wie ein Schiff beladen.

Dem Lehrer kommt in dieser Sichtweise die Aufgabe zu, den Wissensvermittlungsprozeß im Detail zu steuern und zu überwachen: durch Zerlegung des Stoffes in einzelne „Lernelemente", durch „methodisch gestufte" Lernsequenzen vom „Einfachen" zum „Schwierigen", durch Erklärung von Begriffen und Regeln anhand von Beispielen und Musteraufgaben, durch „aufbauende" Serien von Übungs- und Anwendungsaufgaben, durch den ständigen Vergleich des Ist-Zustandes mit dem Soll-Zustand, durch didaktische Tricks (Folien, Farbstifte, ...) usw. Die Didaktik als Berufswissenschaft des Lehrers hat entsprechende theoretische Rahmen, Lehrbuchwerke und Materialien zur Verfügung zu stellen, die dem Lehrer die Steuerung und die Kontrolle des Unterrichts ermöglichen und erleichtern. Die Geschichte der allgemeinen Didaktik weist bis heute eine Fülle Instruktionsorientierter didaktischer Modelle auf, von denen die Herbart-Zillerschen Formalstufen, der fragend-entwickelnde Unterricht, die Aufgabendidaktik, die Operationalisierung von Lernzielen, der programmierte Unterricht und die Galperinsche Methode der etappenweisen Ausbildung geistiger Operationen die wohl bekanntesten sind. Bei allen Unterschieden verfolgt jedes dieser Modelle das Ziel, den Lernprozeß des Schülers durch die didaktische „Kleinarbeitung des Stoffes" (B. Andelfinger) und die kleinschrittige Unterrichtsführung möglichst weitgehend in den Griff zu bekommen.

Man muß auch hier deutlich sehen, daß der methodische Formalismus keine spätere Entartung von Ansätzen ist, die ursprünglich auf die freie Entfaltung der Schülerpersönlichkeit gerichtet waren, sondern daß er von Anfang an in der Didaktik angelegt war. Bei Comenius, dem Erzvater aller Didaktik, heißt es in einem der ersten Kapitel der 1651 erschienenen „Großen Didaktik" zwar noch:

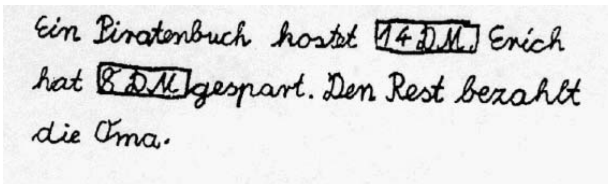
> Es ist also nicht nötig, in den Menschen etwas von außen hineinzutragen. Man muß nur das, was in Ihm beschlossen liegt, herausschälen, entfalten und im einzelnen aufzeigen.

Wenn aber Comenius gegen Ende der „Großen Didaktik" auf die praktische Lehrmethode zu sprechen kommt, hat er, offenbar ohne sich dessen bewußt zu sein, eine 180°-Wendung vollzogen. Von der Nutzung der Möglichkeiten der Kinder ist nichts mehr zu spüren, wenn er schreibt:

