

Kann man die von Kochsche Kurve hören? Chronik einer Romreise

von Karl H. Hofmann

Helge von Koch hat die Konstruktion der nach ihm benannten Kurve 1906 in die Literatur eingeführt ([4]). Seine Arbeit erschien in jenen Acta Mathematica, die 1882 von Gösta Mittag-Leffler gegründet worden waren und noch heute jedes Jahr unter den ersten zehn der Zeitschriften in der ISI-Liste aufgeführt werden.

Die von Kochsche Kurve ist eines der frühen Beispiele einer stetigen Kurve in der Ebene ohne Tangenten; denjenigen unter uns, die noch die einmal sehr verbreiteten Lehrbücher von von Mangoldt und Knopp [5] zu ihren Anfängervorlesungen gelesen haben, erinnern sich vielleicht, dass sie bald in die didaktische Literatur des Hochschulunterrichts eingegangen war (S. 417 ff.). Neue Berühmtheit erlangte diese Kurve mit dem Einzug der Fraktale in die populäre und die technische Literatur der Mathematiker und Informatiker.

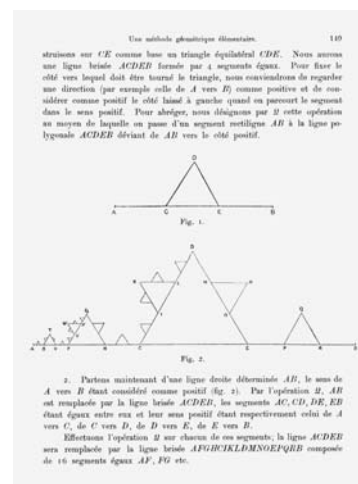
Aber was soll die Frage im Titel? Das Organ für eine sinnliche Wahrnehmung einer Kurve ist das Auge, keinesfalls aber das Ohr. Indessen, den Ärger über eine absurde Titelfrage werden Mathematiker vielleicht unterdrücken. Sie erinnern sich nämlich daran, dass Marc Kac einmal die Frage aufwarf, ob man den Umriss einer Trommel hören könne [2]; für seinen Artikel erhielt er dann auch im Jahre 1968 den begehrten Chauvenet-Preis der Mathematical Association of America. Die Spektraltheorie erlaubte es, zu dieser Frage vernünftige Aussagen zu machen. So wird man vorsichtig. Vielleicht gibt es doch jemanden, der selbst die von Kochsche Kurve hörbar machen kann?

Was die Villa Massimo möglich macht

Wenn von Literatur, Musik, Kunst, oder Architektur in Rom die Rede ist, dann kennen deutsche Intellektuelle zumindest den Namen der *Villa Massimo*. Gestiftet im Jahre 1910 von dem jüdischen Mäzen Eduard Arnhold (1849–1925) ist die *Accademia Tedesca Villa Massimo, Roma*, eine der deutschen Akademien in Rom, ein Ruhepol für Stipendiaten aus

den Bereichen der bildenden Künste, der Architektur, der Musik und der Literatur, die in einem jährlichen Zyklus in den schon bei der Gründung erbauten, architektonisch richtungsweisend gestalteten Studios frei und ohne irgendwelche Zwänge ihre selbstgewählten Projekte verfolgen. Beredt und begeistert schildert der Direktor der Akademie, der Kunsthistoriker Dr. Joachim Blüher, die Geschichte der Villa und seine Strategien für das Institut. Er empfängt am 1. März 2005 eine Gruppe von sozusagen „irregulären“ Besuchern: Mathematiker – Studenten und Hochschullehrer der Universität Tübingen, die, unter der Leitung von Professor Dr. Rainer Nagel und Privatdozent Dr. Gregor Nickel, als Gäste der Akademie das mittlerweile traditionelle *Romseminar* an der Villa Massimo abhalten dürfen. Das Projekt des diesjährigen Seminars, „Mathematik in der Kunst – Kunst in der Mathematik“, hatte Blüher so überzeugt, dass er die Vortrags- und Präsentationsmöglichkeiten der Villa eine Woche lang dem Romseminar zur Verfügung stellte.

