

Teacher's corner – kurze Beweise mit langer Wirkung

In Heft 3–2001 starteten wir eine Kolumne, welche ungewöhnlich kurze Beweise oder prägnante Konzepte sammelt, unmittelbar geeignet für den Einsatz in der Lehre. (FB)



No. 5: Hauptachsentransformation. Jede Vorlesung über Lineare Algebra beweist, wenn auch in zuweilen verschiedenen Sprechweisen, den

Spektralsatz. Zu einer reell symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix Q , so dass $Q^T A Q$ diagonal ist.

Viele Beweise ringen mit mehrfachen Eigenwerten und konstruieren Eigenräume, gewöhnlich einen nach dem anderen. Ausgehend von einer Idee von Jacobi zur numerischen Lösung des Eigenwertproblems und etwas Kompaktheit fand Herbert Wilf einen Beweis, der Q auf einen Schlag konstruiert.

Beweis. Mit $\Sigma(A)$ bezeichnen wir die Summe der Quadrate der Nebendiagonalelemente von A . Jacobis berühmte Idee besteht nun darin, $\Sigma(A)$ für eine nicht-diagonale reell symmetrische Matrix A durch eine geeignete orthogonale Matrix J zu reduzieren

$$\Sigma(J^T A J) < \Sigma(A).$$

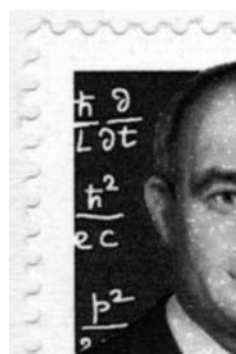
Für $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$ konstruiert man ein solches J mittels der Rotation in der i - j -Ebene, welche eben dieses Element zu Null macht, $(J^T A J)_{ij} = 0$. Eine leichte Rechnung zeigt $\Sigma(J^T A J) = \Sigma(A) - 2a_{ij}^2 < \Sigma(A)$.

Nun folgt der Spektralsatz recht schnell. Wir betrachten die Abbildung f , die eine orthogonale Matrix Q auf $f(Q) = Q^T A Q$ abbildet. Da die orthogonalen Matrizen eine kompakte Gruppe bilden, ist das Bild unter f ebenfalls kompakt und Σ nimmt dort in einem Punkt $f(Q) = D$ das Minimum an. Es muss $\Sigma(D) = 0$, d. h. D diagonal sein, da wir ansonsten mit Jacobis Methode diesen Wert weiter reduzieren könnten.

Quelle. Herbert S. Wilf, *An algorithm-inspired proof of the spectral theorem in E^n* , Amer. Math. Monthly 88, 49–50, 1981.

Aufgestöbert von Folkmar Bornemann

Das stimmt nicht



Es ist Zeit, das Geheimnis in Heft 2–2002 der *DMV-Mitteilungen* zu lüften.

Es sind zahlreiche Emails mit verschiedenen Erklärungen aus ganz Deutschland und sogar aus Italien bei mir eingegangen, und ich danke allen Einsendern sehr herzlich.

Die meisten Einsender wiesen darauf hin, dass Fermi

Linkshänder war, er auf der Briefmarke aber die Kreide in der rechten Hand hält. Auf diese Lösung war ich gar nicht gefasst; sie ist originell, aber nicht das, was ich meinte. Einige von Ihnen „beanstandeten“ auch den Kreis an der Tafel (Mittelpunkt falsch, Radius falsch usw.). Auch das war nicht gemeint, da es sich m. E. nur um eine rohe Skizze handelt.

Der „wirkliche“ Fehler liegt in der Formel links oben: bei der Feinstrukturkonstante, die in der Formel erscheint, sind das „ e “ und „ h^2 “ vertauscht: das „ e “ muss im Zähler und das „ h^2 “ im Nenner stehen. Um das zu bemerken, braucht man natürlich nicht nur gute Augen, sondern auch Kenntnisse in Elementarteilchenphysik.

And here is the winner: Der einzige, der diese Lösung fand, ist Matthias Schork. Wenn Sie, Herr Schork, mir also Ihre Postadresse schreiben, bekommen Sie in den nächsten Tagen die Flasche Wein zugestellt.

Prof. Dr. Jürgen Appell
Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
97074 Würzburg
appell@mathematik.uni-wuerzburg.de