

Hans Freudenthal
(Photo: Universität Utrecht)

Erinnerungen an Hans Freudenthal (1905–1990)

von Christine Keitel

Im September 2005 feiern die Universität Utrecht und das Freudenthal Institut Utrecht den 100. Geburtstag Hans Freudenthals. Und noch heute fühlen wir den großen Verlust, den sein Tod vor 15 Jahren bewirkt hat.

Hans Freudenthal war ein ganz außergewöhnlicher Mensch: In ihm vereinigte sich ein breites Spektrum von Wissen und Kompetenz in Geschichte, Philosophie, Naturwissenschaften, Mathematik und Mathematikdidaktik, eingebettet in eine umfassende Bildung, die er in guter deutscher, klassischer Ausbildung absorbiert hatte, und ein wundervoller Charakter. So wie er sich ein Leben lang privilegiert fühlte, weil er in seinen Studien von Anfang an von den größten Wissenschaftlern und Lehrern der damaligen Zeit an der Berliner Universität gefördert wurde, so förderte er später jüngere Kollegen. Für mich war es eines der größten Wunder, dass er nach all den schrecklichen Erfahrungen, die er unter dem Naziregime erdulden musste, eine noble, menschliche Person geblieben ist. Seine frühe Karriere inmitten der Avantgarde in Mathematik, Philosophie und Naturwissenschaften war abgeschnitten worden. Während der deutschen Besetzung der Niederlande lebte er versteckt und unter permanenter Bedrohung der Entdeckung und des Todes. Schließlich war er in einem Arbeitslager, den Tod vor Augen. Und doch war da keine Bitterkeit, da war nicht die leiseste Reserviertheit gegenüber einer Deutschen, da war niemals eine moralisierende Attitüde. Stattdessen: eine freundliche, aufmerksame Person, Wärme und Sympathie jedem gegenüber zeigend, der sich ihm näherte, jeden ermutigend, indem er ihn ernst nahm, unabhängig von dessen akademischen Würden oder Status.

Die Lektion, die sich Freudenthal aus seinen frühen Erfahrungen gewählt hatte, schien zu sein: Bildung, mit Hilfe von Bildung dafür sorgen, dass die Mensch-

heit besser wird als sie gewesen ist. Ich habe niemals erfahren, ob er diese Einstellung als eine Möglichkeit verstand und deshalb daran glaubte oder ob er es schlicht als eine Verpflichtung ohne Alternative angesehen hat.

Ich wüsste niemanden außer Hans Freudenthal, der das gesamte Spektrum der Mathematikdidaktik – von den niederen Regionen der Elementarschulklassenzimmer bis in die lichten Sphären der reinen Mathematik – so in einer Person zusammenfasste wie er. Im Zentrum dieser weiträumigen Perspektive stand seine Kompetenz als Mathematiker und die Autorität, die sie ihm verlieh, hat er als Didaktiker oft gebraucht. Nicht immer war sein unorthodoxes Denken von geltenden Lehrmeinungen und herrschenden Trends flankiert, und in seinem Auftreten hat er oft gezeigt, dass er den akademischen Ton niemals als einen Wert an sich sah. Seine Erscheinung innerhalb einer damals eher steif seriösen Mathematikdidaktik war ungewöhnlich: engagiert, witzig, direkt und konkret. Er machte komplizierte Sachverhalte in einfacher Syntax und auf geradezu kurzweilige Weise verständlich, erläuterte sie in treffenden Bildern und verblüffenden Analogien und illustrierte seine Gedanken reich mit anekdotenhaften Beispielen oder Geschichten aus der eigenen Erfahrung und sorgfältigen Beobachtung¹ (z. B. RME 58, 64, 73, 92, 101a, 113). Seine aphoristischen Aperçus und Exkurse stellten seine Darstellungen in größere Zusammenhänge und eröffneten Seitenblicke auf Verknüpfungen mit anderen Bereichen. Und Freudenthal vermied es, in den heiligen Hallen der Wissenschaft im Flüsterton zu spre-

¹ Eine Grundlage seines pädagogischen Erfahrungshorizontes hatte die intensive Beschäftigung mit der Erziehung seiner Kinder erbracht, 1942 hatte er eine Rechendidaktik für seine Söhne erfasst, die aber niemals veröffentlicht wurde. In seiner Autobiographie (Freudenthal 1987) berichtet er darüber, in seinen zahlreichen Zeitungskolumnen kam er manchmal darauf zurück.

chen: Er nannte Schund Schund und einen Holzweg einen Holzweg. Man sollte sich doch mit ihm darüber auseinandersetzen! Direktheit und Witz vereinten sich zu einer boshaften Verfolgung von papierner Theorie und von leichtfertigen oder borniertem Handeln in den Wechselbeziehungen von Mathematikdidaktik, Pädagogik, Psychologie und Soziologie.²

