*menschlichen Geistes ist, eine Zuflucht gegenüber der bedrängenden Enge der dem Zufall ausgelieferten Ereignisse.*
(A. N. Whitehead, *Wissenschaft und moderne Welt* (Lowell-Lectures, Harvard 1925). Übers. von G. Tschiedel und F. Bondy. Morgarten Verlag, Conzett & Huber: Zürich 1949, S. 28.)

**Adresse des Autors**
Prof. Dr. Alfred Schreiber
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Universität Flensburg
Auf dem Campus 1
24943 Flensburg
schreiber@uni-flensburg.de


# Teacher's corner – kurze Beweise mit langer Wirkung

*In Heft 3–2001 starteten wir eine Kolumne, welche ungewöhnlich kurze Beweise oder prägnante Konzepte sammelt, unmittelbar geeignet für den Einsatz in der Lehre.* *(FB)*

**Nr. 6: Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.** In jeder Analysisvorlesung kommt der Satz vor, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist – zumindest in jeder Vorlesung, die das Riemann-Integral behandelt. Der kanonische Beweis fußt auf der gleichmäßigen Stetigkeit einer solchen Funktion; dass es aber auch anders geht, hat Erhard Schmidt in seinen Vorlesungen vorgeführt (*Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* [aus dem Wintersemester 1948/49], Akademie-Verlag 1992, insbesondere Seite 132).

Schmidt erklärt in bekannter Weise Ober- und Untersummen einer beschränkten Funktion

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

sowie das Ober- und Unterintegral

$$\int_a^{*b} f(t)\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{*a}^{b} f(t)\,dt\,.$$

Sein nächster Schritt ist, mit dem üblichen Argument zu zeigen, dass die durch

$$F_o(x) = \int_a^{*x} f(t)\,dt \quad \text{bzw.} \quad F_u(x) = \int_{*a}^{x} f(t)\,dt$$

definierten Funktionen an einer Stelle $x_0$ differenzierbar mit Ableitung $f(x_0)$ sind, falls $f$ bei $x_0$ stetig ist.

Sei jetzt $f$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$; wir wissen dann also, dass

$$F_o' = F_u' = f$$

ist. Daher unterscheiden sich $F_o$ und $F_u$ nur um eine Konstante, die wegen

$$F_o(a) = 0 = F_u(a)$$

null sein muss. Das liefert insbesondere

$$F_o(b) = F_u(b)\,;$$

mit anderen Worten ist Oberintegral = Unterintegral, und $f$ ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

**Adresse des Autors**
Prof. Dr. Dirk Werner
Fachbereich Mathematik und Informatik
FU Berlin
Arnimallee 2–6
14195 Berlin
werner@math.fu-berlin.de