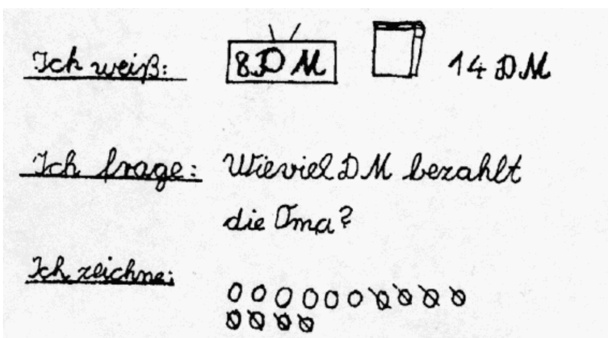
> Wir wollen an der Ähnlichkeit (der Lehrkunst) mit der Buchdruckerkunst festhalten .... Dabei wird sich zeigen, daß das Wissen beinahe in der selben Weise dem Verstande eingeschrieben wird, wie es äußerlich auf das Papier aufgedruckt wird. Deshalb wäre es gar nicht unpassend, wenn man – auf das Wort Typographie anspielend – für die neue Lehrmethode den Namen „Didachographie" bilden würde .... Die Buchdruckkunst hat ihre besonderen Materialien und ihren besonderen Arbeitsgang. Die wichtigsten Materialien sind Papier, Typen, Druckerschwärze und Presse ... In der Didachographie ... verhält es sich folgendermaßen: Das Papier sind die Schüler, deren Verstand mit den Buchstaben der Wissenschaften gekennzeichnet werden soll. Die Typen sind die Lehrbücher und die übrigen bereitgestellten Lehrmittel, mit deren Hilfe der Lehrstoff mit wenig Mühe dem Verstande eingeprägt werden soll. Die Druckerschwärze ist die lebendige Stimme des Lehrers, die den Sinn der Dinge aus den Büchern auf den Geist der Hörer überträgt. Die Druckerpresse ist die Schulzucht, welche alle zur Aufnahme der Lehrer bereit macht und anspornt.

An drei Beispielen möchte ich aufzeigen, wie die Charybdis des methodischen Formalismus den gesunden Menschenverstand von Schülern bedrohen kann.

(1) Das erste Beispiel habe einem Buch einer Grundschullehrerin entnommen (Andresen, 1986, 196–197). Es geht dabei um die traurige Erfahrung des siebenjährigen Sebastian bei der folgenden Textaufgabe:



Hier ist die Lösung:



Ich rechne: 14 DM − 8 DM = 6 DM

Ich prüfe: 6 DM + 8 DM = 14 DM

Ich antworte: Die Oma bezahlt 6 DM

Sebastians Vater schreibt dazu empört folgenden Brief:

> Leichte Textaufgaben kann Sebastian im Kopf in wenigen Sekunden ausrechnen. Für die Aufgabe „Ein Piratenbuch kostet 14 DM. Erich hat 8 DM gespart. Den Rest bezahlt die Oma.“, brauchte er über eine halbe Stunde und hat dabei viel geweint. Sebastian hat dabei gelernt, daß er sich auf seinen gesunden Hausverstand nicht verlassen darf und daß einfache Denkaufgaben nun sehr umständlich, kompliziert (6 Schritte) und schwierig zu lösen sind. Für mich als Vater ist dies ein schöner Beweis, wie es der Schule gelingt, durch gute Didaktik den Kindern Selbstvertrauen zu nehmen, Lerneifer und Lernfreude zu zerstören und die Lust an der Schule und am Lernen, die bei jedem Erstklässler stark da sind, in kurzer Zeit in Unlust und Angst zu verwandeln.

Didaktische Zwangsjacken wie das obige Schema zur Lösung einer Textaufgabe sind im Mathematikunterricht vom 1. Schuljahr aufwärts sehr weit verbreitet, und sie werden für viele Schüler zu einer beherrschenden Randbedingung Ihrer schulischen Existenz (Schoenfeld 1988).

*

(2) In einer Klassenarbeit für das 7. Schuljahr wurde folgende Aufgabe gestellt:

Eine Fabrik stellt Luftballons her. In dem Karton befinden sich 500 Luftballons. Mit der Wahrscheinlichkeit $1/20$ kommen kaputte Luftballons in einem Karton vor.

a) Berechne, mit wie vielen kaputten Ballons man je Karton rechnen muß.

b) Aus technischen Gründen muß die Fabrik Ihre Ballons in größeren Kartons abpacken. Jetzt passen 1000 Luftballons hinein. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, einen kaputten Luftballon zu erhalten?

Zeichne zu dieser Aufgabe ein Baumdiagramm und schreibe Deine Rechnung auf. Antworte in einem Satz.

Lösungen der überwiegenden Mehrheit der Schüler:

a) Bei 500 Ballons hat man 25 kaputte.