Wenn Freudenthal davon sprach, dass Mathematik „nicht eine Menge von Wissen, sondern eine Tätigkeit ist, eine Verhaltensweise, eine Einstellung, eine Geistesverfassung“ so beschrieb er damit, wie er selbst Mathematik praktizierte. Seine Beschäftigung mit Mathematik schien niemals zu ruhen, ja es schien, dass – was immer ihm begegnete, ob es Diskussionen mit Kollegen, Gespräche mit Kindern oder irgendein einfaches Ereignis im Klassenzimmer war – er all seine Begegnungen sofort und jederzeit zu der Beschäftigung mit Mathematik in Beziehung setzte, in der er sich gerade befand. Durch seine Offenheit und seine immer vorhandene sorgfältige Aufmerksamkeit zusammen mit einer besonderen Beobachtungsgabe und einem unglaublich guten Gedächtnis verfügte er über einen unerschöpflichen Vorrat an Beispielen, Illustrationen und zu allererst Inspirationen für neue, originelle und frische Ideen, für seine lebhaften, farbigen, animierten und animierenden Reden. Es braucht nicht gesagt zu werden, dass die Originalität seines Denkens und Vorgehens nicht in die üblichen Bahnen gelehrter Konventionen passte.

Sein Wunsch die Praxis zu erreichen, machte es notwendig, die Exklusivität fachkonventioneller Darstellungsweisen aufzugeben. Didaktik als sich in sich selbst vollendete Wissenschaft war für ihn nicht nur widersinnig, sondern ein Gräuelfeld. Dabei präzisierte er wie kein anderer sorgfältig, was Schulmathematik nicht sein dürfe und was sie zu sein habe: Sie kann nicht ein den Schülern in möglichster Reinheit vorzuführendes etabliertes System sein. Mathematik als ein steriles Abstraktum, ein Sprachspiel (zu dem sie seiner Meinung nach in der Modernisierung verkommen war), das nur einzuüben ist, das nannte er die sanktionierte Intimidation (oder didaktische Inversion), gefördert durch Pseudokriterien wie Exaktheit, Reinheit, Strenge als didaktische oder pädagogische Wertungen, wie sie aus der Wissenschaft Mathematik einfach übernommen wurden. Was dagegen Schulmathematik sein könnte, wenn man nur die lernpsychologischen Voraussetzungen und Bedingungen ernst nimmt und gleichrangig als konstruktive Größen ansah: Die Tätigkeit, die Mathematik für den Wissenschaftler ist, auch von den Schülern erfahren zu

Hans Freudenthal wurde am 17. 9. 1905 in Luckenwalde bei Berlin geboren. 1923 nahm er an der Berliner Universität seine Studien in Mathematik, Physik und Philosophie auf. In seinem Lebenslauf (Freudenthal 1987) zählt er seine akademischen Lehrer auf: „Bieberbach, Brouwer, Coolidge, Einstein, Feigl, Fischel, Hadamard, Hamburger, Hammerstein, H. Hopf, Julia, Köhler, Löwner, Markwald, v. Mises, v. Neumann, Picard, Planck, P. Pringsheim, Rosenberg, E. Schmidt, Schrödinger, Spranger, I. Schur, Szegő, Vierkandt und Wehnelt.“ Er war ab 1928 als Assistent an der Edition der „Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik“ beteiligt. 1930 promovierte Freudenthal zu einem Thema aus der Topologie und wurde bald darauf von Brouwer als Mitarbeiter nach Amsterdam gerufen. Als jüdischer Bürger verlor er unmittelbar nach dem Einmarsch der Nazi-Armee in die Niederlande seine Professur an der Universität und die deutsche Staatsbürgerschaft und wurde ins Gefängnis gesperrt, aus dem ihn seine holländische Frau befreien konnte; er war dann im Versteck von allen Arbeitsmitteln und Kontakten abgeschnitten und wurde schließlich doch noch entdeckt und ins Arbeitslager Havelte gesteckt (1943–44), aus dem er mit Hilfe von Freunden entkommen konnte.

lassen; Mathematik als zu Verfertigernde, das System als etwas von dem Schüler nach und nach zu Erfindendes aufzufassen, vor allem in der Gruppe voneinander lernend.

