Unzulänglich vermessen und vermessen unzulänglich: PISA & Co.

von Karl Kießwetter

In Heft 2–2002, S. 45–51, stellten Kristina Reiss und Günter Törner unter dem Titel „Was hat PISA 2000 den Mathematikerinnen und Mathematikern zu sagen?“ die Studie und ihre Ergebnisse vor. Angesicht der aus der Studie abgeleiteten weitreichenden bildungspolitischen Forderungen, Initiativen und Aktionen halte ich es für geboten, eine intensive, breite und vielleicht auch harte Diskussion in der Sache zu führen. Der folgende Beitrag setzt sich sehr kritisch mit wissenschaftlichem Hintergrund, Testdesign, Methodik und Interpretation von PISA 2000 auseinander. (FB)

In ihrer Studie *Die Innenwelt der Mathematik* [9] zeichnet Bettina Heintz aus soziologischer Sicht ein Bild davon, wie Mathematiker agieren. Bestimmt ist dieses Bild ganz wesentlich durch Interviews, die sie am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn durchführen konnte, das seinerzeit unter der Leitung von Friedrich Hirzebruch stand. Für den Insider nicht verwunderlich ist, dass es in etwa der Hälfte der Kapitel ganz zentral um das Beweisen geht. Neu für einen eingefleischten Mathematiker dürften jedoch die eingehenden Ausführungen darüber sein, welche wichtigen Funktionen Beweise für die Kommunikation unter Mathematikern haben.

Zur Mathematik gehört wie selbstverständlich, dass man bei Veröffentlichungen gleichzeitig mit neuen Aussagen auch deren Beweise der kritischen Bewertung durch die Mathematik-*community* ausliefert. Auch die PISA-Studie macht Aussagen, welche einer wissenschaftlichen Kriterien genügenden Begründung bedürfen. Ich warne dringend davor, ohne eine solche Zwischenstation Folgerungen aus Aussagen zu ziehen, die vielleicht mit Hilfe von mangelhaften Werkzeugen produziert worden sind. Ich finde es äußerst beängstigend, dass sogar die Vorsitzende der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik es offensichtlich nicht für nötig hält, Testverfahren einer kritischen Kontrolle zu unterziehen, welche angeblich so wundersam genaue und umfassende Aussagen ermöglichen, wie sie der PISA-Studie von ihren Veranstaltern zugeordnet werden.

Um aufzuzeigen, dass auch ein für das PISA-spezielle Bild von guter Schulmathematik in Anspruch genommener Hans Freudenthal eine durchaus skeptische Einstellung zu PISA-ähnlichen Testunternehmungen hatte, erlaube ich mir, ihn aus [6], einer seiner letzten Veröffentlichungen, zu zitieren:

> How far has the pollution by testing techniques spread in education? [. . .] And how much profund qualitative research has never been undertaken because it could not compete with shallow quantitative pseudo-research?

Das Hauptanliegen meines Beitrages ist es, handwerkliche Mängel in den Aufgabenstellungen bei PISA & Co., Einseitigkeit und Unbedachtheit in der hinterlegten Ideologie von gutem Mathematikunterricht und insbesondere prinzipiell unvermeidbare Unzulänglichkeiten bei jedem derartigen Testdesign deutlich zu machen und dadurch eine kritische Diskussion über die Wertigkeit der Ergebnisse auf den Weg zu bringen. Insbesondere diejenigen Folgerungen aus den PISA-Ergebnissen, die die Unterrichtspraxis zumindest für eine längere Zeit irreversibel verändern könnten, dürfen erst dann gezogen werden, wenn klar ist, was uns diese Ergebnisse fundiert sagen können und zu sagen haben, und was nicht.

Ein weiteres Anliegen besteht darin, zur Reflektion über soziologische und psychologische Prozesse anzuregen, welche als Erklärung dafür dienen können, warum in unserer Mediengesellschaft offensichtlich immer wieder verkürzende Wissenschaftlichkeit großen Stellenwert hat, während Überlegungen beiseite geschoben werden, die der hohen Komplexität der Vorgaben angemessen sind. Es ist vor allem zu fragen, warum Simplifizierungsprozesse sich sogar innerhalb gewisser wissenschaftlicher Bereiche ausbreiten. Sind inzwischen auch dort der kurzfristig erreichbare Erfolg und die unmittelbare Akklamation das vorderste Maß des Handelns?

Reiss/Törner, schon nach dem ersten Lesen ...

Beide Autoren stehen den Testaktionen und Ideologien bei PISA & Co. weitgehend unkritisch gegenüber – und nicht nur dies: Sie übernehmen sogar fast wortwörtlich eine ganze Reihe von unzulänglichen Formulierungen aus der Selbstdarstellung der involvierten OECD-Gruppe. Um dies aufzuzeigen, hebe ich exemplarisch und in Kurzform einige Zitate aus diesem Artikel heraus und kommentiere kritisch (Hervorhebungen im Folgenden von mir, K.K.).

> *die* mathematische Grundbildung (S. 45)

Es stellt sich die Frage nach dem Verfahren, mit dem der Begriff „Grundbildung“ festgelegt wird. Eine erste Assoziation für denjenigen, der sich schon länger damit befasst hat, wie gewisse Psychologen testen und Begriffe verwenden (es gibt auch andere!), geht in eine Richtung, die pointierend beschrieben werden kann durch: Hier wird Grundbildung durch ein Set von PISA-Items so festgelegt wie Intelligenz durch einen Satz von IQ-Aufgaben. Soll der Begriff Grundbildung jedoch nach üblichem Sprachverständnis logisch dem Begriff Bildung untergeordnet sein, so muss der einzelnen am Kommunikationsprozess beteiligten Person erst einmal überlassen werden, aus ihrem eigenen, oft mühsam und langfristig erworbenen Verständnis von Bildung, von Grund (= Basis) und von Mathematik einen Ort und die zugehörige Vernetzung in ihrem Wissensnetz auszumachen bzw. solche auszubilden. Wenn die PISA-Kommission sich unter diesem Aspekt anmaßte, vorzugeben, was *die* mathematische Grundbildung ausmacht, kann man dies nur mit großem Befremden registrieren. Also: Von welcher Art ist die Festlegung der Begrifflichkeit „die mathematische Grundbildung“? Oder werden sogar zwei verschiedene Arten benutzt, nämlich eine für den Test, und eine bei den „schönen Formulierungen“ über das Konzept?

> Wir möchten daher eine Diskussion darüber beginnen, inwieweit wir [...] Einfluss auf die *Bearbeitung unstrittiger Defizite* nehmen können und sollen [...]. (S. 45)

Abgesehen davon, dass sich bei gewissen „Bearbeitungen“ Defizite auch vergrößern können (man denke nur an das seinerzeitige Bildungstheater um die „Mengenlehre“, an dessen Folgen wir noch heute leiden), sollte man – wie schon angesprochen – nicht kritiklos und ohne zusätzliche Überlegungen die Defizit-Aussagen der PISA-Studie hinnehmen und zum Fundament von Bildungsaktionen hochstilisieren. Und schon gar nicht ist einseitiger Aktionismus angesagt – etwa im Sinne von „Standards festlegen und regelmäßig abtesten“.