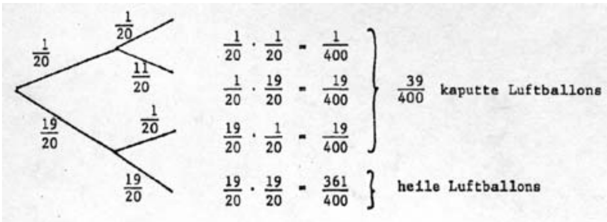
$$\frac{\cancel{500}^{25}}{500} \cdot \frac{1}{\cancel{20}_1} = \frac{25}{500} .$$

b) Bei 1000 Ballons hat man 50 kaputte.

$$\frac{\cancel{1000}^{50}}{1000} \cdot \frac{1}{\cancel{20}_1} = \frac{50}{1000} .$$

Die Lehrerin zeichnet a) mit „r“ ab, b) mit „Ansatz f“.

Bei der Berichtigung wird die folgende „Lösung“ als richtig besprochen:



Dieser Ansatz beschreibt das Ziehen von 2 Luftballons aus je einem Kanon und hat mit der Teilaufgabe b) nichts zu tun. Ich will hier nicht auf die Auseinandersetzung eingehen, die sich zwischen einigen Eltern und der Lehrerin abgespielt hat. Bemerkenswert scheint mir hier, daß 6 von 24 Kindern in der Klassenarbeit die falsche Lösung der Lehrerin hingeschrieben hatten, weil sie offenbar gewohnt sind, den Anweisungen der Lehrerin blind zu folgen, ein Musterbeispiel für die Ersetzung der „Sachlogik“ durch die „Interaktionslogik“ (J. Voigt).

*

(3) Das dritte Beispiel ist der Auszug aus einem Protokoll einer Unterrichtsstunde über Parallelverschiebungen (Schneider 1988, 74–76).

L: Wir fangen heute mit einem neuen Thema an. Das wird uns einige Wochen begleiten. Das Thema heißt: Die Verschiebung. Alle Kinder passen von Anfang an gut auf: Das hören wir jetzt nicht nur in der 4. Klasse, sondern das kommt immer wieder – immer wieder in abgewandelter Form und begleitet euch durch die nächsten Schuljahre. Solltet ihr einen technischen Beruf ergreifen, so begegnet euch die Verschiebung auch wieder. Wir legen jetzt den Grundstein dafür. Ihr überlegt euch jetzt 'mal, was wir mit diesem Begriff ‚Verschiebung‘ anfangen können, was uns da durch den Sinn geht. (kurze Pause) Ich bilde eine Zwischenüberschrift, das, was wir heute machen wollen. Und zwar: ‚Verschieben von Gegenständen‘. Da fällt euch, glaube ich, etwas mehr ein.

Anschließend werden von den Schülern einige Beispiele für das Verschieben von Gegenständen (Möbeln im Klassenraum) genannt. Die Lehrerin versucht dann zu erarbeiten, daß die Verschiebung geradlinig erfolgt.

L: Wie können wir diese Gegenstände verschieben?
S: Nach rechts und links, vor und zurück.
S: Nach oben und unten.
L: Ja, das ist richtig, bei der Tafel. Wer kann denn das noch schöner formulieren? Nach oben oder unten, links oder rechts. Man könnte das noch anders bezeichnen.
S: Nach einer Seite.
L: Ja, nach einer Seite, oder wie kann ich es auch noch sagen? Denkt 'mal daran, was wir als letztes Thema hatten in Geometrie!
S: Man kann die Gegenstände senkrecht, waagerecht und schräg verschieben. L: Ja, aber das war es nicht. Ich wollte einen anderen Begriff, 'mal seh'n, ob wir Ihn finden.
S: Man kann auf einer Ebene verschieben.
L: Ja, auf einer Ebene, und noch etwas gehört dazu.
S: Man kann den Gegenstand parallel verschieben.
L: Dann müßte ich zwei Gegenstände haben. Ihr habt meine Handbewegung falsch verstanden.
S: Den Gegenstand gerichtet verschieben.
L: Ja, noch besser, nicht nur gerichtet, sondern ...
S: Gerade.
L: Gerade, ja, oder wie können wir das noch formulieren? Gerade ist also richtig. Ich kann also verschieben, gerade oder geradlinig – gehört auch dazu. Und wir sprechen also von einer geraden, geradlinigen Richtung oder von einer geradlinigen Fortbewegung. Das müssen wir uns jetzt erst 'mal gut merken. Ich verschiebe also die Tafel – das ist also eine geradlinige Fortbewegung. Also, Gegenstände kann ich in geradliniger Richtung verschieben.

