Unordnung ist das halbe Leben

von Peter Müller

Zufällige Schrödinger-Operatoren modellieren elektronische Eigenschaften in ungeordneten Materialien, zu denen bestimmte Legierungen, dotierte Halbleiter oder amorphe Substanzen zählen. Der folgende Beitrag gibt einen Überblick über Grundlagen und aktuelle Entwicklungen dieses Teils der Mathematischen Physik im Schnittbereich von Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Geordnete Strukturen mit ihren Symmetrien und der deraus resultierenden Ästhetik haben die Menschen seit jeher fasziniert. Ordnung und Symmetrie sind auch der Schlüssel für unser tiefgreifendes mathematisches Verständnis einer Vielzahl physikalischer Phänomene. Als klassisches Beispiel lassen sich hier die Beugungs- und elektronischen Eigenschaften ideal periodischer Festkörper anführen [AsMe], denen auf mathematischer Seite die Theorie kristallographischer Gruppen [H] und die Bloch-Floquet-Theorie linearer Operatoren [RS] gegenübersteht. Dies ist auch ein schönes Beispiel für die wechselseitige Befruchtung von Physik und Mathematik.

Die moderne Physik kennt aber nicht weniger spektakuläre Phänomene, die in Situationen fernab jeglicher Ordnung und Symmetrie auftreten oder deren Existenz durch das Fehlen von Ordnung gar erst ermöglicht wird. Hierzu zählen die elektronischen Eigenschaften ungeordneter Festkörper [LGP, SE]. Die zugehörigen physikalischen Modellvorstellungen führen in mathematischer Hinsicht auf das Studium zufälliger Schrödinger-Operatoren, ein Forschungsgebiet, das sich sowohl der Stochastik als auch der Funktionalanalysis zuordnen lässt.

Zufällige Schrödinger-Operatoren

Der Prototyp eines mathematischen Modells zur Beschreibung der elektronischen Eigenschaften ungeordneter Festkörper (zu denen bestimmte Legierungen, dotierte Halbleiter und amorphe Materialien zählen) stammt aus dem Jahr 1958 von P. W. Anderson [A]. Anderson begründete damit einen neuen Zweig in der theoretisch-physikalischen Forschung, wofür er zusammen mit N. F. Mott und J. H. van Vleck im Jahr 1977 mit dem Nobel-Preis für Physik ausgezeichnet wurde. Das Anderson-Modell berücksichtigt nur die quantenmechanische Bewegung eines einzelnen (spinlosen) Elektrons in einem zufälligen elektrostatischen Potential V, welches den Einfluss des irregulär strukturierten Festkörperhintergrunds karikiert. Formuliert für den diskreten Konfigurationsraum $\mathbb{K} = \mathbb{Z}^d$ des d-dimensionalen hyperkubischen Gitters, lautet der zufällige Energie- oder Hamilton-Operator des Elektrons

$$H := T + V. \tag{1}$$

Er wirkt auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ der komplexwertigen, quadratsummierbaren Funktionen ψ auf $\mathbb{K} = \mathbb{Z}^d$. Dabei steht der Operator der kinetischen Energie T für den negativen diskreten Laplace-Operator, d. h.

$$(T\psi)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d:\, |x-y|=1} [\psi(x) - \psi(y)] \tag{2}$$

für alle $x \in \mathbb{Z}^d$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$, worin $|x|$ die Euklidische Norm von x bezeichnet. Das Potential V – konkrete Beispiele folgen später – ist im allgemeinen ein zufälliges skalares Feld

$$V:\ \Omega \times \mathbb{K} \to \mathbb{R}, \qquad (\omega, x) \mapsto V_\omega(x), \tag{3}$$

auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Vom zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ fordert man Ergodizität bzgl. (einer Untergruppe) der Translationsgruppe auf $\mathbb{K}$. Dies bedeutet, dass $\mathbb{P}$ translationsinvariant ist und dass translationsinvariante Ereignisse nur mit Wahrscheinlichkeit null oder eins auftreten können. Den Zufallsoperator (1) erklärt man schließlich durch seine Realisierungen $H_\omega = T + V_\omega$, in denen das Potential als Multiplikationsoperator gemäß $(V_\omega\psi)(x) := V_\omega(x)\psi(x)$ agiert.