> Basis ist die [...] mathematical literacy, unter der man die Fähigkeit versteht, *die* Rolle, welche *die* Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, [...] und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die *den* Anforderungen des gegenwärtigen *und künftigen Lebens* einer Person als [...] (S. 47)

In *Erfahrung Mathematik* von Davis/Hersh [3] gibt es auch einen kurzen Abschnitt mit der Überschrift „Was ist Mathematik?“. Darin ist etwas festgehalten, das in der Tendenz auch in vielen anderen Veröffentlichungen zum Thema zu lesen ist, nämlich dass jede Generation und jeder scharfsinnige Mathematiker eine Definition formuliert, die seinen Fähigkeiten und Einsichten entspricht. Und ein Blick in die Geschichte der Mathematik liefert sehr schnell weitere Hinweise und Begründungen für die Richtigkeit dieser Aussage. Auch die Parallelfrage nach der Rolle der Mathematik in unserer Gesellschaft würde als Ergebnis ein enorm reichhaltiges Spektrum unterschiedlicher und subjektiv geprägter Antworten liefern.

PISA-Schaffende meinen aber offensichtlich auch, genauer als andere zu wissen, welchen speziellen Anforderungen unsere heutigen jungen Leute in 15 oder 20 oder 40 Jahren ausgesetzt sein werden. Muss man eigentlich Generationen von Arbeitsmarkt- und gesellschaftlichen Veränderungen selbst erlebt haben, um vor solcher Naivität gefeit zu sein? – oder genügt vielleicht nicht auch ein bewusster Blick in die jüngere Geschichte unserer Gesellschaft?

> Mathematische Kompetenz zeigt sich [...] in der Fähigkeit, mathematische *Begriffe als „Werkzeuge“* [...] einzusetzen. Mathematik wird [...] *als eine Art Sprache* [angesehen]. (S. 47)

Wenn Begriffe Werkzeuge sind, dann ist auch das Verbindungskabel zum Elektrobohrer ein Werkzeug. Agieren-Können innerhalb der Mathematik beruht letztlich darauf, dass in den unterlegten Axiomensystemen Existenzaussagen wie das Vollständigkeitsaxiom und Umformungsregeln wie $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ enthalten sind.

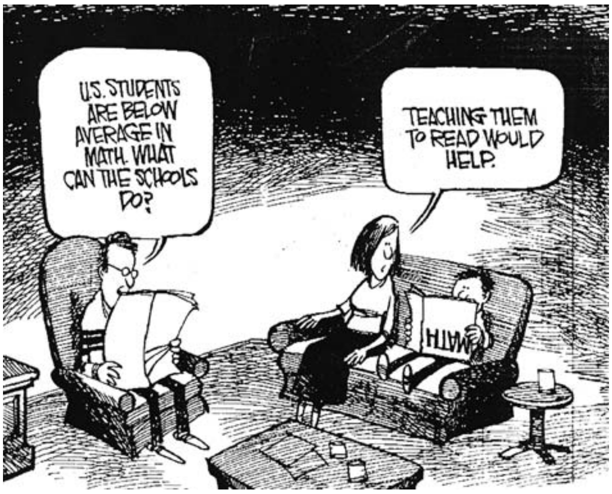
Was ist das für ein Bild von Mathematik, in dem diese auf eine Art von Sprache reduziert wird? Zeigen sich darin die Spätwirkungen einer bestimmten Sorte von Schulunterricht, nach dem es sich nur dann um ganz richtige Mathematik handelt, wenn mit Formeln und Gleichungen operiert wird?

> Eine *realistische Problemstellung* (real world problem) wird benutzt, um mathematische Konzepte zu entwickeln. Dieser Prozess kann *begriffliche Mathematisierung* genannt werden: Es geht nicht in erster Linie darum, die *Problemstellung zu lösen*, um Problemlösefähigkeiten zu entwickeln, sondern die entscheidende Bedeutung liegt in der damit ermöglichten *Erkundung neuer mathematischer Begriffe.* (S. 47)

Was für eine konfuse Sprache, das ist die erste Assoziation. Dann: Vorsicht, es könnte an einer schlechten Übersetzung liegen. Dann: Man sollte einer mathematischen Grundbildung doch besser Poppers „Alles Leben ist Problemlösen" als zentrale Orientierungseinheit zugrunde legen! Vierte Assoziation: Das soll Freudenthal sein? Ich kann mich nicht erinnern, in den Veröffentlichungen Freudenthals oder bei den vielen anderen über den Rand ihrer Wissenschaft hinausschauenden Mathematikern derartige Seltsamkeiten gelesen zu haben. Fünfte Assoziation: Gibt es da schon wieder Leute, die sich eine eigene Schulmathematik zurechtmachen, anstatt sich unter hinreichender Berücksichtigung didaktischer und pädagogischer Aspekte an der Geschichte einer Mathematik zu orientieren, die ja schon in ihren Anfängen – beispielsweise bei der Landzuteilung nach Überschwemmungen oder beim Pyramidenbau – praktische Probleme durch die ihr eigene Art der Mathematisierung löste.

Detailkritisches: „Realistisch" bedeutet etwas anderes als „aus der realen Welt". Das Wort Problemstellung hat so wie das Wort Technik und das Wort Mathematik zwei Bedeutungsrichtungen: Zum einen kann es um den Prozess der Problemstellung gehen, und zum anderen um das sprachliche Einfrieren eines solchen Prozesses in die Form eines statischen Textes. Sprachlich unakzeptabel ist die Formulierung „Lösen von Problemstellungen". Die Unterscheidung zwischen Problem und Problemstellung ist besonders wichtig. Man kann nämlich durch Veränderungen an den Problemstellungen eines Problems dessen Bearbeitung ganz wesentlich beeinflussen, man kann diese erschweren oder auch wesentlich erleichtern. Dazu gibt es, insbesondere auch von Gigerenzer, überzeugende Beispiele – z. B. in [12, S. 87] und in [8, S. 16]. Gigerenzer ist durch [7] besonders ausgewiesen für den Bereich der *Messung und Modellbildung in der Psychologie* und wie der deutsche PISA-Verantwortliche J. Baumert Direktor am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin.