Obwohl sich in der mathematikdidaktischen Forschung eindeutige Befunde über die oberflächlichen, verständnishemmenden Wirkungen eines kleinschrittigen, von äußerlichen Routinen geprägten Unterrichts häufen (Bauersfeld 1980, Voigt 1984, Bouvier 1984, Stein 1987), wird die heutige Unterrichtspraxis noch vielfach von den Prinzipien „der kleinen und kleinsten Schritte", „der methodischen Stufung" und „der Isolierung der Schwierigkeiten" beherrscht und die Charybdis des methodischen Formalismus ist namentlich in der allgemeinen Didaktik noch keineswegs überwunden. 1989 (!) ist z. B. ein Buch „Didaktiksprache. Grundlagen einer strengen Unterrichtswissenschaft" erschienen (Eckel 1989), das von folgenden Wahnsinnsvorstellungen getragen ist:

> Die (Didaktik)Sprache ermöglicht die Erstellung von Unterrichtsvorlagen, die erstens den Unterricht vollständig beschreiben und anhand derer zweitens eine eindeutige und bequeme Verständigung zwischen Unterrichtsfachleuten möglich ist. Es gibt einen universellen, in der Didaktiksprache beschriebenen Unterrichtsalgorithmus: Jeder Unterrichtsablauf ist ein Spezialfall von diesem.

Ich denke, daß es die spezifische Aufgabe der Mathematikdidaktik ist, diesem methodischen Formalismus ein anderes Konzept von Unterricht entgegenzusetzen, nämlich einen *lebendigen* Unterricht, der von einem *lebendigen* Bild von Mathematik ausgeht, der Individuelle Lernprozesse, Aha-Erlebnisse, Vorgriffe, Sprünge, Brüche, Stillstände, Rückschläge ermöglicht und vom Lehrer daher nicht im einzelnen planbar ist.

3.3 Das didaktische Dilemma

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns, die obige These 3 als „didaktisches Dilemma" oder „didaktischen Skin-Effekt" auszuformulieren (vgl. Brousseau 1984, Mason & Davis 1988):

Der Lehrer kann dem Schüler zum Erwerb von Wissen und dem Aufbau von Verständnis nur dadurch Hilfestellung leisten, daß er sich äußerer Hilfsmittel bedient. Je expliziter er aber damit den Lernstoff beschreibt und je enger und kleinschrittiger er den Unterricht auf die angestrebten Lernziele ausrichtet, desto mehr wird der Schüler dazu verleitet, eigene Anstrengungen zum Aufbau von Verständnis einzustellen und nur oberflächlich zu lernen.

Natürlich stellt sich die Frage, ob und wie der Lehrer dem didaktischen Dilemma entrinnen kann. Dieser Frage wende ich mich im nächsten Abschnitt zu.

4 Die systemische-evolutionäre Sicht von Lehr-Lern-Prozessen: Eigenaktivität in komplexen Lernsituationen und Hilfe zur Selbsthilfe

Alle Versuche, das Lehren und Lernen von Mathematik auf dem Weg formaler Begriffsklärung oder auf methodische Weise in den Griff bekommen zu wollen, übersehen einen alles entscheidenden Punkt: Schüler sind *lebendige* Wesen, der Unterricht stellt ein *lebendiges* soziales System dar und die Mathematik ist ein *gewachsener* und sich *entwickelnder* Organismus.