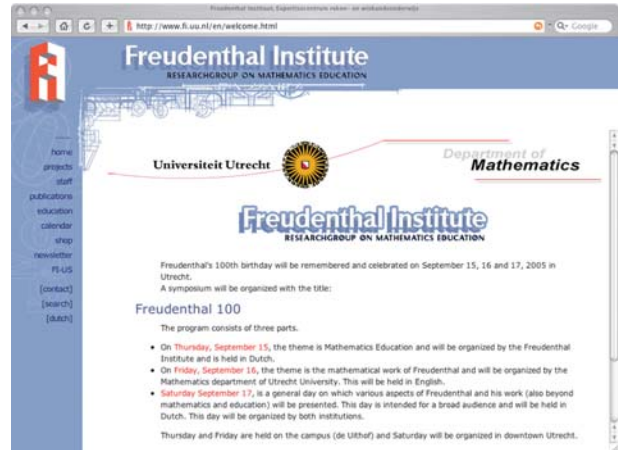
Die Rolle des Lehrers wäre in einer solchen Schulmathematik nicht die des Dozenten, sondern des „Geburtshelfers“ und der Stütze in diesem Prozess, Mathematikdidaktik als ein Fortschreiten in einem dialektischen Prozess von Handlungen und deren Reflektion, bei denen die Schüler agieren, der Lehrer reagiert. Die Weiträumigkeit seines Denkens war wichtig für die sich gerade entwickelnde Wissenschaft Mathematikdidaktik, um ihr die Nabelschnur zu einer philosophischen Dimension von Bildung und Erziehung zu erhalten und sie gleichzeitig vor philologischer Verknöcherung zu bewahren. Hier haben Anekdoten einen Platz, hingegen gehört ein auf Vollständigkeit zielendes Registrieren des Neuen vom Tage – und werde es auch schulenweise vorgetragen – nicht notwendig dazu.

Hans Freudenthal war sehr direkt in seiner Kritik, und manche der Kollegen waren ernsthaft betroffen, er selbst aber liebte es geradezu kritisiert zu werden,

² Als Einleitung zum Kapitel „11. Der Zahlbegriff“ in Band 1 seiner „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ finden wir seine ironische Notiz aus der fiktiven Biographie eines Didaktikers: „Er hatte seine Mathematik von Piaget und seine Entwicklungspsychologie von Bourbaki. Er liebte die vollständige Induktion nicht, er zog ihr die vollständige Intimidation vor“ (Freudenthal 1973, I, 159)

er fühlte sich immer gern herausgefordert zu diskutieren und gemeinsam mit anderen neue Sichtweisen auszuprobieren. Sein wichtiges Ziel war es, Organisationen für regelmäßige Treffen und Gesellschaften zu gründen, die mathematikdidaktische Forschung in Gang bringen, durch den Austausch über Forschungsansätze und –ergebnisse fördern und weiterführen, vor allem aber zur Verbesserung des Mathematiklehrens und -lernens beitragen: Die Entwicklung kritischen Denkens und eines selbstbestimmten vernünftigen Verstandes glaubte er durch den vernünftigen Gebrauch von Mathematik unterstützen zu können. Er war eine der treibenden Kräfte bei der Gründung der Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) 1950, die Forscher und Mathematiklehrer zusammenbrachte; er war nicht nur eines der aktivsten Mitglieder dieser Organisation, sondern auch für viele Jahre ihr richtungsweisender Präsident. Für ihn war es ganz selbstverständlich, sich 1972 an der Neugründung der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (ICMI) aktiv zu beteiligen und regelmäßig an deren Kongressen teilzunehmen. Er war ebenso einflussreich an der Gründung der Internationalen „Organisation for Psychology and Mathematics Education“ (PME) 1976 beteiligt, dafür wurde ihm die Ehrenmitgliedschaft gewidmet. Seine vielleicht bedeutendste, enorm wichtige und erfolgreichste Gründung jedoch war die internationale Zeitschrift „Educational Studies in Mathematics“ (ESM), für die er nicht nur als Gründungseditor, sondern auch als langjähriger Chief Editor und ambitionierter, regelmäßiger Autor von Beiträgen wirkte. Diese Zeitschrift hat Standards für Publikationen in Mathematikdidaktik weltweit gesetzt und dank all der sorgfältig ausgewählten Editoren, die Hans Freudenthal nachfolgten, ihre besondere Form und Strenge behalten.

In deutscher Sprache sind – neben einzelnen, vor allem konstruktiven und kritischen Aufsätzen in pädagogischen oder unterrichtspraktischen Zeitschriften – von Hans Freudenthal nur zwei Bücher erschienen „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ (1973) und „Vorrede zu einer Wissenschaft von Mathematikunterricht“ (1978). Sie wurden und werden häufig zitiert, wenn auch nicht wirklich rezipiert. „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ ist seine Version einer ‚Elementarmathematik vom höheren Standpunkt‘, wobei jedoch der höhere Standpunkt ausschließlich eine pädagogische Perspektive ist³. Mathematik wird nicht als fertiges Produkt, sondern als eine im Lernprozess entstehende Konstruktion



