

Antike Darstellungen des Ikosaeders

von Benno Artmann

In Antikemuseen findet man gelegentlich Exemplare von Bronze-Dodekaedern aus dem römisch-keltischen Bereich, aber nur selten ein antikes Ikosaeder. Auf letztere soll hier hingewiesen werden, nämlich eines in seiner ganzen Art den Dodekaedern ähnliches in Bonn und ein zweites von besonderer Schönheit aus Bergkristall in Berlin.

Bevor wir auf diese Exponate eingehen, analysieren wir den zeichnerischen Teil der mathematisch grundlegenden Konstruktion des Ikosaeders bei Euklid. Im Gegensatz zu den anderen regulären Polyedern, für die es Kristalle als Vorbilder gibt, ist das Ikosaeder eine rein mathematische Kunstfigur und kann nur von der Geometrie her zu allgemeinerer Kenntnis gelangt sein. In diesem Sinne ist Euklids Figur nicht nur die anschauliche Realisierung einer mathematischen Idee, sondern gleichzeitig auch die historisch allererste Darstellung eines komplizierteren geometrischen Objekts.

Natürlich sind die Künstler in weit früheren Zeiten als Euklid in der Lage gewesen, figürliche Darstellungen in hervorragender Qualität zu schaffen. Aber selbst die überlieferten Architekturzeichnungen gehen in geometrischer Hinsicht nicht über die einfachsten Skizzen von Grund- und Aufrissen hinaus [Heisel 1993]. Aus der griechischen Bühnenmalerei (Skenographia) des 5. Jahrhunderts v. Chr. sind Ansätze einer „multiperspektiven“ Darstellung von Gebäuden bekannt, allerdings nur aus vager schriftlicher Überlieferung.¹ Diese entsprechen womöglich der Ikosaederdarstellung bei Euklid. Die frühesten überlieferten Schrägbilder (beispielsweise von Wagenrädern als Ellipsen) von ca. 420 v. Chr. sind im Original zu sehen auf Münzen und Vasenbildern [Artmann 1990, 49–50].

Bei Euklid aber ist es die begriffliche Abstraktionsstufe, die in der räumlichen Geometrie zum erstem Mal ihren zeichnerischen Ausdruck erzwingt.

Der historische Hintergrund

Man nennt die Regulären Polyeder auch Platonische Körper, weil sich ihre früheste Erwähnung bei Platon (428–348) findet. In seinem Dialog *Timaios* (Abschnitte 53c–55c, geschrieben etwa 360 v. Chr.) bringt er sie mit seiner Lehre von den vier Elementen Feuer, Wasser, Luft und Erde in Verbindung. Zu Beginn dieser Passage weist Platon (in 53c1) ausdrücklich darauf hin, dass seine Hörer mit der (offenbar neuen) mathematischen Theorie vertraut sind und in (55a) zitiert er auch die allgemeine Definition einer

räumlichen Form, welche die ganze sie umschreibende Kugel in ähnliche und gleiche [d. h. flächengleiche, insgesamt also kongruente] Teile aufteilt.

Die neue mathematische Theorie, auf die Platon anspielt, hat sich im Buch XIII der *Elemente* Euklids erhalten. Über die Autorschaft dieses Kapitels sind wir durch eine aus der Antike überlieferten Randbemerkung in den Handschriften der *Elemente* informiert:

Dies Buch handelt von den platonisch genannten Körpern, die aber nicht von Platon stammen. Drei der fünf Körper, Würfel, Tetraeder und Dodekaeder gehören den Pythagoreern, während das Oktaeder und Ikosaeder dem Theaetet gehören ... Euklids Namen trägt auch dieses Buch, weil er es in die Reihe der *Elemente* aufgenommen hat.

Entgegen dem ersten Anschein ist diese Behauptung plausibel, weil Tetraeder, Würfel und (fast reguläre) Dodekaeder als Pyrit-Kristalle vorkommen.² Da der Mathematiker Theaetet von Athen nach Auskunft Platons im Jahr 369 v. Chr. relativ jung gestorben

¹ Heisel 1993, S. 161 und van der Waerden 1966, Abschnitt „Die Stereometrie des 5. Jahrhunderts und die Perspektive“, wo allerdings neben Vitruv (um 30 v. Chr.) als Beleg nur eine Wandmalerei aus Pompeji um 60 v. Chr. wiedergegeben ist.