> Es geht wesentlich um die *Aneignung mathematischer Begrifflichkeiten* in einem authentischen Kontext. Dabei unterstellt PISA, dass die *konkrete Bearbeitung und Lösung einer mathematischen Aufgabenstellung als Prozess der Erstellung, Verarbeitung und Interpretation eines mathematischen Modells* verstanden werden kann. (S. 47)



In Anbetracht der großen Geldbeträge, welche die OECD innerhalb eines an Mittelarmut leidenden Bildungssystems inzwischen für PISA ausgegeben hat, gestatte man mir einige kräftige Worte der Verärgerung: Wenn einer meiner Studenten derartiges formuliert hätte, würde ich ihn mit deutlichen Worten dazu verpflichten, zu den Begriffen Modellierung und mathematisches Modell erst einmal Veröffentlichungen kompetenter Autoren zu lesen, etwa in [3] bei Davis/Hersh oder in [7] bei Gigerenzer, bevor er wieder das Wort ergreifen darf. Und da ich weiß, dass auch im wissenschaftlichen Bereich gern Abhängigkeiten zumindest bei Formulierungen unterschlagen (und vielleicht oft auch gar nicht gesehen) werden, würde ich vermutlich noch ergänzen, dass es keine schwierigen Aufgaben an sich gibt, sondern dass die Bewertung „schwierig" sich stets auf ein Paar Aufgabe/Bearbeiter bezieht, und dass in Analogie dazu keine modellierende Mathematik an sich existiert, sondern dass ein mathematisches Modell stets ein Modell von etwas ist, und dass es beim Prozess der Modellierung ganz wesentlich um die Beziehungen zwischen der modellierenden kleinen mathematischen Theorie und der modellierten Situation geht (welche nicht ausschließlich aus der Realität stammen muss). Und vermutlich würde ich diesen Studenten weiter darauf hinweisen, bei Gigerenzer nicht nur über Modellierung durch Mathematik, sondern z. B. auch über Modellierung durch Sprache nachzulesen. Im Hinterkopf hätte ich dann noch, dass man eigentlich dabei außerdem die Idee der „Konstruktion von Realität" verfolgen müsste, dass dieses aber manche Studierende, welche nach meinen Erfahrungen schon mit der einfachen Paarung „Modell/komplexe Situation aus der Realität" ihre Schwierigkeiten haben, wegen der Unbestimmtheit der daraus resultierenden Gesamtkonstellation vollends durcheinanderbringen würde.

Begriffe sind innerhalb der modellierenden mathematischen Theorien eine Art von Knotenpunkten, deren

Bedeutung und Verwendbarkeit nur durch ihre Vernetzung im Gesamtsystem gegeben ist. Es macht also, analog zur Konstellation bei den mathematischen Modellen, keinen Sinn, mathematische Begriffe isoliert, d. h. ohne ihr Eingebundensein in die jeweiligen Zusammenhangssysteme zu betrachten. Jeder mathematisch einigermaßen Bewanderte wird hier Axiomensysteme als Quellen bzw. Ursysteme für derartige (Sekundär-) Systeme assoziieren.

Handwerkliche Mängel in den Aufgabenstellungen bei PISA & Co.

Mein erstes Aufgaben-Beispiel stammt aus dem Vortragstext [1] von Baumert, steht dort für „voruniversitäre Mathematik, Teilgebiet Elementargeometrie" und wurde schon in der TIMS-Studie verwendet. Der Autor hätte also hinreichend viel Zeit gehabt, sich dieses Beispiel einmal genauer anzusehen, sich durch seine Fachleute beraten zu lassen und es dann als ungeeignet für öffentliche Demonstrationen wegzulegen.

Aufgabe A: Eine Schnur ist symmetrisch um einen zylindrischen Stab gewickelt. Die Schnur windet sich genau viermal um den Stab. Der Umfang des Stabs beträgt 4 cm und seine Länge 12 cm. Bestimmen Sie *die* Länge der Schnur. Schreiben Sie Ihre Arbeitsschritte auf.

Zur Erläuterung beigefügt war noch ein Schrägbild, auf das jedoch im Text kein Bezug genommen wird, das deshalb nur als Erläuterung und nicht zur Vorgabe von weiteren Bedingungen dienen kann und bei dem sowieso nicht zu sehen ist, was „hinten" passiert.

Um das Bild abzurunden, zitiere ich hier noch die sich unmittelbar anschließenden Erläuterungen von Baumert über den als ideal angesehenen zugehörigen Lösungsprozess:

> Hat man einmal die Barriere – nämlich *den* innermathematischen Problemraum *re*konstruieren zu müssen, erkannt, ist *die* Lösung offensichtlich: Man muss den Zylinder abwickeln, um zu sehen, dass die Diagonale *des Rechtecks* der Länge der Schnur entspricht. Der Rest ist die Anwendung des Satzes des Pythagoras. Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt in der Neubestimmung des Problemraumes. In Begriffen *der* Problemlöseforschung handelt es sich bei dieser Testaufgabe um einen Problemtypus, für dessen Lösung ein *adäquater* Lösungsweg bei gegebener Zielsetzung und hoher Unbestimmtheit der Mittel zu finden ist.

Um die Unzulänglichkeiten in der Problemstellung deutlich zu machen, simuliere ich zuerst Assoziationen und Überlegungen, durch die sich ein mathematisch begabter und fähiger Bearbeiter so verunsichern könnte, dass er keine Lösung im Sinne der Aufgabensteller zustande bringt – und „keine Lösung" ist im Sinne des Schreibers dieser Zeilen zum vorgegebenen Problemtext, in dem von *der* Länge gesprochen wird, die eigentlich richtige Lösung!

Die erste Assoziation: Welche Symmetrie ist denn hier gemeint? In der Ebene gibt es zwei Spiegelungen, nämlich bezüglich Punkt und bezüglich Gerade. Im Raum gibt es dann wohl 3 Arten, nämlich bezüglich Punkt, bezüglich Gerade und bezüglich Ebene.

Die zweite Assoziation und weitere: Und was soll hier symmetrisch sein? Der Wickelprozess kann wohl nicht gemeint sein, also das Wickelergebnis? und dabei allein die Schnur, oder das Gesamtbild einschließlich Stab; nach dem Text doch wohl nur die Schnur, aber dann gibt es ja unendlich viele Lösungen?! ... Im Text steht auch nichts davon, ob man mit dem Wickeln an einem Ende des Stabes beginnen und schließlich am anderen Ende landen soll. Und es steht auch nichts davon da, ob das Wickeln gleichmäßig ablaufen soll oder ob die Haftung an dem Stab so beschaffen ist, dass „Richtungsveränderungen" möglich sind. ... Wie dick ist die Schnur, und wie ist es mit ihrer Elastizität bestellt? ... Man kann hier vermutlich alle Längen von 16 bis zur Obergrenze $16 + 12$ erhalten. Oder steckt in den Vorgaben noch mehr an Unbestimmtheit?

