Briefe an die Herausgeber

Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis
(3–2002)

17. 8. 2002 – Herr Wittmann erlebt im Anschluss an eine Vorlesung etwas, was sich jeder Lehrer wünscht. Er hat den eulerschen Polyedersatz operativ (was ist das?) bewiesen. Eine Studentin fragt, ob das denn ein Beweis sei, da sogar sie ihn verstanden habe. Herr Wittmann überprüft dieses subjektive Gefühl der Studentin nicht. Er hätte eine oder zwei Wochen später den Beweis oder Beweisgedanken in einem Test abfragen können. Das Ergebnis hätte seine Freude über seinen Lehrerfolg sicherlich etwas gemildert.

Lieber erschrecken die Verfasser den Leser mit der folgenden These:

> Die gut gemeinten Versuche des gymnasiale Mathematikunterrichts, mathematisches Verständnis durch formale Präzision zu gewährleisten, bewirkt bei der großen Mehrheit der Schüler also das Gegenteil, nämlich Unverständnis. (S. 36)

Seit 28 Jahren bemühe ich mich, den Kindern genau zu erklären, was ein Kreis, eine Mittelsenkrechte ist (kein „Strich durch die Mitte“). Wir erarbeiten zusammen, welche Eigenschaft die Punkte auf ihr haben. Diese Begriffe müssen meine Schüler präzise und formal richtig verwenden können. Ich war bisher stets der Meinung: Nur so können sie verstehen, warum die Eckpunkte eines Dreiecks stets auf einem Kreis liegen. Es deprimiert mich zu erfahren, dass ich dadurch mathematisches Unverständnis bewirkt habe. Es beruhigt mich wenig, wenn der hohe Priester der Didaktik mir wenigstens den guten Willen nicht aberkennt.

Aber wie sieht denn die empirische Basis des Erfahrungssatzes von Herrn Wittmann aus? Er schildert eine Reihe von Beispielen mit denen er seine Thesen zu bestätigen sucht. Das erste Beispiel, mit dem ich mich auseinandersetzen möchte, stammt aus dem Umfeld des Primzahlsatzes von Euklid (Euklid, *Die Elemente*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1973, Seite 204). Seit Euklid wissen wir, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dieser Satz nahm im Jahre 1990 nach mehr als 2300 Jahren auf der Liste der Top Ten der schönsten mathematischen Sätze den dritten Platz ein (Pierre Basieux, *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze*. rororo 2001, Seite 12). Euklid bewies dies so klar, dass sein Beweis auch heute noch sämtliche Präzisionsanforderungen erfüllt. Sein Beweis ist so schön, dass er in dem „Buch der Beweise“ (Martin Aigner und Günter M. Ziegler, *Das Buch der Beweise*. Springer 2001, Seite 3) als erstes Beispiel steht. Klarheit und Schönheit sind eben Zwillinge.

Ein Lehrer versuchte dieses Kulturgut seinen Schülern nahezubringen. Im Gegensatz zu Herrn Wittmann testete er nach einer gewissen Zeit in einer Klassenarbeit, ob sein Versuch erfolgreich war. Er machte die traurige Erfahrung, dass keiner der Schüler die Gedanken Euklids zu seinem geistigen Eigentum gemacht hatte. Auf seine Frage (siehe S. 37) schreibt ein „guter“ Schüler: „$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \cdot 7 = 210 \cdot 11 + 1 = 2311$“ und gibt die Antwort: „Die Primfaktoren müssen größer als 11 sein, weil die Primzahlen unter 11 oder gleich 11 die Zahl nicht teilen können.“ Dem korrigierenden Lehrer blieb sicher die Luft weg.

- Der „gute“ Schüler kennt offensichtlich nicht den Sinn des Gleichheitszeichens. $2 \cdot 3 \cdot 5$ ist leider nicht gleich $30 \cdot 7$. Für ihn in seiner Privatsprache bedeutet scheinbar „=“ so etwas wie „ich rechne weiter“ oder „gleich geht die Rechnung weiter“.
- Er berechnet die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$ tatsächlich, was der Lehrer sicher vermeiden wollte.
- Er gibt eine zirkuläre Antwort von der Art: Warum ist $10^{99} + 2$ durch 3 teilbar? Weil 3 die Zahl $10^{99} + 2$ teilt.

Dies hätte Euklid nicht gelten lassen und genausowenig kann es heute ein Vernunftbegabter gelten lassen. Traurig über seinen pädagogischen Misserfolg wird der Lehrer seine Korrekturzeichen gesetzt haben.