² Abbildungen, weitere Informationen hierzu und Literaturhinweise in Artmann [2001, Ch. 29/30].

ist, wird man seine Untersuchung der regulären Polyeder etwa in den Jahren 380–370 ansetzen dürfen. Theaetets Theorie mit einer allgemeinen Definition sowie Konstruktion und Klassifizierung aller darunter fallenden Objekte ist der erste Prototyp einer vollständigen mathematischen Theorie überhaupt. Seine Untersuchungen sind noch weiter geführt mit der Bestimmung des Irrationalitätscharakters der Kantenlängen der Polyeder bei vorausgesetztem Umkugelradius 1. Schon vorher bestimmt er in den vorbereitenden Hilfssätzen in Buch XIII, 11 den Irrationalitätstyp der Seite des regelmäßigen Fünfecks mit Umkreisradius 1. An dieser Stelle zeigt sich zum ersten Mal Theaetets persönlicher übergreifender Ansatz im Vergleich zu früheren Aussagen der Art: „Im Quadrat sind Seite und Diagonale inkommensurabel“. Er nimmt den Radius des Umkreises bzw. der Umkugel als universelle Normstrecke, mit der alle abgeleiteten Größen gemessen werden. Der wohl auch von ihm stammende, in Buch X der *Elemente* überlieferte monumentale Versuch der Klassifizierung aller (ausgehend von der Einheitsstrecke) mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Irrationalitäten blieb bei der Diskussion biquadratischer Erweiterungen stecken, was bei dem ihm zur Verfügung stehenden Hilfsmittel aus heutiger Sicht nur zu verständlich ist.

Die Zeichnung des Ikosaeders bei Euklid

Die ältesten physisch erhaltenen Handschriften der *Elemente* gehen etwa in das Jahr 800 n. Chr. zurück. Deren bis auf Kleinigkeiten vollständige Übereinstimmung und auch die aus mathematischer Sicht unwesentlichen Abweichungen der arabischen Tradition zeigen uns, dass uns Euklids Text in seiner originalen Form überliefert ist. Weiter können wir nach dem oben Gesagten und der inneren Struktur von Buch XIII sicher sein, dass uns in diesem Buch eine Abhandlung von Theaetet vorliegt.³ Also wird auch die Zeichnung bei der Konstruktion des Ikosaeders in XIII, 16 von Theaetet stammen.⁴ Wir geben im Folgenden eine Umzeichnung der Figur bei Euklid nach dem Manuskript Ms. Cod. Vat. Gr. 160 aus der Vatikanischen Bibliothek, auch „Manuskript P“ genannt, wieder. Die entsprechende Manuskriptfigur selbst ist in fotografischer Reproduktion bei Schönbeck [2003, S. 179] zu finden. Dort kann man auch die außerordentliche Präzision des Zeichners aus dem 10. Jahrhundert bewundern. Die griechischen Buchstaben dieser Zeichnung sind durch diejenigen in der Ausgabe von Heath ersetzt. Wir analysieren hier nur

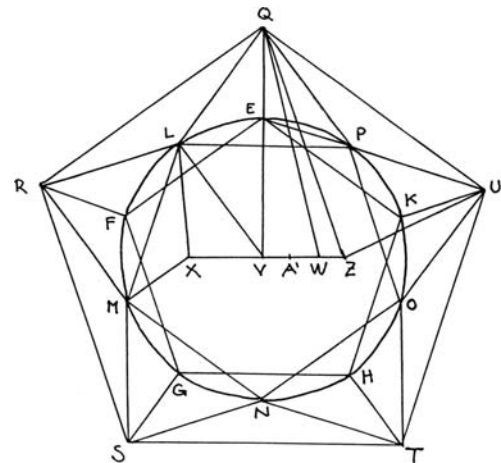


Abbildung 1. Die Konstruktionszeichnung von Euklid nach dem Manuskript P

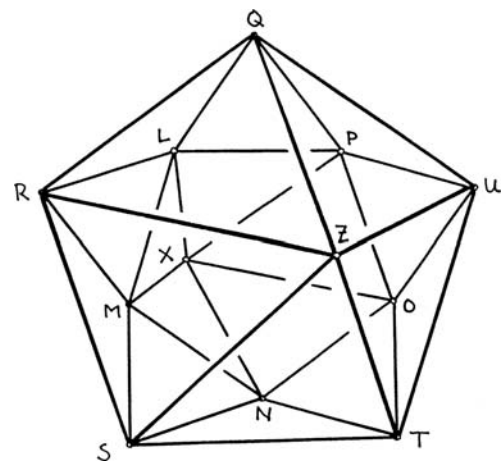


Abbildung 2. Das Ikosaeder nach Euklid vervollständigt, aber ohne Hilfslinien der Konstruktion

die Zeichnung, die zugehörige Konstruktionsbeschreibung kann man leicht bei Euklid nachlesen bzw. auch bei [Artmann, 2001, Ch. 29] finden. Trotz der zunächst ungewohnten Art von Euklids Zeichnung erkennt man beim Nachvollzug seiner Konstruktion, dass sie dem Problem erstaunlich gut angepasst ist.