<http://www.fi.uu.nl/hf100/>

beschrieben. Ausgangspunkt seiner Auseinandersetzung sind klassische und moderne schulmathematische Gegenstandsbereiche, die er in einer Analyse auf ihre grundlegenden Ideen hin untersucht und zur mathematisierenden Tätigkeit in Bezug gesetzt hat. Dabei kritisiert Freudenthal scharf die Modernisierungstendenzen des Mathematikunterrichts im Sinne der bourbakistischen Strukturmathematik der 70er Jahre (RME 12, 12a, 14, 15, 16, 28, 87, 101a u. a.) ebenso wie verfestigte stoffdidaktische Traditionen, indem er seine Charakterisierungen und Ausarbeitungen der zentralen Ideen durch historische Rückblicke illustriert und durch Beobachtungen individueller Lernprozesse, durch erfolgreiche unterrichtspraktische Erfahrungen und durch neue Unterrichtsideen ergänzt. In seiner „Vorrede zu einer Wissenschaft von Mathematikunterricht“ verschärft er seine Kritik, in dem er sie auf Unterrichtswissenschaft, allgemeine Didaktik und vorherrschende Paradigmen in Psychologie und Curriculumentwicklung ausdehnt. Es war die Zeit der ersten internationalen Leistungsvergleiche in Mathematik und der ‚empirischen Wende‘ in den Erziehungswissenschaften, mit der er sich sehr kritisch auseinandersetzte (RME 49, 55, 60, 60a, 158 u. a.). Dieser Kritik stellt er Forderungen gegenüber, die eine Wissenschaft Mathematikdidaktik zu erfüllen hätte und denen sie seiner Meinung nach nicht genügend Beachtung schenkte: Anstelle eines geschlossenen Systems von Theorie und deren Anwendungen war Hans Freudenthals Vision die von einer ‚Landschaft von Mathematikunterricht und Didaktik‘, bestimmt durch Markenzeichen, Leuchttürme, die wichtige Aspekte von mathematikdidaktischer Forschung und Praxis repräsentierten, eingewoben in ein dichtes Netz von Beziehungen untereinander. Diese Beziehungen waren jedoch nicht als systematisch fixierte anzusehen, sondern offen für Adapti-

³ Freudenthal führte die geringe Auswirkung Felix Kleins auf die Schulmathematik sogar in Deutschland darauf zurück, dass von „so hohem Standpunkte doziert wurde, dass man da die Elementarmathematik nicht mehr merkte“ (Freudenthal 1973, II, S. 454)

on in spezifischen individuellen Fällen. Einige seiner bedeutendsten Fokuspunkte waren die folgenden:

Wenn Mathematik nicht als abstraktes System vermittelt werden soll und nur vom konkret tätigen Subjekt erfasst werden kann, so heißt dies, dass der Unterricht auf einen reichen Kontext realer Handlungsmöglichkeiten angewiesen ist, in dem mathematisches Denken erfahren und auf dem weiter abstrahiert werden kann; in einem umfassenden Sinn soll Mathematik als Umweltbeziehung, als gesellschaftliche Beziehung, also *beziehungshaltige Mathematik* den gebührenden Platz im Unterricht erhalten. Bereits 1968 in dem Aufsatz „Why to teach mathematics as to be useful?“ (RME 19) verteidigte er die gesellschaftliche Forderung nach einem auf die soziale Praxis von Mathematik bezogenen Mathematikunterricht. Mit dem Entwurf einer „Mathematik für alle und jedermann“ (RME 112) versuchte Freudenthal später die Forderungen eines solchen Mathematiklernens und die demokratische Teilhabe am Wissen mit dem Anspruch fachlicher Standards zu verbinden.

Das Konstruktionsprinzip, das er seinen Arbeiten zu Grunde legte, war von grundsätzlicher Skepsis gegenüber Ambitionen oder Postulaten geschlossener systematischer Konzeptionen bestimmt. Es zielte auf etwas anderes, nämlich: *Fixpunkte* eines Bauwerkes anzulegen und diese mit einem möglichst reichen *Netz von Beziehungen* untereinander auszustatten und so die *Bedingungen der Architektur und die Bedeutung bestimmter Elemente* gleichzeitig kenntlich zu machen. Diese Fixpunkte waren zentrale Ideen, die sich im Laufe seiner mathematikdidaktischen Reflexion herausbildeten und die er immer wieder umkreiste, um sie von verschiedenen Seiten zu beleuchten und in ihrer Stellung zueinander zu erkunden⁴. In seiner späten wissenschaftlichen Autobiographie benannte er einige dieser Hauptgedanken explizit:

- Mathematik als eine menschliche Tätigkeit auf verschiedenen Ebenen innerhalb gelebter Wirklichkeit. Der Gegenstand der Tätigkeit ist beschreibbar durch allgemeinere Terme wie Mathematisierung (mit den verschiedenen Aspekten von schematisieren, formalisieren, algorithmisieren, strukturieren, axiomatisieren) und kann in eine horizontale und vertikale Komponente differenziert werden.
- Didaktische Phänomenologie als ein Weg mathematische Ideen zu beschreiben und gleichzeitig auf Phänomene zu beziehen, so dass sie mathematisiert werden können.
- Mathematiklernen als angeleitete Nacherfindung:

Lernprozesse auf verschiedenen Ebenen gesehen: Die Lernaktivitäten auf einer Ebene werden durch Reflexion Gegenstand auf der nächst höheren.

- Die didaktische Repräsentation der Realität durch reiche Kontexte als Ausgangspunkt von Mathematisierung und der Entwicklung mathematischer Begriffe.
- Vermittlung mentaler Objekte statt eines terminologisch bestimmten Begriffsapparates, und Vermittlung mathematischer Strukturen anstelle einer Struktur von Mathematik.
- Retrospektives und prospektives Lernen und Kampf den antididaktischen Inversionen.
- Bedeutungslernen, um die Quellen für Einsichten zu erhalten und sie nicht durch Drillverhalten zu verstellen.
- Entwicklung positiver mathematischer Einstellungen bei den Schülern gegenüber ihrer Tätigkeit und dem Lernen von Mathematik.
- Didaktisierung verstanden als Parallele zur Mathematisierung.
- Curriculumentwicklung verstanden als Lernprozess, in welchem Entwickler und Anwender gemeinsam Gedankenexperimente durchführen, die eine wichtige Rolle für die Umsetzung spielen.
- Mathematik für alle: gelernt und gelehrt in heterogenen Gruppen von Schülern unter Berücksichtigung unterschiedlicher Lernerfahrungen und Lernfähigkeiten.

Freudenthal hat früh darüber geklagt, dass zu bestimmten herrschenden Tendenzen in der Mathematikdidaktik, vor allem in der frühen „Neuen Mathematik“, zu wenig Opposition herrschte, und dass er eine kritisch-argumentative Resonanz auf die Arbeiten innerhalb der Mathematikdidaktik vermisste. Sein letztes Buch „Revisiting mathematics education“ (1991)⁵ liefert den strukturierenden Rahmen für seine vorhergehenden Veröffentlichungen und ist als ein energischer Anlauf zu verstehen, noch einmal die ihn bewegenden Themen in eine neue, klarere, überzeugendere Form zu gießen. A. Bishop nennt es den „definitive Freudenthal“.

Hans Freudenthals Ziel war es, mit mathematikdidaktischer Forschung und Entwicklung die Realität der Schul- und Ausbildungspraxis zu verändern. Es entspricht der Intention seines Vorgehens, dass Freudenthal seine kritischen Analysen, seine konstruktiven Vorschläge und die Arbeiten seiner Arbeitsgruppe in einer Vielzahl einzelner, kleinerer Schriften publizierte, die immer wieder Facetten seiner zentralen Themen behandelten. Dies entsprach insofern seinen

⁴ Vgl. auch RME 115, 126, 148, 149, 173, 175, 179, 193

⁵ In diesem Buch, das nach seinem Tode erschien, findet sich eine Auflistung aller seiner mathematikdidaktischen Veröffentlichungen in holländischer, deutscher, englischer, polnischer, italienischer und französischer Sprache, hier als RME abgekürzt aufgeführt.

Absichten, als er durch die Publikation in mathematikdidaktischen Zeitschriften, darunter großenteils deutschen⁶, vor allem die Lehrer erreichen wollte. Mathematikdidaktik verstand er dabei nicht in erster Linie als ein theoretisches Bauwerk von eindrucksvoller Breite und Tiefe, im Gegenteil, er verabscheute Beiträge, die sich vor allem den „grand theories“ verschrieben, seine regelmäßig in „Educational Studies in Mathematics“⁷ veröffentlichten, z. T. sarkastischen Rezensionen geben Zeugnis davon. Es war deshalb selbstverständlich, dass er seine Ziele in der Ergänzung seiner theoretischen Arbeit durch Entwicklungsarbeit im konkreten Klassenzimmer realisieren wollte, seine Ideen fanden Niederschlag in Materialien für die Praxis und erhielten somit Feedback von der Praxis durch diejenigen, die in ihr wirkten. Auch hier sind Kooperation und Kollaboration der Wissenschaftler mit der Praxis und in der Praxis wichtigste Arbeitsform: Früh versammelt er um sich herum Forschungsstudenten, Lehrer und Mitarbeiter. Aus dieser informellen Gruppe entstand das holländische Forschungs- und Entwicklungsinstitut für Mathematikdidaktik IOWO, später IOW&OC (1971), später Freudenthal-Institut.