Der Empfang am ersten Nachmittag vermittelt sofort einen Eindruck vom Funktionieren der Villa Massimo. Die Tübinger Mathematiker treffen einige der zehn diesjährigen Stipendiaten, die gerade ihren ersten Monat an der Akademie verbracht haben; daneben aber erlebt man auch unverstellt ein Alltagsergebnis, das in seiner ungezwungenen Informalität zur Normalität zu gehören scheint: Einen Blitzbesuch des Vizepräsidenten des Deutschen Bundestags, Dr. Norbert Lammert (CDU), der nicht nur vorbeikam, der Akademie seine Aufwartung zu machen, sondern der sogleich als ausgewiesener Bildungsexperte mit dem Tübinger Seminar (freilich nicht ganz unproviziert)



Acta mathematica 30 (1906), S. 145

Rudi Spring, M. 2. III. 2005

gut
20 sek

Annäherung an die KOCHSCHE SCHNEEFLOCKE*
dargestellt am Klavier (vierhändig; oben: Virtuose, unten: Mitspieler)

oder an der Orgel (oberes Manual: 4', unteres: 8', Pedal: nimmt beide) - Systeme)
[r.H.] [l.H.]
beht: 1 Oktave tiefer anschlagen

*angeregt vom Vortrag über „fraktale Geometrie“

Rudi Spring, *Annäherung an die Kochsche Schneeflocke*

in voller Bandbreite in Diskussionen verwickelt ist: Von den gegenwärtigen Problemen der deutschen Hochschule bis zur Frage, ob für das Romseminar Seminarscheine ausgestellt werden sollten.

Einer der Stipendiaten der Villa Massimo, der 1962 in Lindau geborene Komponist Rudi Spring, war so fasziniert von der Gegenwart der Mathematiker, dass er in den folgenden Tagen bei fast allen Seminarvorträgen zugegen war. Besonders aber interessierte ihn ein Vortrag von Martin Schuster: „Kunst auf Knopfdruck? – Fraktale Kunst“, in welchem die von Kochsche Kurve vorgestellt wurde. Schon in einer der nachfolgenden Abendsitzungen des Seminars meldete er sich zu Wort und trug eine zu jenem Zeitpunkt etwa 20, durch sofortige Wiederholung 40 Sekunden dauernde Komposition am Konzertflügel der Villa Massimo vor, vierhändig, begleitet von Benjamin Löw. Nach Springs einleitenden Worten konnte man die von Kochsche Kurve in Musik hören.

Die Grundstruktur und die nachfolgenden Iterationsschritte sind im mehrstimmigen Satz musikalisch wahrnehmbar gemacht; der Komponist vermittelte dabei dem Hörer einen Eindruck davon, welche Arbeit allein schon in eine kaum eine Minute dauernden Komposition eingeht. Die Öffentlichkeit wird allerdings auf eine Uraufführung einer ausgebauten Komposition noch ein Weilchen warten müssen.