Bei genauerem Hinsehen stellt sich heraus, dass Euklid (bzw. Theaetet) nach heutigem Verständnis in seiner Zeichnung eine Zentralprojektion (Abb. 3) mit einer Parallelprojektion (Abb. 4) mischt. Nach dieser Analyse wird auch die antike Zeichnung dem modernen Betrachter noch einmal „durchsichtiger“. Die Mischung der Perspektiven stimmt offenbar überein mit dem bei Heisel [1993, S. 161] angedeuteten Verfahren in der griechischen Bühnenmalerei des 5. Jahrhunderts. Vielleicht haben wir hier geradezu einen Beleg für diese Darstellungsart.

³ Heath III, 438 hält noch einen Zwischenbearbeiter für möglich.

⁴ Warnung: Leider hat der Übersetzer Cl. Thaeer der deutschen Ausgabe der *Elemente* die originale Zeichnung durch eine moderne ersetzt.

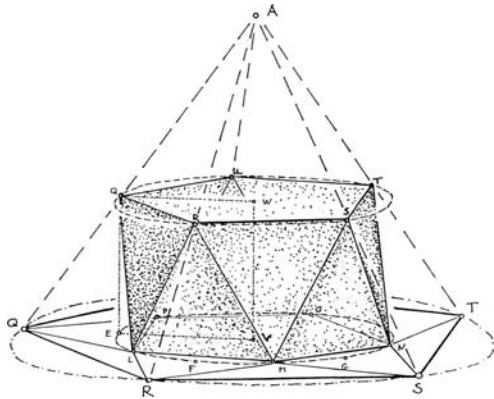


Abbildung 3. Der als Zentralprojektion zu verstehende Teil der Zeichnung Euklids

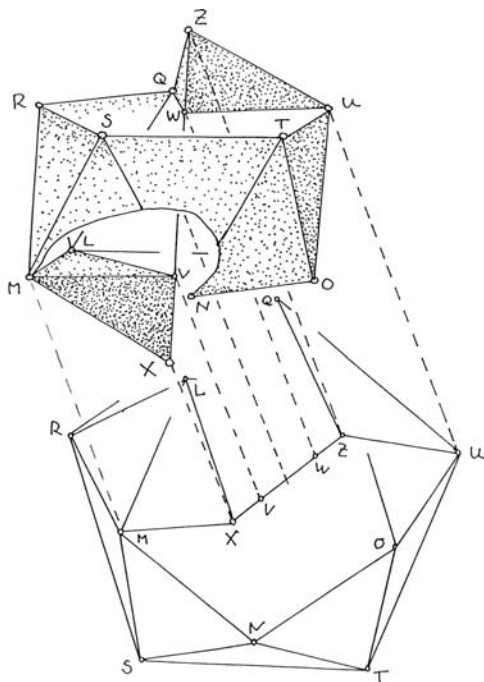


Abbildung 4. Der als Parallelprojektion zu verstehende Teil, insbesondere die Achse ZX

Spätere Zeichnungen des Ikosaeders

Aus der Antike und dem Mittelalter sind keine anderen Zeichnungen des Ikosaeders bekannt als die Euklids. Erst in der Frührenaissance, in der in Florenz das neu erwachte Interesse an der antiken Überlieferung mit der Erfindung der Perspektive (um 1435) zusammenkommt, findet man neue und im heutigen Sinn realistische Darstellungen, insbesondere im Werk Piero della Francescas (1415–1492).

Die früheste Zeichnung des Ikosaeders aus diesem Zeitraum ist die in Pieros um 1450 geschriebenen *Trattato d'Abbaco* überliefert.⁵ In den Jahren 1482–1492 hat Piero auch ein eigenes Buch, *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, geschrieben (Abbildungen daraus wieder bei Richter S. 41). Hier wie auch im *Trattato* sind die Zeichnungen perspektivisch, Schrägbilder im heutigen Sinn sind offenbar (weniger realistische!) spätere Vereinfachungen. Pieros Freund Luca Pacioli ist vermutlich der Vermittler dieser Kenntnisse an Leonardo da Vinci. Leonardo hat um 1500 die regulären Körper in Holzschnitten perspektivisch für Paciolis Werk *Divina Proportione* dargestellt.⁶ Ebene Netze zu Herstellung von Kartonmodellen bringt z. B. Albrecht Dürer 1525 (wieder Richter S. 56). Genau solche Modelle von etwa 1780 haben sich in der Modellsammlung des Mathematischen Instituts in Göttingen erhalten.