Der Lehrer, der vor einer Klasse steht, befindet sich damit im Prinzip in derselben Situation wie ein Biologe, der ein ökologisches System wieder ins Gleichgewicht bringen soll, wie ein Manager, der einen Betrieb lebensfähig zu halten hat, wie ein Politiker, der eine Gesellschaft zu neuen Ufern führen will, wie ein Arzt, der seinem Patienten zur Wiedergewinnung der Gesundheit verhelfen möchte, wie ein Trainer, der seine Mannschaft zum Sieg führen will, usw. In allen diesen Fällen geht es darum, *lebendige* Systeme zu steuern, deren Besonderheit in ihrer hohen *Komplexität*, d. h.

in ihrer unüberschaubaren und im Detail unzugänglichen Vielfalt an internen Abläufen und externen Austauschprozessen mit der jeweiligen Umgebung, liegt. Die entscheidende Frage ist dabei immer, wie man die Komplexität des jeweiligen lebendigen Systems beherrschen kann.

Von der Naturwissenschaft der vergangenen Jahrhunderte haben wir ein mechanistisches Weltbild geerbt, das die Analysierbarkeit und Mathematisierbarkeit der Welt beinhaltet und das in diesem Jahrhundert auch auf die Humanwissenschaften übertragen worden ist. Daraus hat sich geradezu zwangsläufig ein Paradigma der Komplexitätsbeherrschung ergeben, das der Schweizer Managementwissenschaftler Malik als „mechanistisch-technomorph" bezeichnet und folgendermaßen umschreibt (Malik 1986, 39):

> Komplexitätsbeherrschung im Lichte dieses Paradigmas bedeutet also die Herstellung einer an bestimmten, im voraus festzulegenden Zwecksetzungen zu beurteilenden und im Lichte dieser Zwecksetzung als rational geltenden Ordnung (von Elemente, Abläufen, usw.) durch planvolles menschliches Handeln derart, daß das Resultat dieses HandeIns aufgrund der dem Handeln inhärenten Zweckrationalität den vorgefaßten Absichten und Zwecken entspricht. Zu diesem Paradigma gehört weiter die Vorstellung, daß außer auf diesem Wege nichts Zweckmäßiges entstehen kann, daß also jede menschlichen Zwecken entsprechende Ordnung ausschließlich durch, im beschriebenen Sinne, zweckrationales und absichtsvolles Handeln zustandekommen kann.

Die diesem Paradigma entsprechende Form der Menschenführung ist dadurch charakterisiert, daß eine starke, vollinformierte Führungspersönlichkeit detaillierte Anweisungen gibt und die Ausführung dieser Anweisungen fortlaufend kontrolliert und korrigiert. Die oben beschriebenen Typen des lehrerzentrierten Unterrichts sind nichts anderes als Spezialfälle davon.

Heute machen uns, z. T. schmerzliche, Erfahrungen in verschiedensten Bereichen deutlich, daß Versuche, die Komplexität eines Systems auf direktem Weg von außen beherrschen zu wollen, unzureichend und sehr problematisch sind und mehr Schaden als Nutzen stiften. Den Grund für das Scheitern solcher Eingriffe hat die evolutionäre Systemtheorie klar herausgearbeitet: Lebendige Systeme sind so hochgradig komplex, daß sie sich einer Detailsteuerung von außen entziehen. Sie brauchen diese Steuerung auch nicht, weil sie die Fähigkelt haben, sich von Innen heraus selbst organisieren zu können.

Für hochgradig komplexe Systeme gilt nämlich ein systemtheoretisches Gesetz, das ich als „Hauptsatz der Komplexitätsbeherrschung" bezeichnen möchte (Wittmann 1988, 1990):

Es ist unmöglich, ein System, das einer komplexen Umgebung gegenübersteht und selbst eine komplexe Struktur aufweist, von außen durch vollständige detaillierte Kontrolle zur Erreichung vorgegebener Ziele zu zwingen. Die Komplexität läßt sich nur von Innen heraus beherrschen, indem Verhaltensstrukturen zur Geltung gebracht werden, die im System selbst spontan entstehen. Der größte Zuwachs an interner Organisation tritt in der Symbiose teilweise autonomer, sich selbst steuernder Untersysteme ein.