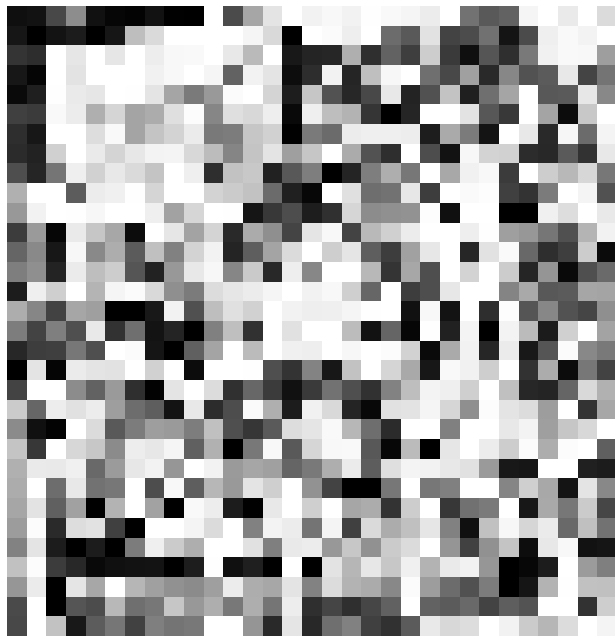
Das Tübinger Romseminar

An der Universität Tübingen steht das Romseminar ganz in einer langen Tradition des Studium Generale. Alte Tübinger erinnern sich an den Dies Academicus am Donnerstag; meistens nahm uns das Audimax in der Neuen Aula auf, aber oft musste man schon rechtzeitig kommen, um nicht auf den Stufen hocken

zu müssen, wenn Eduard Spranger, Wolfgang Schadowaldt, Helmut Thielecke oder Walter Jens vortrugen. In einem viel diskreteren und kleineren Format wird seit zehn Jahren von Rainer Nagel, einem der prominentesten Schüler Helmut Schaefers, und von Nagels Schüler Gregor Nickel in der Arbeitsgemeinschaft Funktionalanalysis des mathematischen Instituts ein Seminar angeboten, für das es keinen prüfungsrelevanten Seminarschein gibt. Dennoch finden sich jedes Jahr begeisterte Studenten aus allen Fakultäten, die sich mit Feuereifer auf das jeweils gestellte interdisziplinäre Rahmenthema des Seminars stürzen und sich konzentriert auf ihren Beitrag vorbereiten, der dann beim Seminar in Rom vorgetragen wird.

Dieses Jahr (2005) geht es um die Beziehung zwischen Mathematik und Kunst. Die tiefere Ergründung eines solchen Zusammenhangs ist sicher eine Herausforderung; aber dieses Seminar hatte sie angenommen und spürte dem Thema in viele Richtungen nach. Nagels hervorragende Mitarbeiter, allen voran Dr. Gregor Nickel, den man schon seiner Diktion nach als den Typus des „geisteswissenschaftlichen“ Mathematikers erkennt, sorgen für die intellektuelle Disziplin in der inhomogenen Gruppe und wehren die Gefahr ab, dass ein so heikles Projekt aus dem Ruder laufen könnte. So aber hielten sich Seminarvorträge zur bildenden Kunst, Musik, Architektur, Philosophie, Mathematik die Wage, wie man dem diesjährigen Rombuch [6] (und der einschlägigen Webseite) entnehmen wird, wo auch reichhaltiges Bildmaterial zur Verfügung steht. Rainer Nagel, dessen langjährige Kontakte in Rom vom vormaligen Direktor der Accademia Nazionale dei Lincei, Edoardo Vesentini (einem Funktionalanalytiker der Nagelschen Färbung [1]), über den Direktor der Villa Massimo und Kollegen der Universität „La Sapienza“ bis zu

[keine Online-Rechte für Abb.]



Maurits Cornelis Escher, *Print Gallery*
 (©2005 The M. C. Escher Company-Holland.
 All rights reserved. <http://www.mcescher.com>)