Ein Ikosaeder im Antikemuseum Berlin

Ein wunderschönes Ikosaeder von etwa 2,5 cm Durchmesser aus glasklarem Bergkristall ist in der so genannten Silberkammer der Antikensammlung Berlin im alten Museum ausgestellt, Vitrine 20.7: *Grabbeigaben für ein junges Mädchen*. Durch die Fundumstände ist das Grab relativ exakt auf die Jahre nach 15 n. Chr. datiert. Man kann der Leiterin der Antikensammlung nur zustimmen, wenn sie feststellt, dass „dessen vollkommen gleichmäßige Facettierung an kunstvollen Diamantschliff erinnert“ [Platz-Horster 1979, 192]. Kein Foto (Abb. 5) kann diesen bezaubernden Eindruck festhalten. Wer will, mag dieses kleine Kunstwerk in seiner Kombination

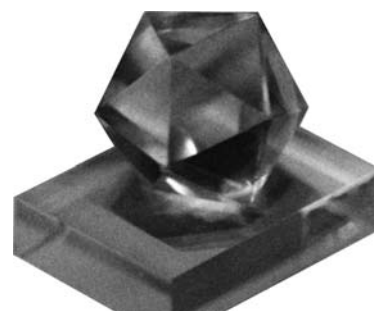


Abbildung 5. Bergkristall-Ikosaeder aus dem Antikemuseum Berlin

⁵ Reproduziert bei Richter [1995, S. 39].

⁶ Bzw. die Entwürfe dafür geliefert, Repros wieder bei Richter S. 51. Zu derselben Serie von Entwürfen gehört auch eine Darstellung der Kugel, die man auch an anderen Stellen in der Renaissance findet und die vermutlich auf die Zeichnung bei Euklid XII, 17 zurück geht. Der Satz XII, 17 stammt wohl aus der Schule des Eudoxos um 340 v. Chr. Repro einer Darstellung dieser Art bei Richter S. 98.



Abbildung 6. Das verlorene Ikosaeder aus München

aus durchsichtiger Klarheit und geometrischer Strenge als ein Symbol für die Mathematik überhaupt ansehen. (Philosophen dagegen würden es vielleicht die perfekte Darstellung der Idee des Wassers nennen.)

Ein verlorenes Ikosaeder

Ein weiteres Ikosaeder aus Bergkristall befand sich in der Sammlung des Kgl. Münz-Kabinetts (heute Staatliche Münzsammlung) zu München. Nach Auskunft des Museums ist es in den Kriegswirren verloren gegangen. Es hatte einen Durchmesser von etwas weniger als 3 cm, war also ungefähr so groß wie das Ikosaeder in Berlin. Seine Datierung ist unklar. Da es sich bei der Beschreibung von Boll [1903, S. 470] um die womöglich einzige zugängliche Abbildung des Objekts handelt, ist sie hier (Abb. 6) reproduziert. Auf 16 der Flächen dieses Ikosaeders sind die zwölf Tierkreiszeichen und gewisse griechische Buchstaben eingraviert, davon Zwillinge, Krebs, Löwe und Skorpion doppelt. Boll vermutet, dass es astrologischen Zwecken diene. – In Bezug auf die praktische Herstellung dieser beiden sehr exakten Ikosaeder aus dem ja 6-symmetrischen Bergkristall ist man auf pure Spekulation angewiesen. Vielleicht wurde zuerst ein Würfel hergestellt und aus diesem nach dem mindestens schon Piero della Francesca bekanntem Verfahren [Richter wie oben] das Ikosaeder herausgeschnitten.⁷

Ikosaeder als Spielwürfel

Mehrere andere Ikosaeder ähnlicher Größe sind aus dem hellenistischen Ägypten bekannt [Guggenberger 1999, S. 130]. Eins „aus schwarzem Stein“ befindet

sich im Louvre in Paris.⁸ Zwei liegen im Metropolitan Museum of Art in New York.⁹ Von diesen ist eins aus Fajence, das andere aus Steatit (Speckstein). Beiden sind auf den Flächen griechische Buchstaben eingraviert, die sicher in ihrer Zahlenbedeutung zu lesen sind.¹⁰ Danach haben sie sicher als Spielwürfel mit den Zahlen 1–20 gedient. Vermutlich kennt man noch weitere dieser „Spielwürfel“. Malkevitch weist auf das British Museum hin.