Die Aufgabe des Freudenthal-Instituts war nicht in erster Linie Forschung um der Forschung willen, sondern Forschung für die Produktion von Curriculum-Einheiten. Die Mitarbeiter sollten sich als Ingenieure für die Curriculum-Entwicklung zwischen Forscherrolle und Entwicklerrolle verstehen und in intensivem Austausch mit der Praxis arbeiten. Forschung war eine Voraussetzung für die Entwicklung und manchmal ein Nebenprodukt der Evaluation. Freilich schöpfte die Arbeit des Instituts aus den Arbeiten Freudenthals. Er konzipierte die Strategie des Instituts, in Entsprechung zu seinem mathematikdidaktischen Ansatz. In der Dualität eines profunden Wissens um die mathematische Inhalte, aber ausgehend von der Frage „Wie lernt das Kind?“ nicht: „Wie und was soll

es lernen?“ Analog setzt die konkrete Frage bei der Praxis des Mathematikunterrichts an, an ihrem Beginn stand Unterrichtsbeobachtung, das Einbringen von Ideen, der Dialog mit den Lehrern und Schülern, der Entwurf, die Erprobung, das Experiment, die Verbesserung, die Erweiterung. In einem langjährigen Entwicklungsprozess entstanden Unterrichtsmaterialien und Ideen für die Unterrichtsgestaltung, in die seine Maßstäbe der Unterrichtsnähe und Unterrichtswirksamkeit und zugleich Offenheit für Ergänzungen, Veränderungen und ähnliches von Anfang an eingegangen waren und eine wichtige Rolle spielten. Das typische Produkt ist die Darstellung eines Realitätsbereiches, einer Situation, einer Problemstellung, einer Story, eines Konstruktionsvorhabens usw., in dem sich ein möglichst großer Themenreichtum mit einem Maximum an mathematischen Arbeitsmöglichkeiten verbindet.

Freudenthals spezifischer mathematikdidaktischer Ansatz und sein striktes Insistieren auf der Verbindung von Wissenschaftlichkeit und Praxisorientierung führte zu großen Erfolgen im nationalen Bereich, in den Niederlanden nicht zuletzt deshalb, weil in der langen und kontinuierlichen Arbeit des Projektes immer mehr Lehrer mit den Ideen des Ansatzes vertraut wurden und sie übernahmen. Auch Lehrbuchverlage stellten sich zunehmend auf die neuen Arbeitsweisen und Erwartungen der Lehrer ein, so dass die Arbeitsgruppe IOWO, bzw. das Freudenthal-Institut tatsächlich „schulebildend“ wurde: die vom Freudenthal-Institut geschaffene Konzeption der „Realistic Mathematics“ ist weltweit Vorbild für Innovationen von Mathematikunterricht – von den USA bis nach Japan oder China. Dass allerdings Aufgabenmaterial des Freudenthal-Instituts benutzt wurde, um für PISA Testitems zu konstruieren – niemand würde dies mehr verurteilen als Hans Freudenthal, der einer der ersten und wenigen, harschen Kritiker der IEA-Studien⁸ war, vorgetragen in

6 Er veröffentlichte z. B. regelmäßig in „Mathematikunterricht“, „Didaktik der Mathematik“, „Neue Sammlung“, „Zeitschrift für Pädagogik“, „Die Grundschule“, „Mathematiklehrer“ und „Mathematik lehren“.

7 Z. B. sein Review in ESM 17, 1986, 323–327

8 Vgl. RME 54, 56, 60, 60a, 88 u. a.

9 Vgl. „Lernzielfindung im Mathematikunterricht“ (ZfP, 1974, 5. 719–738), seine erste frühe und sarkastische Abrechnung mit Lernzielformulierungen und Testindustrie: „Man hat zu *behavior* einen Plural, „*behaviors*“, erfunden – „Mätzchen“ könnte man das übersetzen, denn das ist das einzige, an das man sich klammern zu können glaubt: *behaviors*, Mätzchen, die man genau umschreiben und messen kann, statt des „nebelhaften“ globalen Verhaltens ... Aber die Mathematik scheint zur Atomisierung herauszufordern, und so ist sie ihr schutzlos preisgegeben ... es ist ein Tummelplatz für alle, die atomistisch indoktriniert sind.“ (722–723) ... „Es ist schon darauf hingewiesen, dass in dieser Klassifikation (Taxonomie von Testitems, Verf.) so wichtige Phänomene wie Beobachtung, Experiment, Experiment-Entwurf nicht untergebracht werden können. Es ist wohl noch erstaunlicher, dass in der Klassifikation etwas fehlt und auch nicht unterzubringen ist, das man [Fähigkeit, Tests zu bestehen] nennen könnte, d. h. adäquat auf sie zu reagieren – eine komplexe Fähigkeit, bei der man Teilfähigkeiten unterscheiden kann, etwa [Einsichten in Teststrukturen; Fähigkeit, Teststrukturen zu entwirren; Fähigkeit, Beweismaterial zu wägen; Einsicht in die Psychologie der Testproduzenten]. Hat niemals jemand die Verfasser auf diese Lücke hingewiesen?“ (725). Er spricht von der „Bibel der Testgläubigen“ mit Beispielen aus der „Gräuel- und Rumpelkammer“ des Mathematikunterrichts ... Es ist immer dasselbe Lied: Aufgaben, die aus unerfindlichen Gründen und ohne Rücksicht auf die Vorbedingungen irgendwie klassifiziert werden, mit denen man geniale Kreativität oder einfach „Kenntnis“ testen kann, je nach dem, ob der zu Testende den Trick kennt oder nicht. (727)