Wer sich ein wenig in der Geschichte der Mathematik früherer Zeiten auskennt, weiß, dass Generationen unserer mathematisch interessierten Vorfahren in ganz verschiedenen Kulturen stolz auf ihre Kenntnis des Satzes des Pythagoras waren und sich deshalb für diesen Anwendungen ausdachten. Typisch dafür ist beispielsweise die Frage nach der Länge der Efeuranke, welche sich um einen Baumstamm hochwindet. Die TIMSS-Crew ist vermutlich ähnlich gerichtet vorgegangen und hat in Gedanken ein Rechteck mit den Seitenlängen 12 und 16 und einer dick eingezeichneten Diagonale auf den im Aufgabentext beschriebenen Zylinder „exakt" aufgewickelt und diesen deshalb auch genau viermal umwickelt. Denkt man sich das Rechteck aus durchsichtigem Papier und den Zylinder hell gestrichen oder aus Glas, so verwandelt sich dabei die Diagonale in eine bestimmte und deutlich sichtbare Spur auf dem Mantel des Zylinders. Man kann diese Spur dann noch auf diesem Mantel markieren und als die Spur einer aufgewickelten Schnur deuten.

Im erläuternden Text von Baumert musste dann über die „Gegenrichtung" dieses Zusammenhangs reflektiert werden, denn auf dieser bewegt sich der Problembearbeiter im Gegensatz zum Problemgestalter. Aber dieses Reflektieren ist Baumert nicht gelungen, vermutlich deshalb, weil sich dabei das Vorwissen überbordend in den Vordergrund drängte. Wenn man nämlich – in den Worten von Baumert – *den Zylinder abwickelt*, so kann dies ohne zusätzliche Informationen nur bedeuten, dass man den Mantel abwickelt. Dieser geht dabei jedoch in ein Rechteck der Größe 12×4 (und nicht 12×16) über. Man könnte dann allerdings dieses Mantelrechteck so in 4 kleine 3×4-Rechtecke zerlegen, dass die darin eingefangenen Abschnitte der Spur (der im Sinne der TIMSS-Crew idealen Schnuraufwicklung!) jeweils Diagonalen sind, an diesen Diagonalen jeweils die Länge 5 erkennen und auch auf diese Weise zu der von der TIMSS-Crew offensichtlich erwarteten (einzigen) Lösung 20 gelangen.

Baumert gibt an, dass in Frankreich 4 %, in Schweden 24 %, in der Schweiz 17 % und in Deutschland 6 % der getesteten Oberstufenschüler diese Aufgabe richtig (im Sinne der TIMSS-Crew!) gelöst haben. Und er zieht daraus die in ihrer Art inzwischen bekannten üblichen Schlüsse. Unter anderem gibt er seiner Verwunderung Ausdruck:

> In Frankreich, dessen Oberstufenschüler sich generell durch hervorragende Mathematikkenntnisse auszeichnen, sinkt die Lösungswahrscheinlichkeit sogar auf 4 %.

Aber vielleicht sprechen ja die 4 % der Franzosen im Vergleich zu den 24 % der Schweden im Sinne meiner obigen kritischen Bemerkungen eher für eine bessere Qualität des französischen Mathematikunterrichts?! Und vielleicht sollte sich die Gruppe um Baumert nicht über solche Ergebnisse wundern, sondern sich eher über ihr derartiges Wundern wundern – und daraus Konsequenzen für ihre Konsequenzen aus PISA ziehen! Aber ob ihnen derartige Quadraturen beim Wundern und bei den Konsequenzen noch gelingen können? Unserem Bildungssystem würde solches gut tun.

Bei der nächsten Aufgabe findet etwas statt, das man unserem momentanen Mathematikunterricht zum Vorwurf macht und an vielen Stellen auch machen muss, nämlich: Damit gewisse Rechenabläufe „eingekleidet“ werden können und man zudem noch (vermeintlich) guten Gewissens vom Einbezug von Alltagsproblemen und von Mathematisierung sprechen kann, produziert man auf schulmeisterliche Art eine geeignete Pseudo-Realität. Das Verwenden eines derartigen Verhaltensmusters auch für die Aufgaben von PISA & Co. sollte für die PISA-Crew ein weiterer Anlass dafür sein, etwas gründlicher über sich selbst und die Validität ihrer Befragungsaktionen nachzudenken.

Diese nächste Aufgabe ist eine PISA-Beispielaufgabe aus dem Feldtest zur mathematischen Grundbildung [15].

Aufgabe B: Eine Pizzeria bietet zwei *runde* Pizzas mit *derselben Dicke* in verschiedenen Größen an. Die kleinere hat einen Durchmesser von 30 cm und kostet 30 *Zeds*. Die größere hat einen Durchmesser von 40 cm und kostet 40 *Zeds*. Bei welcher Pizza bekommt man *mehr für sein Geld*? Gib eine Begründung an.

„Dieselbe Dicke“ soll doch wohl „gleicher Preis pro Flächeneinheit“ vorgeben, tut dies allerdings nicht, da in der Realität zumindest bei uns in Deutschland der Belag und nicht die Dicke die für den Preis entscheidende Rolle spielt.

Zu monieren sind hier jedoch auch wieder sprachliche Unzulänglichkeiten: „Zeds“ statt „Zet“ kann an einer schlechten Übersetzung liegen. Auch sollte man „kreisrund“ anstelle von „rund“ verwenden (im englischen Text steht „circular“). Und dann gibt es noch die Möglichkeit zu einer nichtgewünschten Lösungsidee, denn: Vom Sprachverständnis her bekommt man stets bei der größeren Pizza mehr für sein Geld, ganz gleich, wie viel diese größer ist und was sie kostet. Man sollte deshalb von „relativ mehr“ reden.

Bemerkenswertes zum PISA-Grundbildungskonzept und zur *mathematical literacy*

Baumert bezieht sich in seinem Vortragstext auch auf die „Principles and Standards for School Mathematics“ des National Council of Teachers of Mathematics der USA, durch welche die PISA-Crew ebenso wie durch die Schriften von Freudenthal angeblich wesentlich beeinflusst worden ist. Ich zitiere aus den amerikanischen Vorgaben, weil an diesen Texten – wenn sie sinnvoll übersetzt worden sind – noch einmal meine Kritik an den Unzulänglichkeiten des PISA-Konzepts deutlich werden kann:

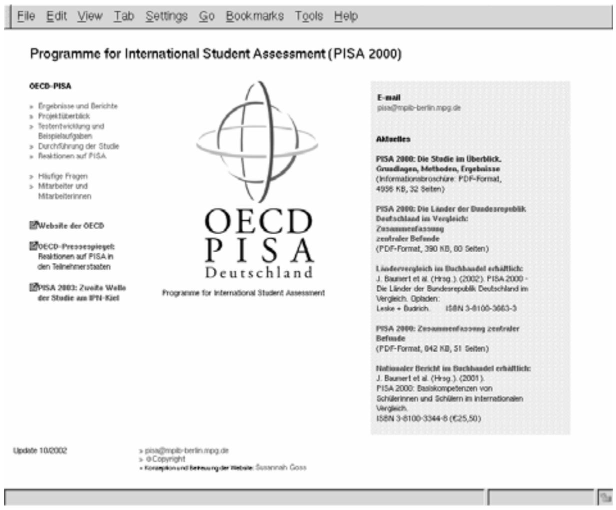
> Zur mathematischen Grundbildung gehört die Fähigkeit, die Anwendbarkeit mathematischer Konzepte und Modelle auf alltägliche, mehr oder weniger komplexe Problemstellungen zu erkennen. Es handelt sich *also* um die Fähigkeit zu beurteilen, ob Sachverhalte mathematisch modellierbar sind oder nicht.