den Kneipenwirten in der Altstadt von Rom reichen, machte es möglich, dass das Seminar in den ehrwürdigen Räumen der Accademia dei Lincei im Palazzo Corsini in Trastevere mit Vorträgen zur Perspektive, zur bildlichen Erfassung vierdimensionaler Objekte und einer mathematischen Diskussion eines graphischen Blattes von Maurits Cornelis Escher eröffnet wurde. Es war eine bemerkenswerte Fügung, dass just zur Zeit des Seminars in den Musei Capitolini die Sonderausstellung „Nell’occhio di Escher“ gezeigt wurde, eine Retrospektive des Gesamtwerks Eschers [7]. Das gab selbst Escherskeptikern unter Mathematikern, zu denen der Schreiber dieser Zeilen zu rechnen ist, die Chance, sein graphisches Œuvre, in einem hochrangigen Kunstmuseum ausgestellt, gelassen zu betrachten. Sie lernten dabei, dass Escher in den Jahren 1922–1938, zwischen den Kriegen, in Rom lebte und beachtliche Serien realistisch gesehener römischer Veduten und Notturme in Holzschnitten und Holzstichen schuf und seine Wanderungen in der italienischen Landschaft in Zeichnungen und Lithographien festhielt. Freilich sind die stilistischen Anknüpfungspunkte dieser mit außergewöhnlicher handwerklicher Akribie gefertigten Blätter eher im technisch hochentwickelten Buchholzschnitt des 19. Jahrhunderts zu sehen, während Escher sich der genialen Entfaltung des expressionistischen Holzschnittes, für die die „Brücke“ repräsentativ ist, völlig zu verschließen schien.

Die römische Ausstellung zeigte aber auch ebenso die zunehmend surrealistischer werdenden Gra-

phiken der Nachkriegszeit, welche die Mathematiker so schätzen; darunter befand sich auch das Blatt „Prententoonstelling“ (1956), welches im Seminarvortrag von Ning Ning Jiang analysiert wurde. Die mit Hilfe einer konformen (natürlich nicht singularitätenfreien) Abbildung des 2-Torus technisch perfekt durchkomponierte Lithographie bewirkt einen Ausdruck der bei Escher so beliebten Selbstreferenz, dem man letztlich eine künstlerische Überhöhung nicht absprechen sollte. Das Zusammentreffen der Ausstellung mit der Thematisierung von Eschers Werk im Seminar war höchst willkommen. In der Villa Corsini stieß man auf eine Ausstellung der Zeichnungen Leonardos, z. B. mit dem Blatt, auf dem er sich mit der Quadratur des Kreises herumschlägt. Man konnte sich nicht des Eindrucks erwehren, Nagel und Nickel hätten auch die Ausstellungen organisiert. Aber beide bestreiten dies vehement.

Besonders ehrgeizig waren Vorträge, die zu beantworten suchten, was ohne Scheu in den Fragen formuliert wurde: „Was ist Kunst?“ (Bouchra Oualla-Weimer), „Was ist Mathematik?“ (Dr. Markus Haase); es sei dem Chronisten erlaubt, die Antworten hier nicht zu verraten, sondern dafür auf das „Rombuch 2005“ [6] zu verweisen, welches auf Inhalte im Einzelnen eingehen wird.

Profund bereichert wurde das Seminar durch einige besondere Veranstaltungen, die man offenbar wieder den Verbindungen Rainer Nagels und Gregor Nickels in Rom verdankte.

Prälat Prof. Dr. Max-Eugen Kemper, Geistlicher Botschaftsrat an der Botschaft am Heiligen Stuhl der Bundesrepublik Deutschland iR (verabschiedet am 21. 6. 03 nach 14-jähriger Dienstzeit, Professur für Didaktik und christliche Kunst in Fulda) führte das Seminar auf einer kunsthistorischen Exkursion in die Papstkapelle Sancta Sanctorum bei S. Giovanni in Laterano und hielt an Ort und Stelle eine Vorlesung über deren Geschichte im Rahmen des römischen Papsttums, ihre Bedeutung als Wallfahrtsort für die Gläubigen, und in Sonderheit über die zum heiligen Jahr 2000 glänzend restaurierten romanischen Fresken der Cavallini-Schule von ca. 1270 in der Kapelle über der berühmten Scala Santa. Die Restauration und Reinigung der Fresken gab schon Anlass zu anhaltenden Diskussionen der Experten, wie nun die römische Freskomalerei des ausgehenden 13. Jahrhunderts und ihr Einfluss auf Giotto und die Arenakapelle in Padua neu zu bewerten seien.