seiner typischen, erfrischenden und explizit strengen Art und Weise⁹.

Die Verbesserungen und Entwicklungen der Mathematikdidaktik jedoch, die das Freudenthal-Institut hervorbrachte, und zu einem großen Teil nach seinem Tode, sollten nicht unterschätzt werden, was passieren könnte, wenn wir dazu neigen, solche Entwicklungen und Fortschritte als selbstverständlich zu nehmen und vergessen, wie die Situation vorher war. Und wir sind froh, dass die Schätze Freudenthalschen Schreibens bestehen bleiben, nichts in ihnen ist wirklich veraltet, nichts hat seine Faszination verloren, nichts ist mehr geeignet, seine originellen Ideen weiter zu tragen und unsere Auseinandersetzung herauszufordern.

Literaturhinweise

1. IOWO/ Mathematical Institute (eds) (1975) Feestbook 17.9.1975. Prof. Dr. Hans Freudenthal 70 Jaar. Utrecht University: Utrecht. (Dort findet sich eine Auflistung aller mathematischen Veröffentlichungen Hans Freudenthals)
2. Freudenthal, H. (1973) Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd.1 und 2. Klett-Verlag: Stuttgart

3. Freudenthal, H. (1974) Lernzielfindung im Mathematikunterricht. In: Zeitschrift für Pädagogik 20, 5, 719–738
4. Freudenthal, H. (1978) Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. Oldenbourg: München (in Englisch als „Weeding and Sowing“ erschienen)
5. Freudenthal, H. (1991) Revisiting Mathematics Education – China Lectures. Mathematics Education Library MELI1, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht. (Dort finden sich alle mathematikdidaktischen Veröffentlichungen Hans Freudenthals in deutscher, französischer und englischer Sprache verzeichnet, auf die hier mit dem Kürzel RME 1ff. verwiesen wird)
6. Freudenthal, H. (1987) Schrijf dat up, Hans. Knipsels uit een leven. Meulenhof: Amsterdam

Adresse der Autorin

Prof. Dr. Dr. h.c. Christine Keitel
 FB Erziehungswissenschaften und Psychologie
 Freie Universität
 Habelschwerdter Allee 45
 14195 Berlin
 keitel@zedat.fu-berlin.de

Research & Development in Mathematics Education
 Utrecht University, The Netherlands

Utrecht University welcomes students, both from the Netherlands and from abroad, to benefit from the expertise and knowledge available at the Freudenthal Institute by offering a Master's program in Design Research and Realistic Mathematics Education.

Research & Development in Mathematics Education
 The Science Department of Utrecht University offers the Master's Degree 'Science, Communication and Education'. One of the programs is 'Research and Development in Mathematics Education'.

Freudenthal Institute
 The Freudenthal Institute conducts research into aspects of mathematics education and how mathematics is taught. Since 1971, the Freudenthal Institute has developed a theoretical approach towards the learning and teaching of mathematics.

1st period	2nd period	3rd period	4th period	5th period
Research and Development (6 ECTS) Design research in science and mathematics education History of Mathematics (6 ECTS) Research study in Mathematics and Mathematics Education (12 ECTS)	Research methodology (6 ECTS) Methods of scientific research Foundations of Mathematics (6 ECTS) Elementary Number Theory (6 ECTS) Instruction Design (6 ECTS) A course in development of learning materials	Mathematics teaching (6 ECTS) How people learn mathematics and how to teach Statistics (6 ECTS) Research Assignments in Mathematics Education (6 ECTS) Design research teaching material will be developed, tested and modified on the basis of data. Research assignments can be done in the Netherlands, at either the Freudenthal Institute or the Utrecht Center for Science and Mathematics Education, or abroad.	Research study in Mathematics and Mathematics Education (12 ECTS)	Research study in Mathematics and Mathematics Education (12 ECTS)

Overview of the curriculum (N.B. THE MATH COURSES MARKED WITH * ARE EXAMPLES, WHICH CAN BE CHOSEN FROM A MENU LIST)

Master's program
 The Master's program is a two-year course. Half of the program concentrates on education (blue in the table), the other half on subjects from mathematics (yellow).
 A tutor from the Freudenthal Institute will be assigned to students to guide them to the Master's program.
 It is possible to complete the math courses in the first year, and to do the educational component in the second year. Students who already have a Master's degree in Mathematics can take the educational part of the program as a one-year graduate course.