Ich begnüge mich damit, die Mängel in den hervorgehobenen Stellen stichwortartig abzuarbeiten (dies ist wörtlich zu verstehen, denn besondere Freude macht diese Tätigkeit nicht): Im klassischen und eigentlichen Sinne, und deshalb wieder auch im Sinne von Davis/Hersh und Gigerenzer, sei noch einmal darauf hingewiesen, dass mathematische Modelle immer auch „Modelle von …“ sind, und dass im obigen Text in gewisser Weise ein schon verheirateter Mathematikpartner zu einer Art von Bigamie aufgefordert wird. Zudem haben die Autoren dieses Satzes offensichtlich gar nicht daran gedacht, dass die wertvolleren Mathematisierungen sich nicht darauf beschränken, aus einem gutsortierten Werkzeugkasten voller Mathematik das richtige Werkzeug zu ergreifen, sondern dass bei diesen neue mathematische Werkzeuge zweckgerichtet produziert werden.

Meint man hier wirklich Problemstellungen in dem eigentlichen Wortsinn, und diese im Unterschied zu dem durch die Problemstellung besser oder schlechter vorgegebenen Problem? Und was dann noch ärgerlicher ist: Worauf bezieht sich eigentlich die Eigenschaft komplex? Auf die Problemstellung, auf das Problem, oder auf die Situation oder Konstellation, in die das Problem eingebettet ist? Vom Logischen her unakzeptabel ist der Übergang mit „also" zu der angedachten Beurteilungsfähigkeit. Im „negativen Fall" können nämlich auch noch so kluge Leute stets nur aussagen, dass sie keine Modellierungsmöglichkeit kennen, und nicht, dass es keine gibt.

Sternberger/Storz/Süskind fassen in ihrem Bändchen *Aus dem Wörterbuch des Unmenschen* [16] kritische Beiträge aus den Jahren 1945 bis 1948 über die deutsche Sprache im Jahrhundert des „totalen" Staates in einer überarbeiteten Form zusammen. Darin ist auch ein Beitrag zum Wort „Problem", der uns besonders interessieren sollte – vor allem als Anlass dafür, sich auch heute und fast 50 Jahre danach mehr an der in der Geschichte nachlesbaren Art der Aktivitäten im Sinne der klassischen Mathematik denn an modisch-vergänglichen Konzepten in der Art von „Mengenlehre" und *mathematical literacy* zu orientieren. Ich zitiere sehr ausführlich, damit die Tendenz des Beitrages über das Wort Problem „gut rüberkommt".

> Worterklärung: [. . .] in seiner Muttersprache, dem Griechischen, sagt sich unser Fremdwort selber recht genau aus als „das Vorgeworfene". Vielleicht war bei diesem substantivierten Partizip der Vergleich mit dem Futter im Spiel, das man dem Pferd vor- oder hinwirft [. . .]. Ein gesundes Pferd, auch wenn es nicht eigentlich hungrig ist, hat immer Lust, mit seinen Zähnen Heu zu raufen oder Hafer zu mahlen. So auch der jugendliche, frische Geist: immer will er sich erproben. Hätten wir die im Vorwerfen enthaltene Gebärde richtig gedeutet, dann wäre von alters um das „Problem" etwas Munteres, ja fast etwas Spielerisches gewesen [. . .].



> Wortgebrauch: In ihm hat sich heutigentags von Munterkeit und Spiel nichts erhalten: um Probleme geht es heute durchaus ernst, fast grämlich zu. Sie sind zum hauptsächlichen Unterscheidungszeichen zwischen ernsthaften Menschen (und Büchern) einerseits, den Leichtfüßen und dem Oberflächlich-Seichtem andererseits geworden. Mit Problemen spielt heute kein Mensch mehr [. . .]. Mit Problemen ringt man [. . .].
>
> [Resümee:] Es ist ein durchaus falscher Ernst, der sich in den soeben angedeuteten Sprachgebräuchen verrät. Falsch vor allem deshalb, weil er vom Spiel nichts weiß oder es verkennt: als ob sich die Fülle des Daseins und die volle Angelegenheit des Dabeiseins nicht gerade im gut gespielten Spiel einstellte, wohl gemerkt im bloßen Spiel [. . .].

Gerd Binnig, Physiknobelpreisträger von 1986, schreibt in seinem Buch *Aus dem Nichts – Über die Kreativität von Natur und Mensch* [2]:

> Ich empfand sehr stark, dass üblicherweise bei der Lehre an der Universität die Kreativität zu kurz kam. Das Hauptgewicht lag darauf, Stoff – also Wissen – zu vermitteln, während das spielerische Umgehen mit diesem Stoff kaum eine Rolle spielte.

Seine Einschätzung des Schulunterrichts ist entsprechend. Das Beschränken des spielerischen Assoziierens von Strukturen und das Zielen auf eine einzige gewollte Lösung lässt sich leicht in Intelligenztests, aber leider auch bei den Aufgaben von PISA & Co. feststellen – und provoziert einen schlimmen Verdacht! Ich zitiere deshalb noch einmal Binnig:

> Es kommt mir sogar vor, als ob viele Professoren ein spielerisches Umgehen mit dem Stoff geradezu als kindisch oder als Zeitverschwendung betrachten.

Marvin Minsky gehört zu den Pionieren der Computerwissenschaft und der „künstlichen Intelligenz“ und ist einer der bekanntesten ihrer Vertreter. Er schreibt in dem Abschnitt „Mathematik – schwer gemacht“ seines Buches *Mentopolis* [14]:

> Als Wissenschaftler schätzen wir es, unsere Theorien so fein und fragil wie möglich zu machen. Wir schätzen es, Dinge so zu arrangieren, dass alles zugleich zusammenbricht, wenn der geringste Fehler geschieht.
>
> Es ist [...] schlecht, [...] wenn Lehrer die Mathematik unserer Kinder zu schmalen und fragilen Türmen und Ketten formen, statt zu widerstandsfähigen querverbundenen Netzen.
>
> Denn Kinder wissen aus ihren täglichen Erfahrungen, dass ihre Vorstellungen wahrscheinlich desto nützlicher sind, je mehr Querverbindungen sie haben.

Zu ergänzen ist, dass eine stärkere Vernetzung nicht nur größere Nützlichkeit, sondern auch eine größere motivationale Sicherheit einbringt.

