

Stabile Solitonenwellen in einer Modellierung mit der KP-Gleichung, von R. Pego (<http://www.math.umd.edu/~rlp/kpwaves.html>)

Zur Mathematik von Tsunamis

Notizen aus der MATHEON-Lounge

von Günter M. Ziegler

Der Tsunami, der am zweiten Weihnachtsfeiertag 2004 ganze Küstenregionen in Südostasien verwüstet hat, war keine gewöhnliche Welle – nicht nur wegen der mindestens 220 000 Toten. Auslöser der Katastrophe war offenbar ein gewaltiges Seebeben: Auf einer Strecke von 400 km lief eine Absenkung von max. 20 m mit einer Geschwindigkeit von 2 km/sec den Meeresboden entlang. Dieser gewaltige „Stoß“ hat keine üblichen Wellen ausgelöst, sondern Solitärwellen oder Solitonen, die als solche auch mathematisch interessante Gebilde darstellen.

Wie simuliert man einen Tsunami? Was wissen wir zur mathematischen Modellierung von Solitonen? Was kann die Mathematik zur Vorhersage der Wirkung von Tsunamis beitragen? – Diese Fragen habe ich dem numerischen Mathematiker Peter Deuffhard gestellt, der kurz zuvor etwa 500 Schülern in der Berliner Urania das Thema nahe gebracht hatte. Unser Gespräch fand im Rahmen eines informellen „Lounge-Gesprächs“ des Berliner Forschungszentrums MATHEON¹ statt. Solche Fragen werden derzeit überall heiß diskutiert, weshalb wir hier berichten.

Solitonen

Was sind Solitonen? Solche außergewöhnlichen „Wellen“ wurden erstmals wohl von einem englischen Ingenieur, John Scott Russell, im Jahr 1834 in einem Kanal bei seinem Landhaus in Schottland beobachtet. Russell hat mit solchen Kanalwellen experimentiert und dabei wichtige Beobachtungen festgehalten. Die Solitonen haben überraschende, charakteristische Eigenschaften, die sie von üblichen „Sinus“/Fourier-Wellen stark unterscheiden:

1. Solitonen sind formstabil – eindimensionale Wellen (z. B. in einem Kanal) werden über weite Strecken weder flacher noch breiter.

2. Solitonen sind keine „Oberflächenwellen“, sondern beziehen die gesamte Wassersäule vom Meeresboden bis zur Oberfläche ein.
3. Die Geschwindigkeit von Solitonen ist hauptsächlich abhängig von der Wassertiefe.

Die erste Eigenschaft verleiht dem Tsunami seine katastrophale Wirkung: Da die Welle so wenig zerläuft, konnte das Seebeben vor Sumatra noch im entfernten Somalia Verwüstungen auslösen.

Die zweite Eigenschaft erklärt, warum die Hydrodynamiker die Tsunamiwellen auch im tiefen Ozean mit einer „Flachwassergleichung“ modellieren. Die Welle verläuft nicht an der Wasseroberfläche, auch nicht am Meeresboden, sondern die ganze kilometerhohe Wassersäule im tiefen Ozean ist an der „Welle“ beteiligt.

Durch ein extrem vereinfachtes Modell (elementare Wellengleichung) zeigt sich, dass die Geschwindigkeit etwa wie

$$v \approx \sqrt{gh}$$

von der Wassertiefe h (bei Erdbeschleunigung g) abhängt. Damit ergibt sich für Wellen kleiner Amplitude im 10 km tiefen Ozean eine Geschwindigkeit von mehr als 300 m/s. Die Gleichung für v zeigt auch den dritten Effekt – der sich im Labor leicht reproduzieren lässt.

¹ Seit einiger Zeit heißt das DFG-Forschungszentrum „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ jetzt kürzer einfach MATHEON. Das erinnert vielleicht an das von Aristoteles gegründete Lykeion in Alexandria.

Solitonen verhalten sich in verschiedener Hinsicht wie Teilchen, nicht wie Wellen. So gibt es zwischen Solitonen nicht die gewohnte Art von Interferenzen und Auslöschungen. Solitonen bewegen sich durch den Ozean in Form einer gigantischen „Wasserwand“, deren Wirkung eher einer Druckwelle entspricht. Sie können ähnlich schnell sein wie Schall in Luft, sind aber deutlich langsamer als Schall im Wasser. Die Welle auf dem freien Ozean sieht an der Oberfläche harmlos aus – nachträglich wurden ca. 60 cm Amplitude aus Satellitendaten herausgefiltert. Erst in Ufernähe steilt sich die Welle gewaltig auf, kann sich überschlagen, und entfaltet ihre zerstörerische Wirkung.