Je komplexer die angestrebten Verhaltensweisen sind, desto mehr bedarf es zu ihrer Ausbildung der spontanen Kräfte im System. Je mehr die Kontrolle von außen verstärkt wird und je mehr die spontanen Kräfte übergangen oder gar unterdrückt werden, desto ärmere Verhaltensstrukturen bilden sich heraus.

Dieser „Hauptsatz" gibt eine tiefere Erklärung für das didaktische Dilemma: Die psychologischen Prozesse, die im einzelnen Schüler ablaufen, die sozialen Prozesse im Unterricht und der Unterrichtsstoff, selbst in seinen elementarsten Formen, sind so komplex, daß es völlig aussichtslos ist, verständnisvolles mathematisches Lernen durch eine bis ins Detail getriebene Formalisierung oder eine kleinschrittige, genau kontrollierte Folge von Lernanweisungen erfassen zu wollen. Wenn man einen solchen Unterricht dennoch durchsetzen will, muß die Komplexität notwendigerweise stark reduziert werden. Der Unterricht entartet dann in die Vermittlung von Rezepten, die an bestimmten Musteraufgaben eingeführt werden und auf ganz bestimmte Aufgabentypen zugeschnitten sind. Auf die Dauer muß ein solcher Unterricht bei der großen Mehrheit der Schüler die Fähigkeit zur Selbstorganisation und zu sozialem Lernen untergraben, wie vielfach zu beobachten ist.

Ins Positive gewendet stützt der „Hauptsatz" das *systemisch-evolutionäre* Paradigma der Menschenführung (Malik 1986, 39), das darin besteht, Ziele zu setzen, Einsicht in die Ziele zu wecken und der Eigenaktivität für die Erreichung der Ziele bewußt Raum zu geben. Für den Unterricht bedeutet dies die Anwendung aktiv-entdeckender Lehr-Lernformen, wie sie m. E. am klarsten und prägnantesten Johannes Kühnel am Anfang dieses Jahrhunderts gefordert hat (zitiert nach Kühnel, 1954 8, 70):

> Nicht *Leitung* und *Rezeptivität*, sondern *Organisation* und *Aktivität* ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet.

Das Rollenverständnis von Lehrer und Schüler ist hier grundsätzlich anders: Der Lehrer liefert den Schülern einen Zielrahmen und Orientierungspunkte. Er versetzt sie in komplexere Lernsituationen, mit denen sie längere Zelt beschäftigen und an denen sie mathematische Erfahrungen erwerben können. Der

Lehrer zieht sich vom direkten Eingriff in den Unterricht möglichst zurück und verlegt sich mehr auf die Organisation und die indirekte Lenkung der Schüleraktivitäten. Insgesamt leistet er Hilfe zur Selbsthilfe. Die Schüler werden dadurch veranlasst, ihre Selbstorganisationskräfte zu entwickeln, ihren Verstand zu gebrauchen und Verantwortung für ihr Lernen zu übernehmen.

Von den zahlreichen didaktischen Veröffentlichungen der letzten Jahre, welche die Überlegenheit dieses Ansatzes empirisch belegen, möchte ich die Arbeit von Lochhead 1979 erwähnen, der aus einer gut gemeinten, aber dennoch gründlich mißlungenen didaktischen Intervention in einen Problemlöseprozeß von zwei Studenten fünf Folgerungen für den Unterricht zieht:

1. Lehrer reden zu viel. Sie müssen lernen, den Mund zu halten und zuzuhören. Eine der besten Methoden dafür besteht darin, eine ernsthafte Diskussion unter Schülern anzuregen.
2. Wir neigen dazu, die Leistungen von Schülern zu unterschätzen, weil wir uns zu wenig in ihre Denkprozesse hineinversetzen. Was im Unterricht auf den ersten Blick wie ein Auf-der-Stelle-Treten ohne irgendeinen Lernfortschritt aussieht, kann sich bei genauerem Hinsehen als beeindruckende Leistung der Schüler entpuppen.
3. Auch wenn die Schüler im großen und ganzen stetig vorankommen, kann ihr Erkenntnisstand zwischendurch immer wieder einmal absinken, und die Schüler können zeitweise schlechter arbeiten, als der Lehrer aufgrund der vorherigen Lernfortschritte erwarten würde. Die oszillatorische Natur des Lernens wird im Sport mittlerweile als Tatsache akzeptiert. Im schulischen Lernen wird sie noch viel zu wenig beachtet.
4. Schüler können mathematische Begriffe bilden und Formeln finden, wenn man Ihnen dafür Zeit läßt. Der heutige Unterricht nimmt ihnen in aller Regel systematisch die Möglichkeit dazu und bringt Schüler hervor, die vollkommen unfähig sind, an neue Situationen selbständig heranzugehen.
5. Der korrekte Gebrauch der Terminologie ist eine natürliche Folge von Verstehen, aber Verstehen resultiert nicht aus der Fähigkeit, die Terminologie korrekt zu benutzen. Wir führen Schüler viel zu früh in die Fachsprache ein. Dieses Vorgehen ist völlig unnötig, weil Schüler neue Fachausdrücke ziemlich leicht aufnehmen können, wenn sie die Notwendigkeit dafür sehen.

Da es aus systemischen Gründen zu aktiv-entdeckenden Unterrichtsformen keine sinnvolle Alternative gibt, müssen wir alles daran setzen, um den Mathematikunterricht von der Grundschule bis zur Universität in diese Richtung zu entwickeln, auch wenn die Umstellung sehr mühsam sein und auf Widerstände unterschiedlichster Art treffen wird (Wittmann 1990, 159–162, 165) – wie ja auch die entsprechende Neuorientierung im ökologischen, wirtschaftlichen, sozialen und politischen Bereich bekanntlich sehr schwer ist.

In der Vergangenheit ist die Position aktiv-entdeckender Unterrichtsformen dadurch geschwächt worden, daß ihre Anhänger als „Idealisten“ hingestellt wurden, die sich über die realen Bedingungen der Praxis hinwegtäuschten. Die systemisch-evolutionäre Sichtweise des Unterrichts erlaubt uns heute, die Dinge zurechtzurücken: Tatsächlich sind es die Vertreter der aktiv-entdeckenden Unterrichtsformen, welche die Möglichkeiten und Grenzen des Lehrens und Lernens realistisch sehen, und Idealisten, ja geradezu Phantasten, sind diejenigen, die das Boot „Mathematiklernen“ so über das Meer des Unterrichts steuern, als ob die Skylla des mathematischen Formalismus und die Charybdis des methodischen Formalismus nicht existierten.

Literatur

Andelfinger, B. & Voigt J. (1986) Vorführstunden und alltäglicher Mathematikunterricht – Zur Ausbildung von Referendaren im Fach Mathematik (S I/S II). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 86/1, 2–9.

Bauersfeld, H. (1980) Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 11, 23–41.

Brousseau, G. (1984) The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In: Steiner, H.G. (1984) u.a.: *Theory of mathematics education.* Occasional Paper Nr. 54. Bielefeld: IDM, 110–119.

Bouvier, A. (1981) *La mystification mathématique.* Paris: Herman.

Bouvier, A. (1987) The Right to make mistakes. *For the Learning of Mathematics* 7, 17–25.

Davis, Ph. & Hersh, R. (1983) *Erfahrung Mathematik.* Basel/Stuttgart: Birkhäuser.

Dieudonne, J. (1974) Sollen wir „moderne“ Mathematik lehren?. In: Otte, M. (Hrsg.) (1974) *Mathematiker über Mathematik.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 403–418.

Eckel, K. (1989) *Didaktiksprache. Grundlagen einer strengen Unterrichtswissenschaft.* Köln: Böhlau

von Foerster, H. (1985) *Sicht und Einsicht.* Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg.

Freudenthal, H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413–435.

Giles, G. (1987) Ist Lehren ein Hindernis für Lernen? mathematik lehren 21, 6–10, (Übersetzung des englischen Originals: Does teaching inhibit learning? *Mathematics Teaching* 65 (1973), 33–38.)