Im Sinne der Zitate nach Binnig und Minsky und meiner vorherigen Ausführungen ergibt sich das folgende, auf den Punkt gebrachte Kontrastprogramm zu *mathematical literacy*:

Abgesehen davon, dass in der Schule gewisse Grundfertigkeiten erworben werden müssen und dass es dort insbesondere auch um Bildung im eigentlichen Sinne geht, solches u. a. nachzulesen in Hartmut von Hentigs *Bildung* [10], kommt es vor allem darauf an, dass unsere Jugendlichen mit einem nicht verdorbenen Spaß an spielerischen Lern- und Denkprozessen, mit einem kontrollierten Selbstbewusstsein und mit einem gefestigten Grundgefühl der Sicherheit des eigenen Könnens, einem sachlich gerechtfertigten In-sich-Ruhen, in eine Gesellschaft entlassen werden, in der die Eigenständigkeit immer mehr gefordert ist.

Einengende Konzepte im Sinne der seinerzeitigen „Mengenlehre“ und der zur Zeit medienträchtigen *mathematical literacy* haben dabei nichts verloren. Vielmehr sollte man sich umfassend in der Geschichte der Mathematik informieren, sich vor allem aus dieser seine Anregungen holen, die momentane Situation als Zwischenstation in einem evolutionären Prozess betrachten und sich und seine Zeit nicht so wichtig nehmen.

Über auswertungsobjektiv simplifizierte Testdesigns und kurzschlüssige Folgerungen

Vor etwa 20 Jahren hatten wir innerhalb unseres *Hamburger Modells für Begabungsforschung und Begabtenförderung im Bereich der Mathematik* das Problem, Jugendliche für unsere anspruchsvolle Art der Förderung auszuwählen. Zu unserem Bild und Wissen über besondere mathematische Begabung passten sehr schlecht IQ-Aussagen und andere Testergebnisse aus multiple-choice-Aufgaben. Uns sind insbesondere Aufgaben wichtig, welche einerseits spielerisches Assoziieren und Kreativität provozieren und andererseits verlangen, sich in Konstellationen größerer Komplexität zurechtzufinden. Solche Aufgaben müssen offen gestellt werden, erfordern eine längere Bearbeitungszeit und können nicht mit 0/1-Logik „objektiv“ ausgewertet werden.

Es liegt eine prinzipielle Unzulänglichkeit vor, die analog zur Heisenbergschen Unschärferelation ist. Die Physiker haben sich der Einsicht gestellt, dass man in bestimmten Situationen nicht alles haben kann – beispielsweise innerhalb der Quantentheorie nicht den korrekten Ort eines Teilchens gleichzeitig mit dessen genauem Impuls –, und solches nicht nur seelisch gut verkraftet, sondern den Entdecker und Formulierer dieser prinzipiellen und lästigen Unzulänglichkeit menschlicher Beobachtungsmöglichkeiten mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Viele Mess-Psychologen und Mess-Pädagogen tun sich jedoch in Parallelsituationen, bei denen lokale Konstellationen und variablenverbindende Zusammenhänge aus hochkomplexen Alltagsbereichen erforscht werden sollen, noch sehr schwer zu akzeptieren, dass simple Testdesigns wie bei PISA & Co. aus prinzipiellen Gründen keine allseits exakten Aussagen über die Gesamtheit und die wesentlichen Bestandteile der Kenntnisse, der Fähigkeiten und der Einsatzbereitschaft von Jugendlichen und schon gar nicht Prognosen in die Zukunft hinein machen können. Tun sie sich vielleicht deshalb so schwer, weil dadurch die ihnen vertraute, bislang kaum hinreichend hinterfragte und mediengünstige Art von Wissenschaftlichkeit behindert, ihr gar der Boden entzogen würde? Der PISA-Crew ist dringend zu empfehlen, sich damit abzufinden, dass Menschen unwiderrufbar prinzipiellen Unzulänglichkeiten ausgeliefert sind.

Wir haben seinerzeit für unsere speziellen Zwecke einen HTMB (Hamburger Test für mathematische Begabung) genannten Test aus offenen Aufgaben der oben angesprochenen Art produziert und u. a. bei unseren Forschungspartnern an der Johns-Hopkins-Universität in Baltimore/USA erprobt. Über diesen Test haben wir nicht viel geredet, dafür hilft er uns schon etwa 20 Jahre lang sehr praxisgerecht und ausgewogen bei der Auswahl der von uns geförderten Jugendlichen. Uns wurden dabei weitere Beschränkungen bewusst, denen nicht nur wir bei der Produktion und Benutzung von Testmaterial ausgeliefert waren und sind, sondern genauso auch die PISA-Crew (nachfolgend dazu nur ganz wenige Aspekte):

Testaufgaben können in ihrer Grundidee aus dem aus Veröffentlichungen erhältlichen Bestand geholt und variiert, oder aber neu produziert werden. In beiden Fällen ist eine gewisse Zufälligkeit unvermeidbar, nicht nur die Abhängigkeit von der „kreativen Kompetenz" der an der Aufgabengestaltung Beteiligten.

Ob ein Problem innerhalb der vorgegebenen beschränkten (Test-)Zeit gelöst wird, hängt in hohem Maße davon ab, ob und welche unmittelbare Resonanz die gewählte Problemformulierung im Wissensnetz der jeweiligen Bearbeiter auslöst. Wer sich mit Problemlöseprozessen befasst hat, der sollte wissen, dass dabei sowohl viele subjektive (z. B. Vorerlebnisse, Erwartungen, momentanes Umfeld , Begabungstyp) als auch gruppenspezifische (z. B. sprachlich-kulturelle) Unterschiede eine wesentliche und richtungsbestimmende Rolle spielen. In diesem Zusammenhang kann es dann sogar darauf ankommen, in welcher Reihenfolge die Testaufgaben gestellt werden.

Bei der Auswertung der Ergebnisse unseres eigenen Auswahlverfahrens ziehen wir aus 20 Jahren Praxiserfahrung die Konsequenz, dass unsere Art der Testung „hinreichend" für eine erfolgreiche Teilnahme in unseren Fördergruppen ist. Praxisorientierte theoretische Überlegungen der oben mit Bezug auf Resonanzdefekte angedeuteten Art, und zudem eine größere Zahl von guten Erfahrungen mit späteren und engagierten Quereinsteigern (die zum Teil bei der Testung versagten) brachten uns jedoch ergänzend zur festen Überzeugung, dass ein guter Ausfall der Eingangstestung nicht unbedingt „notwendig" für eine besondere Begabung ist. Die PISA-Testung ist zwar nicht auf Aussagen über einzelne Personen, sondern auf statistische Ergebnisse aus, es müssen jedoch auch bei dieser entsprechende Überlegungen angestellt und Folgerungen in der Richtung gezogen werden, dass Versagen bei der Testung nicht prinzipiell mit Nichtkönnen gleichgesetzt werden darf.