Hydrodynamik

Russells Beobachtungen waren wohl vergessen, als sechzig Jahre später der holländische Mathematiker Diederik Korteweg und sein Doktorand Gustav de Vries (1895) Solitonenwellen beschrieben. Sie konnten die Form der Wellen als

$$u(x, t) = A \cosh^{-2} \left(\frac{x-vt}{L} \right)$$

beschreiben (wobei L die Breite der Welle misst). Sie leiteten auch eine partielle Differentialgleichung ab, der die Solitonenwellen genügen,

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2h} u \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

die sich zu

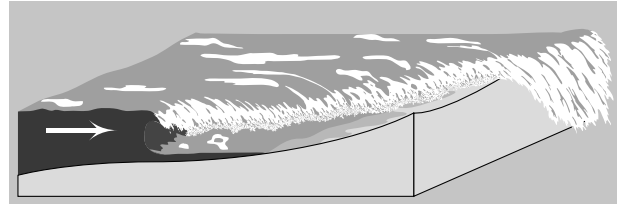
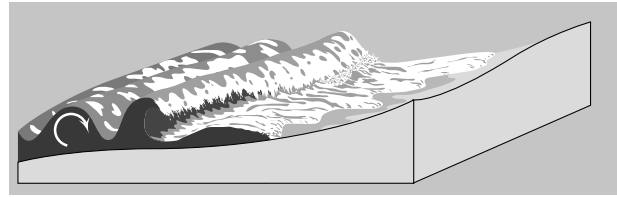
$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$$

normalisieren lässt – und die man heute als Korteweg–de Vries-Gleichung kennt, oder eben als „KdV“.

Die KdV ist eine nicht-lineare Differentialgleichung, und die unerwarteten, ungewöhnlichen Eigenschaften von Solitonenwellen sind alle direkte oder indirekte Folgen von solchen Nichtlinearitäten.

Die KdV-Gleichung lässt sich aus den Euler–Lagrange-Gleichungen der Hydrodynamik ableiten, indem man verschiedene Vereinfachungen macht (eindimensionales Problem, konstante Wassertiefe, etc.). Genau genommen ist nicht einmal klar, ob diese Gleichung das Phänomen wirklich „richtig“ modelliert: K und dV haben bei der Herleitung ihrer Gleichung eine Taylor-Entwicklung wohl eher zu früh abgeschnitten (nach dem dritten statt nach dem fünften Glied).

Die KdV-Gleichung ist aber Ausgangspunkt gewesen für spektakuläre Entwicklungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, in der mathematischen Physik, usw. Heutzutage wird etwa Information in transatlantischen Glasfaserkabeln verlustfrei mittels optischer Solitonen transportiert.



Oben: Windwellen kommen und gehen, ohne höhergelegene Gebiete zu überfluten. Unten: Tsunamis können als „Wasserwand“ das Land überfluten.
(<http://www.ess.washington.edu/tsunami/index.html>)

Wie simuliert man einen Tsunami?

Tsunamis kann man nicht voraussagen, weil man die Seebeben nicht vorhersagen kann, die sie auslösen. (Bei Erdbeben gibt es bisher nur ein sicheres Kriterium: Nach einem starken Beben ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass innerhalb 48 Stunden ein noch stärkeres kommt. Nach einem Erdbeben der Stärke 6,2 soll Los Angeles sofort evakuiert werden.)

Ein Seebeben kann man aber (mit entsprechenden Detektoren) schnell und relativ genau erkennen und lokalisieren. Auch das Beben am 26. Dezember wurde im Tsunami-Warnzentrum auf Hawaii sofort registriert – und die Wissenschaftler schlossen korrekt, dass es keine Tsunami-Gefahr *für den Pazifik* darstellte.

Simulation kann dabei zweierlei heißen, mit ganz unterschiedlichen Anforderungen und Auswirkungen:

- Wollen wir die Wellen im Nachhinein nachvollziehen, zu „korrekten Bildern“ kommen?
- Oder versuchen wir nach einer Erdbebenmeldung „in Echtzeit“ zu rechnen, um rechtzeitig warnen zu können?

