Briefe an die Herausgeber

Schopenhauers Mathematik-Kritik
(1–2003 / 2–2003)

26. 7. 2003 – Natürlich haben sie beide recht; etwa wenn Schreiber betont, Schopenhauer rufe, in seiner Verständnislosigkeit, nach einer „radikalen Vereinfachung“ der Mathematik, und wenn Böttcher festhält, immerhin habe Schopenhauer „Einblick in die erkenntnistheoretische Problematik“ der Mathematik genommen. Wer Schüler unterrichtet, ihnen etwa den Satz des Pythagoras (nicht im speziellen Falle des gleichschenkligrechtwinkligen Dreiecks!) mittels Scherung und anderen Flächenverwandlungen vorführt und trotz der Vollständigkeit der Beweiskette kein ‚Aha‘ zu hören bekommt, weiß, was ich meine. Ein anderes Beispiel: Schülern der 6. Klasse kann man durchaus Euklids Beweis für die Tatsache, dass es keine größte Primzahl gibt, nahe bringen. (Zur Erinnerung: Das aus n Primzahlen gebildete Produkt, vermehrt um 1, hat andere Primteiler als die n Primzahlen.) Die meisten dieser 11-Jährigen, wenn man ihnen nur genug Zeit widmet, verstehen den Beweis, lehnen ihn aber als zu raffiniert ab („Darauf wäre ich nie gekommen“) und berufen sich statt dessen auf ihre Intuition („Die Reihe der Primzahlen kann ich mir sowieso nur so vorstellen, dass sie immer weiter geht“).

Da erscheint also eine urtümliche oder eben Schopenhauer'sche Haltung gegenüber mathematischen Zusammenhängen, und es ist ein schwieriger erzieherischer Prozess, die Lernenden so weit zur mathematische Kultur hinzuführen, dass sie auch und gerade die trickreichen Beweise – die „stelzbeinigen“, wie Schopenhauer spöttisch sagt – akzeptieren und gar Freude an ihnen empfinden. Der Prozess ist langwierig, weil es die anschaulich-kurzen Beweise, die unser Philosoph will, ja auch gibt.

Schopenhauers allgegenwärtige Polemik gegen das Unanschauliche der Mathematik hat etwas Naiv-Triviales und ist eine „erkenntnistheoretische Illusion“ (Schreiber), ist aber nicht so trivial, dass sie dem Mathematiker und seinem Selbstverständnis nicht ein Ansporn sein könnte.

Dr. Martin Lowsky
Hans-Geiger-Gymnasium
Poppenrade 53
24148 Kiel
MartinLowsky@aol.com

Linas Supportanfrage
(2–2003)

31. 7. 2003 – Auf Seite 14 der *DMV-Mitteilungen* wird die auf `www.mathematik.de` geäußerte Frage der Sechstklässlerin Lina zitiert, ob denn 0, 999 . . . gleich 1 sei. Brillantes ist zu diesem Thema von Fred Richman geäußert worden:
Fred Richman, Is 0,999 . . . = 1?, Mathematics Magazine, **72** (1999), 404–408
Diesen Artikel in englischer Sprache findet man auch auf der Homepage des Autors: `http://www.math.fau.edu/Richman/html/docs.htm`

Dr. Peter M. Schuster
Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität
Theresienstraße 39
80333 München
peter.schuster@mathematik.uni-muenchen.de

Linas Supportanfrage
(2–2003)

4. 8. 2003 – mich hat die eMail von Lina, genauer gesagt die Tatsache, dass eine 12- bis 13-jährige Schülerin uns „MathematikerInnen“ per Internet um Rat bittet, sehr beeindruckt. Falls ihr noch niemand geantwortet hat, möchte ich Lina gerne die folgende Erklärung zukommen lassen, denn ich finde sie hat eine Antwort verdient:

Liebe Lina,

zunächst einmal finde ich es ganz toll, dass du dich mit deiner alles andere als einfach zu beantwortenden Frage ohne falsche Scheu an diejenigen gewandt hast, die es wissen sollten: uns MathematikerInnen.