Professor Dr. Elmar Salmann OSB (Professor für Philosophie und Dogmatik an der Päpstlichen Hochschule Sant’Anselmo und an der Päpstlichen Universität Gregoriana) hielt in der Villa Massimo einen rhetorisch wie inhaltlich mitreißenden Vortrag über den Barock „als die Alchimistenküche der Moderne“.

Die Seminarteilnehmer waren untergebracht im Gästehaus des Istituto Il Rosario (Provincia Italiana delle Suore Carita Domenica della Presentazione), von den Seminaristen kurz „das Kloster“ genannt. In die Mitte der Woche setzte Dr. Gregor Nickel eine Lektüreliteraturlesung, die „im Kloster“ stattfand und in der das prekäre Dreiecksverhältnis von Mathematik, Theologie und Musik im Mittelpunkt stand. Aus Hermann Hesses Glasperlenspiel las er, was uns Hesse über das Spiel zu erläutern bereit war. Einen gewagten, aber schließlich gelungenen Querschnitt legte er durch Thomas Manns Roman Doktor Faustus, und zuletzt las Dr. Markus Haase einen ganz erstaunlich modern anmutenden Essay von Robert Musil über Mathematik und Dichtung. So kam in dem Seminar über Mathematik und Kunst auch die Literatur zu Wort, in welcher die Spuren der Mathematik von denjenigen zu finden sind, die sie dort suchen.

Mathematik und das Theater: Nicht einmal diese Verknüpfung hat das Tübinger Romseminar vergessen. Am vorletzten Abend wurde in der Villa Massimo das Spektakel „ $\mathbb{Q}\mathbb{N}\int\mathbb{T}$ -Mathesis und die Musen“ aufgeführt. Der Prolog war eine derart komprimierte 5-Minuten Vorlesung eines soliden Satzes über positive Operatoren und kompakte abelsche Gruppen auf einer Tafel der Größe eines Quadratmeters, aus der Kreide des Meisters selbst, dass den jüngeren Semestern das Hören und Sehen verging; der Chronist verbürgt sich dafür, dass alles Hand und Fuß hatte, und vertraute Erinnerungen stiegen auf. Das freilich war Mathematik pur! Gleich danach wurde Platons Dialog zwischen Menon und Sokrates in Szene gesetzt, jener Dialog, in welchem Sokrates zeigt, dass im Geiste des unerfahrensten Sklaven schon vorangelegt das Wissen schlummert, wie man ein Quadrat verdoppelt: Man muss nur verstehen, dieses Wissen zu wecken. Und dann ein großer Sprung von der Klassik zum modernen surrealistischen Theater von Samuel Beckett. Der Kurzeinakter von den sechzehn Taschen wurde von Stefano Cardanobile virtuos dargeboten, bereichert durch eingeschobene blitzschnelle Zusammenfassungen in italienischer Sprache. Das war, irgendwie, umwerfend! Nach der Pause folgte das *Pièce de Résistance* des Abends, eine computer-assistierte multimediale Collage unter dem Titel *impulsi ed impressioni* – ein Spaziergang zwischen Musik und Mathematik, pendelnd, wie das Programm es andeutet, zwischen Intuition, Formalisierung, Struktur, Kreativität und Reproduzierbarkeit. Das allein wäre schon eine komplette Seminarleistung des Teams gewesen. Die Seminarleiter waren von dieser Darbietung selbst überrascht worden, denn sie war von den Seminaristen unter der Federführung von Thomas Schröder insgeheim in ausdauernder Gruppenarbeit erstellt worden.