Die für das spätere Berufsleben wichtigsten Fähigkeiten – wie z. B. die geeignete Mischung aus Durchhaltevermögen und Selbstorganisation von Problemlöseprozessen, wie sie insbesondere beim eigenständigen mathematischen Modellieren nötig ist – lassen sich nicht durch simple und hinsichtlich der Bearbeitung zeitlich beschränkte Testaufgaben in der bei PISA & Co. verwendeten Art abprüfen.

Zusammenfassende Bemerkungen, Folgerungen und Thesen

Die beiden ersten Sätze des Baumert-Textes haben den Wortlaut:

> Der Titel des Vortrags „Deutschland im internationalen Bildungsvergleich" ist in gewisser Weise frivol. Denn auf der Basis einiger Schulleistungsstudien wird man kein Urteil über Bildung fällen können – schon gar nicht im interkulturellen Vergleich.

Wäre der Autor doch bei dieser Einstellung geblieben, und solches auch nach und gegenüber der PISA-Studie! Was hat ihn eigentlich von einer derartig realistischen Einschätzung der Aussagen von PISA & Co. abgebracht? Ist er zeitgemäß dem Übermaß öffentlicher Akklamation erlegen?

Man sollte nicht nur hinsichtlich einer prinzipiellen Unschärferelation aus der Physik lernen, sondern auch, dass Beobachtungsergebnisse prinzipiell vom Beobachtungsinstrument, und Messergebnisse ebenso prinzipiell vom Messinstrument abhängen. In einem solchen Sinne liefert PISA nur ein spezielles und zudem ein „literacy-orientiertes" Bildungsmaß – neben vielen anderen ebenso möglichen.

Modellierung mit Hilfe von Mathematik soll nach den Ausführungen der PISA-Crew ein ganz zentrales Element von „mathematical literacy" sein. Die in den Selbstdarstellungen der PISA-Crew verwendeten Formulierungen deuten jedoch darauf hin, dass diese offensichtlich selbst einige Probleme mit den im klassischen Sinne charakteristischen und unverzichtbaren Bestandteilen einer Mathematisierung hat. Das nachfolgende Beispiel ist in seiner Art und Komplexität auch Schülern zugänglich. Es hätte also auch Grundlage einer Testaufgabe für „mathematical literacy" sein können. Vor allem ist es aber so gewählt, dass eine deutliche Analogie zu der bei PISA & Co. benutzten Verfahrensstruktur besteht, so dass man grundsätzliche Mängel gegenüber einem klassisch-korrekten Mathematisierungsprozess parallel verdeutlichen kann. Das einem guten Mathematiklehrer bei uns in Deutschland wohlbekannte Beispiel wird in Kurzform dargestellt, die aber trotzdem die im Sinne der Ausführungen bei Gigerenzer über „*Messung und Modellbildung in der Psychologie*" [7] daran beteiligten Elemente hervorhebt:

> Am Anfang des Prozesses steht eine Person oder eine Gruppe (S), die, weil solches ihr vorgegeben ist oder sie sich von selbst dafür interessiert, das Ziel (Z) hat, etwas Fundiertes über Lebenshaltungskosten und Teuerungsrate auszusagen, also etwas über einen Bereich (RB) aus der Realität, der insbesondere den Familien allzu oft Kopfschmerzen bereitet und dadurch zwangsläufig auch für Politiker wichtig wird. (S) löst

> das Zielproblem durch Mathematisierung und adjungiert zu diesem Zweck eine mathematische Struktur (ST). Da sie nicht alles, was irgendwer irgendwann einmal für den persönlichen Gebrauch kauft, einbeziehen kann, stellt sie einen Warenkorb aus einer im Vergleich nur sehr kleinen Anzahl von Waren zusammen, immerhin in dem Bestreben, dass darin die Waren vorkommen, welche unverzichtbar sind, am meisten gekauft werden, typisch für den Lebensstil sind usw., wobei dann noch berücksichtigt wird, dass man zwar jeden Tag etwas zum Trinken und Essen braucht, aber nicht jeden Tag ein neues Fernsehgerät. Schließlich bestimmt man auf statistische Weise die Summe der Preise der Waren aus dem Warenkorb und ernennt diese (oder einen mit Hilfe einer Bezugsgröße daraus gebildeten Quotienten) zum Preisindex. Nun kann man anhand simpler Zahlen Länder vergleichen, Entwicklungen dokumentieren usw., – und alles auf scheinbar mathematisch-perfekte Weise, geeignet für Veröffentlichungen in den Medien, für Aktionen am grünen Tisch, als Argumentationshilfe in Diskussionsrunden usw.
>
> Die „Haken“ liegen auf der Hand: Bei den Familien wird prozentual mehr Geld für Essen, Schulhefte usw. ausgegeben als bei Alleinlebenden, dafür aber prozentual mehr für Anzüge, Schlipse und andere gesellschaftliche Wirkungen bei angehenden Geschäftseliten als bei Handwerksgesellen. Man brauchte also eigentlich für verschiedene Gesellschafts- und Anspruchschichten verschiedene Warenkörbe. Auch bei einem Ländervergleich hat man sich derartigen prinzipiellen Komplizierungen zu stellen, etwa deshalb, weil man in Finnland mehr Brennstoffe zum Heizen benötigt als z. B. in Griechenland. – Konsequenz: Man muss sich auf außermathematische Weise Gedanken darüber machen, was die Warenkorbpreise aussagen und was nicht, und dabei sich insbesondere klar darüber werden, dass man die vorgegebene hohe Komplexität nicht auf eine einzige Zahl reduzieren kann, ohne von dieser Komplexität viel und vielleicht sogar das Wesentliche zu verlieren.

Diese Aussage ist offensichtlich fast wortwörtlich auf PISA & Co. übertragbar – und solches noch mit der Zugabe, dass der „Warenkorb“ bei PISA & Co. nicht nur ebenfalls Beschränkungen hinsichtlich der Anzahl der hineinpassenden Waren unterliegt, sondern dass darüber hinaus auch noch viele Waren deshalb nicht darin untergebracht werden können, weil sie zu ungestaltig sind (z. B. Testaufgaben, deren Bearbeitung zu viel Zeit in Anspruch nimmt) und dass die PISA-Crew den Warenkorb auf dem Hintergrund des von ihr selbst mit ideologischer Vehemenz bevorzugten Lebensstils bestückt.