Dann die (vielleicht enttäuschende?) Antwort: Deine Lehrerin hat in der Tat recht, 0,999 . . . ist wirklich gleich 1.

Warum? Nun ja, mit der Verwendung von Brüchen handelt man sich neben vielen Vorteilen leider auch ein richtig übles Problem ein: Sobald man Brüche als Zahlen zulässt, ist es aus mit der eindeutigen Darstellbarkeit eines jeden Zahlenwerts! Nimm' nur einmal $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ – derselbe Wert, und doch zwei völlig verschiedene Schreibweisen. Eine Möglichkeit dir in diesem Fall zu helfen, kennst du bestimmt schon: das vollständige Kürzen eines Bruchs. Dabei wird $\frac{6}{8}$ sofort zu $\frac{3}{4}$, aber man muss ein wenig rechnen, um diese Gleichheit zu erhalten.

Dezimalbrüche scheinen auf den ersten Blick die Lösung zu sein (0.75), doch das täuscht. Und so ist eben zum Beispiel 0,999. . . nichts anderes als 1, wie du gleich sehen wirst. Kürzen kann man Dezimalbrüche zwar nicht, aber es gibt eine andere Methode, mit der man sowohl für gewöhnliche wie auch für Dezimalbrüche entscheiden kann, ob es sich bei zwei Darstellungen um dieselbe Zahl handelt oder nicht. Sie beruht auf der folgenden Überlegung:

Zwei Zahlen a und b sind dann (und *nur* dann) verschieden, wenn auf dem Zahlenstrahl keine Zahl mehr in der Mitte zwischen a und b liegt.

Nun muss man natürlich wissen, welche Zahl in der Mitte zwischen a und b liegt – aber so wie ich dich einschätze, weißt du das . . . von der Berechnung deiner Noten fürs Zeugnis her: In der Mitte zwischen a und b liegt nämlich $\frac{a+b}{2}$. In der ersten Schulaufgabe eine 2, in der zweiten eine 1? Dann liegt dein Durchschnitt genau bei der Mitte von 1 und 2, also bei $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Wenn Du von zwei gleichen Zahlen die Mitte ausrechnest, zählst du bei der eben beschriebenen Rechnung zuerst beide zusammen (dabei ergibt sich dasselbe wie wenn Du eine der beiden mal 2 nimmst, weil ja beide Zahlen gleich sind) und anschließend teilst du die Summe wieder durch zwei – dabei muss zwangsläufig wieder die Zahl herauskommen, mit der du angefangen hast. Testen wir das doch mal an ein paar Beispielen:

(a) 3 und 10; die Mitte ist $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \Rightarrow$ 3 und 10 sind verschieden – wer hätte es gedacht ;)

(b) 4.25 und 5.75; die Mitte ist $\frac{4.25+5.75}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow$ 4,25 und 5,75 sind verschieden, 5 liegt genau dazwischen.

(c) $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ (unser Beispiel von oben); hier müssen wir erst erweitern, damit wir die Brüche addieren können: $(\frac{3}{4} + \frac{6}{8}) : 2 = (\frac{6}{8} + \frac{6}{8}) : 2 = \frac{12}{8} : 2 = \frac{6}{8} \Rightarrow$ In der Mitte von $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ liegt wiederum $\frac{6}{8}$, also liegt zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ nicht wirklich etwas, oder anders ausgedrückt: $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ stellen genau denselben Zahlenwert dar.

(d) 0,999 . . . und 1; das ist deine Frage gewesen – hier kommt die Antwort:

$$
\begin{array}{l}
(0{,}999\ldots + 1) : 2 = 1.999\ldots : 2 = 0{,}999\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-18} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -19 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-18} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -19 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-18} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ In der Mitte zwischen 0,999 . . . und 1 liegt wiederum 0,999 . . ., also liegt zwischen 0,999 . . . und 1 gar keine weitere Zahl. Somit stellen auch 0,999 . . . und 1 beide denselben Zahlenwert dar. Zum

Schluss noch ein kleiner Trost (so er denn überhaupt nötig ist): Auch *du* hast vollkommen recht, wenn du sagst, dass 0,999 ... doch ein „Unendlichstel" kleiner als 1 ist: In der 11. Klasse wirst du nämlich erfahren, dass ein „Unendlichstel" nichts anderes ist als 0.