Ritratto di Innocenzo X /
Gian Lorenzo Bernini
Museo Doria Pamphili
05-02-26/K. H. Hofmann

Bildungsreise

Am Konzept der Veranstalter Nickel und Nagel, als Mathematiker den Tübinger Studenten im Bereich interdisziplinärer Studien ein außergewöhnliches pädagogisches Angebot zu machen, stimmt wirklich alles. Ihr Romseminar nützt den *genius loci* dieser Stadt, um Studierende aller Fakultäten zur Kreativität und eigenständiger Arbeit so anzuregen, dass jeder Teilnehmer seine spezifischen Talente und Interessen mit Begeisterung einsetzt, sei es durch musikalische Darbietungen von professioneller Kompetenz, sei es durch Unterweisung im Naturzeichnen (Heino Hellwig). Das manifestierte sich in dieser Reise nach Rom in so vielfältiger Weise, dass sich hier ein erschöpfender Bericht von selbst verbietet. Aber wie kommt der Chronist überhaupt dazu, über diese außergewöhnliche Bildungsreise im gegenwärtigen akademischen Raum etwas mitteilen zu können? Er und seine Leser verdanken dies einer ebenfalls zur Tradition gewordenen Praxis, je nach der Themenwahl des jeweiligen Seminars Gäste zu laden. Zugegen waren diesmal, neben mehreren von Nagels Schülern und Kollegen, die heute in Italien tätig sind, Peter Herfort, der längere Zeit in Tübingen am Institut für Fernstudien arbeitete, heute in Rom lebt und der sich in seinen Veröffentlichungen [2] sachkundig zu Themen des diesjährigen Themas geäußert hat, sowie der Berichterstatter; er verdankt die Einladung wohl nicht nur seiner akademischen Herkunft von der *alma mater* Tübingensis, sondern vermutlich auch seinem Bestreben, als Mathematiker die bildenden Künste im Auge zu behalten, und als Grafiker die Mathematik.

V 5 III 2005
für David Seidel

zur Registrierung / zur System-Notation:
das obenstehende Manual permanent mit 4' Flöte (eventuell zarte Beimischung eines anderen 4'; kein Prinzipal; kein 8')
das untenstehende, mit dem Pedal zusammengefasste Manual permanent mit 8' Flöte (Beimischung wie oben beschrieben; Pedal NUR per Koppel, d.h. bis auf den am Ende hinzutretenden 16' kein eigenes Klangspektrum)

CANTO sopra un' idea frattale Rudi Spring, op. 81 E

Fagotto
Organo
4'
8'

poco a poco più statica

5

9

4'
8'

Rudi Spring, CANTO sopra un' idea frattale

„vinum sit appositum“

Wie es sich für fahrende Scholaren gehört, hat das Romseminar seine Stammkneipe. Sie ist in einem Kellergewölbe der Altstadt Roms nahe dem Campo dei Fiori versteckt, im *Lucifero*, in einem kleinen Gässchen, der Via dei capellari. Hier saßen sie am Abend des Abschiednehmens zusammen, sangen zu Tische, tafelten und diskutierten. Der Komponist Rudi Spring aus der Villa Massimo saß mitten unter den Tübinger Seminaristen, diskutierte am lebhaftesten und freute sich über das Buch „Was ist Mathematik?“, das man ihm, mit Widmung, schenkte. Während er gerade über moderne Kompositionstechniken und über das Verhältnis des kreativen Komponierens und dem Computer dozierte, kritzelte er einige Zeilen auf einen Fetzen Papier, stand auf und verkündete den Zechern, sie hätten ihm die von Kochsche Kurve gegeben, er hätte sich mit seiner Komposition revanchiert, nun hätte man ihn mit einem Geschenk erfreut, wodurch offensichtlich ein Ungleichgewicht ent-

standen sei, das er nun mit folgenden, in Hexametern schwingenden Versen auszugleichen hoffe:

Mathematik, du unbegreifliche unter den Künsten,
wollest an mir exemplifizieren, wie aus Gedünsten
formelgedämpft nur neues Nicht-Wissen, nur neues
Nicht-Können
wächst, doch läss't umso tiefer mich fühlen, läss't stetiger
brennen
seliges Sehnen nach Schau, woher die tief'ren Gesetze
stammen. Stammelnd versammeln sich meine staunenden
Sinne,
allzeit bereit, als tumber Tor zu folgen *der Minne*.—
Uralt sprudeln die Quellen Euch, den Tübinger Weisen!
So schickt ihr mich fortan auf Geistes neueste Reisen.
Habt Dank

Sprach's, setzte sich und fuhr fort im Symposion.