Auch Testungen, die statistische oder andere mathematikorientierte Auswertungsverfahren benutzen und dann bei Ergebnisbeschreibungen durch wenige Zahlen landen, sind Modellierungen und deshalb hinsichtlich der Ergebnisse des mathematischen Agierens darauf angewiesen, diesen den richtigen Sinn zu geben, d. h. mit dann nicht primär mathematischen Überlegungen zu entscheiden, was diese Ergebnisse nach der durch die vorhergehende Überführung in simple Zahlenangaben unvermeidlichen Verarmung der vorgegebenen Komplexität überhaupt noch aussagen können. Und solches müssten vor allem die Verfechter einer didaktischen Tendenz wissen, welche mathematische Modellierung generell schon bei 15-Jährigen ansiedeln will. Die Kombination aus einem umfassenden Verstehen der Vorgänge beim (klassischen) Modellieren und dem entsprechend konsequenten und vollständigen Umsetzen in der Praxis ist nach meinen umfangreichen Erfahrungen nicht nur in der Schule, sondern auch mit Studierenden – und jetzt sogar auch mit PISA & Co. – offensichtlich von einer Strukturkomplexität, deren Erfassen ganz besonderer Anstrengung und Begabung bedarf und die deshalb in der u.a. bei Gigerenzer angesprochenen vielstufigen Form viel weniger verbreitet ist, als dies die Konstrukteure von “mathematical literacy“ wahrhaben wollen. Oder halten diese jede noch so kleine Teilnahme an einem mit der Realität sprachlich verbundenen mathematischen Operieren, das irgendwie in eine eigentliche Modellierung eingebunden werden könnte, auch schon für Modellierung? Wenn ja, so würde dies auch verständlich machen, dass für sie offensichtlich kein Anlass besteht, die Bedeutung ihrer Ergebniszahlen prinzipiell zu hinterfragen.

Nach so vielen zwar kritischen, trotzdem jedoch eigentlich auf der Hand liegenden Einsichten über simplifizierende Wissenschaftlichkeit sollte man sich wieder etwas mehr mit so faszinierenden Büchern wie *Gödel, Escher, Bach* von D. R. Hofstadter [11] oder *Die erfundene Wirklichkeit* von P. Watzlawick [18] oder *Die Logik des Misslingens* von D. Dörner [4] beschäftigen, welche insbesondere zu Überlegungen über „des Menschen Möglichkeiten und Grenzen" und deshalb auch zur Bescheidenheit anregen. Für Erfolge in unserer derzeitigen Medienlandschaft ist solches zwar vermutlich eher kontraproduktiv, aber vielleicht wird man dadurch ja ein bisschen klüger – und dies auch zum Wohle unseres Bildungssystems.

Literatur

[1] Jürgen Baumert, Deutschland im internationalen Bildungsvergleich, Universitas, Febr./Juni-Hefte 2002; im Internet (ohne Skizzen): `http://www.zeit.de/reden/Bildung_und_Kultur/baumert_bildung.html`

[2] Gerd Binnig, *Aus dem Nichts – Über die Kreativität von Natur und Mensch*, Piper, München 1989

[3] Philip J. Davis und Reuben Hersh, *Erfahrung Mathematik*, Birkhäuser, Basel/Boston/Stuttgart 1985

[4] Dietrich Dörner, *Die Logik des Misslingens – Strategisches Denken in komplexen Situationen*, rororo, Reinbek 1992

[5] Hans Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe* Bd.1, Klett, Stuttgart 1973

[6] Hans Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1991

[7] Gerd Gigerenzer, *Messung und Modellbildung in der Psychologie*, UTB, München/Basel 1981

[8] Gerd Gigerenzer, *Das Einmaleins der Skepsis – Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken*, Berlin Verlag, Berlin 2002

[9] Bettina Heintz, *Die Innenwelt der Mathematik*, Springer Wien/New York 2000

[10] Hartmut von Hentig, *Bildung*, Wiss. Buchges., Darmstadt 1997

[11] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*, Klett-Cotta, Stuttgart 1985

[12] Jerome Kagan, *Die drei Grundirrtümer der Psychologie*, Beltz, Weinheim/Basel 1998

[13] Karl Kießwetter, Kreativität in der Mathematik und im Mathematikunterricht, in: Glatfeld (Hrsg.), Mathematik Lernen, Vieweg, Braunschweig 1977

[14] Marvin Minsky, *Mentopolis*, Klett-Cotta, Stuttgart 1990

[15] Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. `http://www.mpib-berlin.mpg.de` (Hier finden sich auch weitere Beispielaufgaben.)

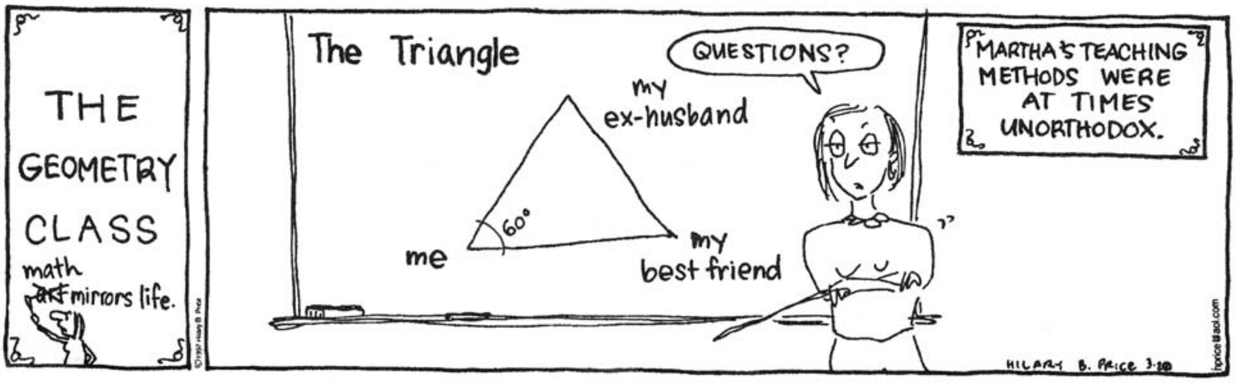
[16] Sternberger/Storz/Süskind, *Aus dem Wörterbuch des Unmenschen*, dtv, München 1962

[17] Heinrich Bauersfeld, Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und –lehrens, im Sammelband „Lernen und Lehren von Mathematik", Aulis, Köln 1983

[18] Paul Watzlawick (Hrsg.), *Die erfundene Wirklichkeit – Wie wissen wir, was wir zu wissen glauben? – Beiträge zum Konstruktivismus*, Piper, München 1981

Adresse des Autors
Prof. Dr. Karl Kießwetter
Stormarnstraße 71a
22926 Ahrensburg
`kakiahr@aol.com`

Vom Autor gekürzte Fassung. Der ungekürzte Beitrag kann von `www.minet.uni-jena.de/~schmitzm/midida/start.html` oder von `www.algo.info/kiesswetter-begabung-mathematik` heruntergeladen werden. Unter der ersten Adresse findet man noch weitere Stellungnahmen und unter der zweiten inhaltliche Ergänzungen, zum Beispiel etwas über nicht vermeidbare nichttransitive Strukturen bei Bewertungen.



Dreiecke sind ein großes Thema und ein gut gehütetes Geheimnis ...

... schreibt das Berliner Stadtmagazin *Siegessäule* in der Titelgeschichte „Liebe zu dritt", August 2002.