Viele Grüße und weiterhin viel Spaß an der Mathematik, Mathias

Dr. Mathias Kratzer
Planegger Straße 36
81241 München
`mathias.kratzer@t-online.de`

30. 9. 2003 – Das negative Abschneiden der deutschen Schüler in TIMSS und PISA hat bekanntlich dazu Anlass gegeben, so genannte „Bildungsstandards" zu definieren und diese durch Leistungsvergleiche besonders in den Abschlussklassen zu überprüfen. So auch in Hessen. Vor kurzem erhielt ich Kenntnis von den Aufgaben der Real-Abschlussprüfung, die in der Landeshauptstadt Wiesbaden und im Rheingau-Taunus-Kreis im vorigen Jahr gestellt und in diesem Jahr zu Übungszwecken an weitere Schulen im Lande verteilt worden sind. Die vierte der Pflichtaufgaben lautete:

Eine Litfasssäule hat einen Umfang von 58 cm und eine Wandstärke von 6 cm. Sie ist 2,80 m hoch. Eine Brauerei will für ein Preisausschreiben wissen, wie viele Gläser Alt-Bier zu 0,2 l in diese Säule passen.

Sollten jetzt dem Leser solche stangenförmigen Litfasssäulen seltsam vorkommen, so vergisst er vielleicht, dass normalerweise (Standard!) Mathematik in der Schule nichts mit der Realität zu tun hat (es sei denn, die Autoren hätten an die beklagenswert hohe Affinität der Zehntklässler zum Bier gedacht, was dann allerdings auf ihre besondere Einführungsgabe schließen ließe). Nach Auffassung der Aufgabensteller ist dagegen Mathematik offenbar nicht durch Genauigkeit des Denkens, sondern der Dezimalen charakterisiert, wie die von ihnen angegebene Musterlösung aufs schönste zeigt:

$$r_1 = 9{,}23\,\text{cm}; \quad r_2 = 3{,}23\,\text{cm};$$
$$v = 9182{,}87\,\text{cm}^3 = 9{,}183\,\text{l};$$

und exakt 45,91 Gläser Bier passen in die Litfasssäule, vorausgesetzt dass es völlig schaumfrei ist. (Das Letztere aber mag wohl die Wahl der Biersorte erklären.)

Es ist kaum möglich, diese Aufgabe als Ausrutscher zu entschuldigen, für die fünf Experten als verantwortlich zeichnen. Denn auch die Wahlaufgaben spiegeln die gleichen „Standards" wider. Da ist die Rede von einer Pyramide, die eine ägyptische sein könnte, mit (exakt?) 136 m Basislänge. Doch die Höhe und das Volumen sind bei Strafe eines Punktabzugs mit 104,71 m bzw. 645577,09 m^3 zu ermitteln. Eine andere Aufgabe wieder handelt von einer Straße mit 18 % Gefälle auf 6,5 km (!). Der zu errechnende Höhenunterschied beträgt dann – diesmal nur auf 10 m genau – 1170 m. Verwundert fragt man sich – wenn man es doch nicht verlernt hat – welcher Straßenbauer da wohl am Werke war und in welchem Gebirge er seine Straße angelegt hat. Oder sollten die Schüler bei dieser Aufgabe im Sinne der Forderung nach Lebensnähe eher an eine Riesenrutsche denken?

Fazit: Die deutsche Bildungsmisere auch und besonders in der Mathematik mag viele Ursachen haben. Doch immer noch gilt, was das Sprichwort sagt: „Der Fisch stinkt vom Kopf her."

Prof. Dr. Wolfgang Kroll
Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Hans-Meerwein Straße
35032 Marburg