Das Ikosaeder von Arloff

Das Rheinische Landesmuseum in Bonn besitzt unter der Inventar-Nr. 53.356 ein aus Bronze gefertigtes Ikosaeder von ca. 6 cm Durchmesser, das in seiner ganzen Machart den römisch-keltischen Dodekaedern sehr ähnlich ist. Es wurde 1953 in einem römischen Grab aus dem 3. Jahrhundert in der Gemeinde Arloff (Bad Münstereifel) gefunden. Seine mögliche Bedeutung oder Verwendung ist wie bei den entsprechenden Dodekaedern völlig rätselhaft.¹¹ Auf jeden Fall aber zeigt sich hier wie auch bei den oben beschriebenen Ikosaedern, dass gewisse Erkenntnisse aus der theoretischen Mathematik – wenn auch in vulgarisierter Form – ihren Weg in weitere Kreise der antiken Bevölkerung gefunden haben.

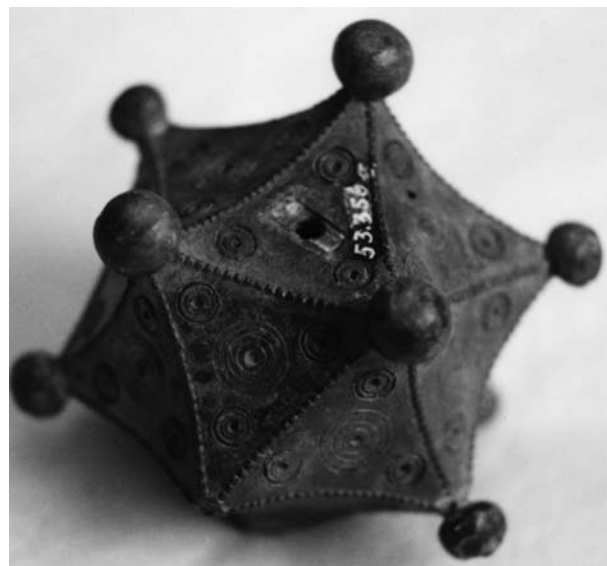


Abbildung 7. Das Ikosaeder aus Arloff im Rheinischen Landesmuseum Bonn, Inv.-Nr. 53.356

⁷ Entsprechende Zeichnung bei Heath im Kommentar zu Euklid XIII, 16.

⁸ (Inv.-Nr. 1532, Nouwen [1993, S. 58, Anm. 45]

⁹ Inv.-Nr. 27.122.5 und 37.11.3, abgebildet bei Malkevitch [1988, S. 84].

¹⁰ Für die griechischen Buchstabenziffern siehe Menninger [1958, S. II/76]. Auf den Abbildungen bei Malkevitch sind 13, 14, 15 bzw. 4, 10, 11, 12 zu sehen.

¹¹ Ausführliche Diskussion zu diesem Punkt, wo auch die absurdesten vorgeschlagenen Theorien vorgestellt werden, bei Guggenberger [1999].

Literatur

Artmann, Benno: *Mathematical Motifs on Greek Coins*. Math. Intelligencer 12 (1990), 43–50.

Artmann, Benno: *Roman Dodecahedra*. Math. Intelligencer 15 (1993), no. 2, 52–53

Artmann, Benno: *A Roman Icosahedron Discovered*. Amer. Math. Monthly 103, no.2 (Feb. 1996) 132–133

Artmann, Benno: *Euclid – The Creation of Mathematics*. New York, Springer 2002. (Das Ikosaeder ist in der ersten Auflage 1999 nicht besprochen. Generell Herausarbeitung auch heute noch grundlegender mathematischer Denkweisen bei Euklid nach Analyse der einzelnen Bücher der Elemente.)

Bien, Paul: *A numbered Icosahedron from India: Mystery and Meaning*. Proceedings of the eighth Midwest History of Mathematics Conference, eds. J. Curtin, D. Kullman, D. Otero. 2000, p. 69–77. (Beschreibung eines Ikosaeders von ca. 10 cm Durchmesser, das als Schachtel gebaut ist und auf dessen Flächen Zahlen in arabischer Schrift notiert sind. Aus dem Besitz des Sultans Tippu, 1799. Erwähnung einiger anderer Schmuckstücke in Ikosaederform aus dem indisch-arabischen Bereich.)