Natürlich ist es eine wichtige Frage, wie man solche Fehler so festmacht, dass der Schüler daraus lernen kann. Im Unterricht hätte ich beispielsweise gefragt: Wie groß ist der kleinste Primfaktor von $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \cdots 101 + 1$ mindestens. Hieran wäre der Schüler rechnerisch verzweifelt. Er hätte argumentieren müssen. Dies ist natürlich bei einer schriftlichen Prüfung unmöglich. Aber solch konstruktive Vorschläge macht Herr Wittmann nicht. Er glaubt den Verursacher der pädagogischen Niederlage erkannt zu haben. Mit erhobenem didaktischem Zeigefinger weist er auf die böse begriffliche Klarheit hin. Den Schülern sei eine formale Sprache übergestülpt worden. Dabei sind sie doch offensichtlich gegenüber dem Problem hilflos, weil sie wichtige Teile der 2300 Jahre alten mathematischen Sprache nicht beherrschen.

- Sie meinen Rechnen sei wichtiger als Denken.
- Sie können das Gleichheitszeichen nicht gebrauchen.
- Sie verstehen die Teilbarkeitslehre nicht und können die zugehörigen Sätze nicht verwenden.

Das von Wittmann gewählte Beispiel bestätigt die umgekehrte These. „Schüler, die mathematisch nur lallen, sind hilflos gegenüber Problemen. Sie bleiben angesichts der Aufgaben sprach– und verständnislos.“ Ähnlich mager ist der Rest der empirischen Basis von Wittmanns These.

Natürlich sind Worte und Gedanken nicht dasselbe. Gedanken muss sich jeder selber machen. Sie sind privat. Auch gilt: Nur Worte, bei denen sich was denken lässt sind wertvoll. Insofern hat der am Anfang des Artikels zitierte fernöstliche Weise Dschuang Dsi recht. Aber denken kann man sich viel. Das meiste davon sind Traumgebilde und verfehlte Fantasien. Erst ausgesprochene, aufgeschriebene, aufgezeichnete Gedanken sind kritisierbar. Nur Gedanken, die sich in einer Sprache klar kristallisieren, können widerlegt oder bewiesen werden. Nur sie können Keime für weitere Gedanken sein. Erst durch deutliche Worte werden mathematische Gedanken zu einem Kulturgut, für das es den Einsatz lohnt. Wenn es unmöglich ist mathematische Sprache zu lehren, dann darf sich die Gesellschaft Mathematiklehrer, Didaktik- und Mathematikprofessoren nicht leisten.

Dr. Andreas Bartholomé
84028 Landshut

Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis
(3–2002)

16. 9. 2002 – Herr Wittmann behandelt in seinem Artikel ein Problem, mit dem jeder verantwortungsbewusste (Mathematik-) Lehrer immer wieder ringt. Ich möchte einige Anmerkungen zu der im Abschnitt 3.2 beschriebenen „Charybdis des methodischen Formalismus“ machen.

Das erste von Herrn Wittmann zitierte Beispiel aus dem Buch einer Grundschullehrerin als „methodische Zwangsjacke“ einzustufen, erscheint mir als eine reichlich undifferenzierte Betrachtungsweise. Es geht doch dabei im Grunde um das, was man mit einem heutigen Modebegriff als „Methodenkompetenz“ (eine sehr alte pädagogische Forderung) bezeichnet. Wenn der Mathematikunterricht den Schülern etwas „für das Leben“ mitgeben kann, dann Methoden, wie man Probleme löst. Und die Grundschullehrerin wollte ihren Kindern nichts anderes beibringen als die klassische Methode des Problemlösens: Formuliere das Problem, vergewissere dich der schon vorhandenen Kenntnisse, die mit dem Problem (wahrscheinlich) etwas zu tun haben, probiere mit Hilfe von Zeichnung und Rechnung, wie man der Lösung näher kommen könnte, überprüfe die gewonnene Lösung und formuliere sie möglichst klar. Das ist keine Zwangsjacke, sondern eine Hilfestellung, die es verdient, „zu einer beherrschenden Randbedingung der schulischen Existenz“ von Schülern zu werden. Der Grundschullehrerin kann man nur vorwerfen, dass sie ein zu einfaches Problem ausgewählt hat. Wie bei jeder Hilfestellung durch den Lehrer sollte auch hier bei den Schülern das Bedürfnis dafür geweckt werden, im einfachsten Fall dadurch, dass zumindest ein Teil der Schüler echte Probleme mit dem zu lösenden Problem hat.