After graduation
 Those who have done the Master's program 'Research and Development in Science Education' are qualified for PhD research. A Master's degree in 'Science Communication and Education' does not necessarily guarantee a PhD position at a Dutch university.

Admission
 For admission to the Master's Program 'Research and Development in Science Education' a Bachelor's degree in Mathematics or Science is required.

Financial assistance

[The Freudenthal Institute - USA]

The Freudenthal Institute conducts research into aspects of math education and how mathematics is taught. Its aims are to understand and improve the teaching of arithmetic and mathematics at all levels, but particularly in kindergarten, primary, secondary and vocational education. The institute is part of Utrecht University in the Netherlands and it was founded in 1971 by the German/Dutch writer, pedagogue and mathematician, Professor Hans Freudenthal (1905-1990).

The Wisconsin Center for Education Research of the University of Wisconsin-Madison, and the Freudenthal Institute have collaborated on several projects over the past 15 years. This ongoing relationship has resulted in the establishment of an international research institute for mathematics education: Freudenthal Institute-USA (FIUS).

The mission of FIUS is to establish a comprehensive network of collaborating researchers and developers.

The activities of FIUS will focus on the implementation of Realistic Mathematics Education, a dynamic theory of learning and teaching mathematics:

- Supporting teacher development of classroom assessment
- Designing comparative achievement studies
- Developing curricula at several levels of detail, from longitudinal teaching and learning trajectories to classroom materials for students and teachers
- Building leadership capacity in school districts through professional communities

Researching and reforming the education of mathematics is a challenging job. It is often necessary to find a balance between the institute's own agenda for research and development, and the demands of society, as represented by the government or science foundations. As a matter of fact, equilibrium is a key issue for FIUS; we strive to find a balance between the macro- and micro-

levels, between what is possible and what is desirable, between development and research, between qualitative and quantitative research, between more fundamental and more practical research, between national and international projects, and between long-term and short-term projects.

We are pleased to present you with this brochure, introducing FIUS. Don't hesitate to e-mail us at FIUS@education.wisc.edu or fius@fu.nl if you would like to discuss any of the aspects mentioned here or if you need further information.

Professor Dr. Jan de Lange
 Chair of Freudenthal Institute
 Director of Freudenthal Institute-USA

David Webb, Ph.D.
 Executive Director

[Realistic Mathematics Education]

The principles that underlie this approach are strongly influenced by Hans Freudenthal's concept of 'mathematics as a human activity'. He felt that students should not be considered as passive recipients of ready-made mathematics, but rather that education should guide the students towards using opportunities to reinvent mathematics by doing it themselves.

Study situations can represent many problems that the students experience as meaningful and these form the key resources for learning; the accompanying mathematics arises by the process of mathematization. Starting with context-linked solutions, the students gradually develop mathematical tools and understanding at a more formal level. Models that emerge from the students' activities, supported by classroom interaction, lead to higher levels of mathematical thinking.

Developmental Research
 The theory of Realistic Mathematics Education is largely the outcome of a cyclical process of developing educational material, classroom appointments, reflection and revision. This is called the 'developmental research' method. One of its main characteristics is the strong and constant interaction between theory and practice. That is, between generating theoretical knowledge and developing practical material, such as instructional sequences, learning environments, longitudinal frameworks, assessment tools and educational software.

Guided reinvention is a core RME principle in developing these materials. This means that we focus on a learning process that is so natural that the students more or less reinvent the mathematics they work with. Knowledge of the history of mathematics may be helpful while educators are developing this learning process.

Developmental research is just one of the methods the Freudenthal Institute uses in its research activities. We believe that 'broad is beautiful': multiple perspectives and a broad range of research designs and methods of analysis should lead to a better understanding of mathematics education.

\$44.00
 Rowl Rowl Rowl

\$30.00
 Rowl Rowl Rowl

Since 1971, the Freudenthal Institute has developed a theoretical approach towards the learning and teaching of mathematics known as 'Realistic Mathematics Education'. RME incorporates views on what mathematics is, how students learn mathematics, and how mathematics should be taught.