Boll, Franz: *Neue Griechische Texte und Untersuchungen zur Geschichte der Sternbilder*. Leipzig: B. G. Teubner 1903. (Kuriösität nebenbei: Verf. beklagt in der Einleitung die Verwahrlosung der deutschen Orthographie nach der Reform von 1902 und bleibt bei den alten Schreibweisen wie darnach, That, Gyps, Hülfe, Litteratur usw.)

Guggenberger, Michael: *Die römischen Dodekaeder*. Diplomarbeit am Institut für klassische Archäologie, Innsbruck 1999. 229 Seiten, 28 Tafeln. (Umfassender Überblick zu den bisher vorgeschlagenen Theorien betr. den Zweck dieser Dodekaeder. Verf. zählt etwas unter 100 bekannte Exemplare und bemerkt, dass etwa alle zwei bis drei Jahre neue Stücke, sei es aus alten Sammlungen oder frischen Funden, auftauchen.)

Heath, Thomas L.: *Euclid – The Thirteen Books of the Elements*. Vol. I, II, III. New York: Dover 1956

Heisel, Joachim: *Antike Bauzeichnungen*. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgemeinschaft 1993.

Malkevitch, Joseph: *Milestones in the History of Polyhedra*. S. 80–92 in: Senechal, M. and Fleck, G. Eds.: *Shaping Space. A polyhedral Approach*. Boston: Birkhauser 1988

Menninger, Karl: *Zahlwort und Ziffer*. (Teile I, II in einem Band) Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1958. (Standardwerk. Viel besser als später erschienene Bücher zum gleichen Thema.)

Nouwen, Robert: *De Gallo – Romeinse Pentagon – Dodecahedra: Mythe en Enigma*. Publikation des Gallo-Romeins Museum te Tongeren Nr. 45, 1993 (82 S.) (Archäologische Untersuchung von 77 Dodekaedern, meist mit Abbildungen. Erste Publikation des Ikosaeders von Arloff.)

Platz-Horster, Gertrud: *Grabbeigaben für ein junges Mädchen*. In: K. Vierneisel, Hrsg., *Römisches im Antikenmuseum*. Staatliche Museen Preußischer Kulturbesitz 1979, S 192. (Das Grab enthielt viele weitere Kostbarkeiten, zum Teil auch aus Bergkristall gearbeitet. Siehe die Ausstellung in der Silberkammer des Museums.)

Richter, Fleur: *Die Ästhetik geometrischer Körper in der Renaissance*. Stuttgart: Verlag Gerd Hatje 1995. (Die Bedeutung der (regelmäßigen) Polyeder für die Entwicklung der Malerei im 15. und 16. Jhd. Informative Darstellung der kunsttheoretischen Überlegungen und 86 aufschlußreiche Reproduktionen von Zeichnungen und Bildern der Epoche.)

Schönbeck, Jürgen: *Euklid*. Vita Mathematica 12, Basel: Birkhäuser 2003

Van der Waerden, Bartel Leendert: *Erwachende Wissenschaft*. Basel Birkhäuser 1966. (Wenn auch teilweise überholt, so doch immer noch beste Übersicht über Babylonische, Ägyptische und Griechische Mathematik.)

Der Verfasser dankt den Museen für die Erlaubnis zur Publikation der Abbildungen der beiden Ikosaeder in Bonn und Berlin. Fotos vom Verfasser.

Für Hinweise auf weitere antike Ikosaeder ist der Verfasser dankbar.

Anschrift des Autors

Prof. em. Dr. Benno Artmann
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3–5
37073 Göttingen
artmann@uni-math.gwdg.de

Benno Artmann lehrt seit seiner Emeritierung 1998 von Darmstadt Didaktik am Mathematischen Institut in Göttingen. Typisch für die Nachkriegszeit folgten auf eine Maurerlehre Abitur und Studium. 1974 übernahm er die Leitung einer von der VW-Stiftung eingerichteten Arbeitsgruppe für Didaktik der Mathematik an der TU Darmstadt. Angeregt durch didaktische Überlegungen zur Elementargeometrie und im Austausch mit H. Freudenthal kam er zum Studium der *Elemente* Euklids, das sich immer mehr in den Vordergrund seiner Interessen schob. Sein Hobby sind mathematische (und andere) Skulpturen.