Kühnel, J. (1954^{8}) *Neubau des Rechenunterrichts.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Lochhead, J. (1979) On Learning to Balance Perceptions by Conceptions: A Dialogue between Two Science Students. In: Lochhead, J./Clement, J. (eds.). *Cognitive Process Instruction. Research on Teaching skills.* Philadelphia, 147–178

Mason, J.H. & Davis, J. (1988) The importance of Weltanschauung in Teaching, In-service and Appraisal. Manuscript. Open University, Milton Keynes U.K.

Osserman, R. (1983) Structure vs. Substance: The Fall and Rise of Geometry, In: Zweng, M. et al. (1983) *Proceedings of ICME 4.* Boston: Birkhäuser

Revuz, A. (1980) *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?* Paris: PUF

Schneider, S. Gedanken zu einem Unterrichtsgespräch über den Verschiebungsbegriff Aus: Preprint Nr. 172 c (Neue Folge) Zu Fragen des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Schule, Berlin: 1988, 74–76

Schoenfeld, A. H. When Good Teaching Leads to Bad Results The Disasters of „Well-Taught" Mathematics Courses, In: *Educational Psychologist* 23(2), 145–166

Stein, K.S. (1987) Gresham's Law: Algorithm Drives out Thought. *For the learning of Mathematics* 7, 2–4

Steinbring, H. (1988) Nature du savoir mathématique dans la practique de I'enseignement. In: Laborde, C. (ed.) (1988) *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de I'lnformatique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 307–316

Thom, R. (1973) Modern Mathematics – Does it exist? In: Howson, A.G. (ed.) (1973) *Developments in Mathematical Education.* Cambridge: CUP, 194–212

Voigt, J. (1984) Szenen und Analysen. *mathematica didactica*, 161–186

Wittmann, E. Ch. (1987) *Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken.* Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg

Wittmann, E. Ch. & Muller, G. (1988) Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P, (1988) *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für H. Winter*, Berlin: CVK, 237–257

Wittmann, E. Ch. (1988) Das Prinzip des aktiven Lernens und das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte in systemischer Sicht. *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1988, Bad Salzdetfurth, 339–342

Wittmann, E. Ch. (1989) Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen". Die Konzeption des aktiventdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (1990) *Handbuch produktiver Rechenübungen.* Bd. 1. Stuttgart: Klett, 152–166

Wolff, Chr. (1973) Ausführliche Nachricht von seinen eigenen Schriften. Kap. 3: Von der Lehrart des Autoris, 52–124. *Ges. Werke, I. Abt. Deutsche Schriften Band 9*, Hildesheim, New York: Olms.

Adresse des Autors
Prof. Dr. Dr. h.c. Erich Christian Wittmann
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
Universität Dortmund
44221 Dortmund
erich.wittmann@mathematik.uni-dortmund.de

Zunahme der elektronisch publizierten mathematischen Dissertationen

Während noch im Jahr 2000 der Anteil der elektronisch publizierten mathematischen Dissertationen 28 % betrug, sind im Jahre 2001 schon 34 % der mathematischen Dissertationen elektronisch veröffentlicht worden. Und der Anteil nimmt weiter zu.

Damit nimmt die Mathematik im Hinblick auf den Anteil einen fünften Platz ein. Spitzenreiter ist das Fach Chemie, wo mittlerweile fast 60 % der Dissertationen elektronisch erscheinen, gefolgt von der Veterinärmedizin, dem Fach Physik und dem Fach Biologie.

Näheres kann man Graphiken der Deutschen Bibliothek (DDB) entnehmen, bei der eine Koordinationsstelle für Fragen rund um die elektronisch publizierten Dissertationen eingerichtet worden ist (vgl. http://deposit.ddb.de/netzpub/statistik/eDiss-SG-E-P.htm).

Im Übrigen verweisen wir Interessenten auf das Projekt MathDissInternational (siehe http://www.ub.uni-duisburg.de/mathdiss/), wo ebenfalls Informationen abgerufen werden können.

Prof. Dr. Günter Törner
Institut für Mathematik, Fakultät 4
Gerhard-Mercator-Universität
Lotharstraße 65
47048 Duisburg
toerner@math.uni-duisburg.de