Seine neueste Arbeit heißt *Canto sopra un' idea frattale*, möglich und notwendig geworden durch eben jenen „fraktalen Impuls“; eine freiwillige Dreingabe zu einem schon abgeschlossenen Auftrag der Hypobank Bregenz für Fagott und Orgel, in derselben Besetzung, mit demselben vorgesehenen



Rudi Spring, CANTO sopra un' idea frattale

Uraufführungsdatum vom 28. April 2005 im Radio-kulturhaus Wien, live übertragen vom österreichischen Rundfunk: Dem Orgelpart liegt als – freilich erweiterte und musikalisch ausdifferenzierte – Grundstruktur jene von Seite 158 bekannte Umsetzung der von Kochschen Kurve zu Grunde, das Fagott erhebt darüber seinen „Canto“. Die Länge freilich ist auf drei Minuten angewachsen.



Rudi Spring
(© Villa Massimo 2005,
Joachim Blüher)

Literatur

- [1] Engel, Klaus-Jochen, and Rainer Nagel et al, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag Berlin usw., 2000.
- [2] Herfort, Peter, and Arnd Klotz, *Ornamente und Fraktale – Visualisierung von Symmetrie und Selbstähnlichkeit*, Vieweg, Wiesbaden, 1997.
- [3] Kac, Marc, *Can one hear the shape of a drum?* American Mathematical Monthly **73** (1966), 1–23.
- [4] von Koch, Helge, *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*, Acta mathematica **30** (1906), 145–174.
- [5] Knopp, Konrad, *H. v. Mangoldt's Einführung in die höhere Mathematik*, II, S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1951⁹.

(Am Ende des Sommersemesters 1952 wurden Ulrich Dieter, heute Emeritus in Graz, und der Schreiber dieser Zeilen zu Konrad Knopp in seine Wohnung auf dem Apfelberg in Tübingen geladen, um ein handsigniertes Exemplar des Buches von ihm zu empfangen, für gute Noten in den Anfängerübungen, wie es hieß. Das signierte und vergilbte Exemplar zählt noch heute zu des Autors geschätzten Sammlerstücken.)

- [6] Nagel, Rainer, Gregor Nickel und Marc-Oliver Pahl, *Rombuch 2005: Mathematik in der Kunst – Kunst in der Mathematik*, Universität Tübingen, 2005, demnächst. <http://www.fa.uni-tuebingen.de/extern/RomSem/2005/>
- [7] Pirani, Federica, e Bert Treffers, *Nell'occhio di Escher*, L'Espresso, Roma, 2004.

Adresse des Autors

Prof. Dr. Karl H. Hofmann
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstraße 7
64289 Darmstadt
hofmann@mathematik.tu-darmstadt.de

Karl Heinrich Hofmann beginnt im Sommer 1952 an der Uni Tübingen ein Studium der Mathematik, Physik und Kunstgeschichte; lernt am Universitätszeicheninstitut bei Gert Biese Naturzeichnen, Kompositionslehre und Lithographie. Staatsexamen 1957 in Mathematik und Physik, Promotion bei Hellmuth Kneser und Günter Pickert, Habilitation 1962. Lehrt danach 20 Jahre lang Mathematik an der Tulane University in New Orleans und ist seit 1982 an der TU Darmstadt. Reist jetzt oft zu gemeinsamer Mathematik mit Sid Morris (University of Ballarat) nach Australien.