Im zweiten von Herrn Wittmann zitierten Beispiel geht es um die Methode des Baumdiagramms zur Lösung wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufgaben. Der grundsätzliche Wert dieser Methode dürfte wohl unbestritten sein. Es geht hier nur um die Frage, ob das Baumdiagramm der zitierten Aufgabenstellung (die im übrigen äußerst vage ist) angemessen ist. Das ist nun wiederum ein ganz wesentlicher Gesichtspunkt beim Problemlösen: Anwendungsbereich und Grenzen von Lösungsmethoden zu kennen. Den sollten sich Schüler (und erst recht Lehrer, wie das zitierte Beispiel zeigt,) immer wieder bewusst machen.

Im dritten von Herrn Wittmann zitierten Beispiel geht es um das kleinschrittige Unterrichtsgespräch. Ich stimme mit Herrn Wittmann voll überein, dass dieses „die Schüler dazu verleitet, eigene Anstrengungen zum Aufbau von Verständnis einzustellen und nur oberflächlich zu lernen.“ Doch kann auch der lebendigste Unterricht mit individuellen Lernprozessen nicht auf ein Unterrichtsgespräch verzichten. Es kommt dabei immer darauf an, das Gespräch interessant zu führen, d. h. unter anderem nicht zu kleinschrittig (von Lehrerseite) und i. Allg. nicht zur „Erarbeitung“ von Definitionen (wie in dem Beispiel).

Zusammenfassend möchte ich davor warnen, mit unvollständiger Induktion auf der Basis extremer Beispiele das Dogma begründen zu wollen, man müsse dem „methodischen (bzw. mathematischen) Formalismus einen lebendigen Unterricht entgegensetzen“. Lebendiger Unterricht schließt Formalismen nicht aus, sondern braucht sie, um nicht in Wildwuchs oder Beliebigkeit auszuarten und nicht in Sprachlosigkeit zu enden.

Michael Linzmaier
Gabelsbergerstraße 18
84034 Landshut

Wird die deutsche Forschungsförderung der Mathematik gerecht?
(3–2002)

20. 9. 2002 – Zu Matthias Krecks zentralem Vorschlag, Anträge aus der Mathematik nach bereits dokumentierter Forschungsleistung statt nach Projektentwürfen zu bewerten, ist Herr Nunner im folgenden Interview leider nicht direkt befragt worden. Möglich wäre so etwas durchaus, auch im Rahmen bereits bestehender DFG-Antragsstrukturen – doch muss die DFG es auch wollen, bzw. das Fachreferat es dürfen!

Ich kenne ganz hervorragende Mathematiker, die führend in ihrem Fach nicht nur in Deutschland sind aber wegen des geforderten Projektcharakters erst gar keine Anträge stellen. Und wenn sie es dann doch einmal tun, aber so ehrlich sind, in ihrem „Arbeitsplan“ nur das vorgenommene Problem zu benennen, nicht jedoch vorab über Lösungen zu spekulieren, dann kann es ihnen durchaus passieren, dass sie den Antrag bereits vor der Begutachtung von der Geschäftsstelle wohlmeinend zur weiteren Ausstaffierung anempfohlen bekommen – „damit er bei den Gutachtern auch eine Chance hat“. Wenn dann potentieller Nachwuchs dieser Kollegen in Projekt-tauglichere Gebiete abwandert, sind dann die derzeit gültigen DFG-Regeln daran wirklich so unbeteiligt?

Ich erinnere mich noch gut an meinen Schrecken, als mir – als Seiteneinsteiger aus dem Ausland kommend und naiv in Sachen Wissenschaftsbetrieb – beim Neuantragschreiben für meinen Brotgeber, den Bielefelder SFB, das „Dichten“ beigebracht wurde. Ich habe mich geschämt und, so gut es ging, herausgehalten.

Also, wenn die DFG es ernst meint mit der Kompatibilität ihrer fachübergreifenden Antragsstrukturen zu Mathematik-spezifischen Besonderheiten, dann kann sie morgen damit beginnen: durch Befragung der Gutachter nicht nur zum Projekt, sondern zusätzlich zur Qualität der dokumentierten wissenschaftlichen Arbeit der Antragsteller der, sagen wir, letzten 5–10 Jahre. Und dann vor allem dadurch, dass sie das Urteil darüber auch entsprechend gewichtet: Wer exzellente Forschung hervorbringt, muss sich dadurch seine nächste Antragsbewilligung verdienen können – egal wie kurz der Antrag ist.

Wäre dies nicht eine sofortige Umsetzung wert? Über Herrn Krecks sehr erwägenswerte weitergehende Vorschläge zur Neugestaltung der Mathematik-Förderung insgesamt können (und sollten) wir dann im nächsten Schritt reden.

Prof. Dr. Reinhard Diestel
Mathematisches Seminar der
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
20146 Hamburg
`diestel@math.uni-hamburg.de`