Beide Aufgaben sind nichttrivial, und die Hindernisse sind gewaltig.

Daten. Die Ausgangsinformation über die Welle ist immer zu grob. Insbesondere für die Voraussage müssen die Anfangsdaten aus wenigen und unvollständigen Daten gerechnet werden. Auch ist fast auf der ganzen Welt das Kartenmaterial für die Ozeane in Küstenregionen (auch aus militärischen Gründen) zu schlecht.

Modellierung. Die richtigen Gleichungen und Ansätze zur dreidimensionalen Modellierung sind bei weitem nicht klar. (Für die Verallgemeinerung der eindimensionalen KdV-Gleichungen auf die Gleichungen

der sogenannten KP-Hierarchie verweisen wir auf die Links im Anhang.)

Unter anderem muss man auch den „Übergang zur Küste“ richtig hinkriegen. Gerade in diesem sensitiven Bereich, in dem sich die Wellen „aufsteilen“, ist aber die Datenlage eben besonders schlecht. Eigentlich sollte man die Wellen auch dann noch richtig beschreiben, wenn sie sich im Hafen überschlagen.²

Numerik. Man kann nicht über einen ganzen Ozean ein feinmaschiges Rechengitter legen. Also muss man wissen/merken, wann und wo „es kritisch wird“. Die vorhandenen adaptiven Schemata zum „shock capturing“ sind dazu wohl ebenfalls zu grob. Vielleicht wäre hier ja auch ein alternativer mathematischer Zugang gefragt.

Was ist Stand der Technik?

So ganz genau wissen wir natürlich nicht, was und wie zum Beispiel im Tsunami-Warnzentrum in Honolulu gerechnet wird. Aber auch die besten Simulationsbilder, die man heutzutage zu sehen bekommt, zeigen Probleme und Artefakte – etwa Auslöschungen und Interferenzen wie sie Solitonen charakteristischweise eben nicht zeigen sollten. Dass die grundlegenden Probleme bei der Simulation nicht gelöst sind, zeigen auch die häufigen Fehlalarme.

Das Potsdamer Geoforschungszentrum (GFZ) soll in der bedrohten Region des Indischen Ozeans ein Frühwarnsystem aufbauen, wofür zumindest ein Teil der genannten Probleme bewältigt werden muss.

Adresse der Autoren

Prof. Günter M. Ziegler (TU Berlin)
unter Mitarbeit von Prof. Dr. Dr. h.c. Peter Deuffhard
(FU und ZIB Berlin) und
Prof. John M. Sullivan (TU Berlin)
DFG-Forschungszentrum MATHEON
TU Berlin, MA 3-1
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
deuffhard@zib.de
sullivan@math.tu-berlin.de
ziegler@math.tu-berlin.de

Günter M. Ziegler, Jahrgang 1963, ist Professor für Diskrete Mathematik an der TU Berlin, und Mitglied des MATHEON. 2001 wurde er mit einem Leibnizpreis ausgezeichnet. Er ist bekennender Geometer, auch in seinen Arbeiten zu Optimierung, Kombinatorik und Topologie. Für die *Mitteilungen* beobachtet er unter anderem „Mathematik im Alltag“. Mit Martin Aigner schrieb er *Das BUCH der Beweise*.



Quellen und weitere Informationen

Russell im Originalton: http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html

Ein informativer Eintrag in der Online-Enzyklopädie *Wikipedia*: <http://en.wikipedia.org/wiki/Tsunami>

Zwei exzellente Seiten über die Kadomtsev–Petviashvili (KP) Gleichung, die die KdV-Gleichung auf zwei Dimensionen verallgemeinert:

<http://wwwuser.gwdg.de/~fmuelle/index.php?navi=soliton> von Folkert Müller-Hoissen.

<http://www.amath.washington.edu/~bernard/kp.html> von Bernard Deconinck.

Bilder von Lösungen: <http://www.math.umd.edu/~rlp/kpwaves.html> von Robert Pego.

Erste Simulationsrechnungen zum Sumatra-Tsunami finden sich auf

<http://walrus.wr.usgs.gov/tsunami/sumatraEQ/SumatraNW1.html>.

Weiteres Material zur Tsunami-Visualisierung:

<http://serc.carleton.edu/NAGTWorkshops/visualization/collections/tsunami.html>

² Tsunami heißt japanisch „Hafenwelle“.