Angesichts der Tatsache, dass die fundamentale physikalische Gleichung für die Quantendynamik eines Elektrons, die Schrödinger-Gleichung, sich auf den kontinuierlichen Konfigurationsraum $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$ des d-dimensionalen Euklidischen Raumes bezieht und nicht auf das Gitter $\mathbb{Z}^d$, genießen auch entsprechende kontinuierliche Varianten von (1) auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ der komplexwertigen quadratintegrablen Funktionen ψ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$ hohe Popularität. Gegenüber der diskreten Variante ändert sich dabei an obigen Definitionen nur die des kinetischen Energie-Operators T, der dann als negativer kontinuierlicher Laplace-Operator gemäß

$$T\psi = -\sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha^2} \tag{4}$$

die negativen zweiten partiellen Ableitungen aufsummiert. Sowohl die diskrete als auch die kontinuierliche Variante von (1) wird als zufälliger Schrödinger-Operator bezeichnet. Für Details, präzise Voraussetzungen und Ergänzungen zu den folgenden Ausführungen, deren Auswahl natürlich Vorlieben des Autors widerspiegelt, sei generell auf die Lehrbücher und Übersichtsartikel [Ki, CL, PF, Stm, LMW] verwiesen.

Grundlegende Eigenschaften, Fragen und Beispiele

Die Existenz des zufälligen Schrödinger-Operators (1) als dicht definierter, selbstadjungierter, ergodischer Zufallsoperator auf $\mathcal{H}$ ist unter recht allgemeinen Voraussetzungen an das Potential V sichergestellt. Gleiches gilt für die zwei folgenden, sich aus der Ergodizität ergebenden bemerkenswerten Basiseigenschaften, welche die Grundlagen für die Relevanz zufälliger Schrödinger-Operatoren in der Physik liefern.

(B1) Alle Anteile in der Lebesgue-Zerlegung des Spektrums $\operatorname{spec}(H)$ von (1), das reine Punktspektrum $\operatorname{spec}_{\mathrm{pp}}(H)$, das singulär-stetige Spektrum $\operatorname{spec}_{\mathrm{sc}}(H)$ und das absolut-stetige Spektrum $\operatorname{spec}_{\mathrm{ac}}(H)$, sind nicht zufällig. Genauer, zu jedem $\kappa \in \{\mathrm{pp}, \mathrm{sc}, \mathrm{ac}\}$ gibt es eine abgeschlossene Menge $\Sigma_\kappa \subseteq \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{spec}_\kappa(H_\omega) = \Sigma_\kappa$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt. Insbesondere folgt

$$\operatorname{spec}(H_\omega) = \Sigma := \Sigma_{\mathrm{pp}} \cup \Sigma_{\mathrm{sc}} \cup \Sigma_{\mathrm{ac}}$$

für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$.

(B2) Für $E \in \mathbb{R}$ existiert der fast-sichere Limes

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\text{Anzahl der Eigenwerte} \leqslant E \text{ von } H_\omega^L}{L^d} =: N(E) \tag{5}$$

und ist nicht zufällig. Dabei steht H_ω^L für eine selbstadjungierte Restriktion von H_ω auf einen Würfel in $\mathbb{K}$ mit der Kantenlänge $L > 0$. Die Menge der Wachstumspunkte der als *integrierte Zustandsdichte* bezeichneten Abbildung $\mathbb{R} \ni E \mapsto N(E)$ ist das fast-sichere Spektrum Σ von H.

Hierzu zwei Bemerkungen: (i) Unter dem reinen Punktspektrum $\operatorname{spec}_{\mathrm{pp}}(H_\omega)$ wird in (B1) der Abschluss der Menge der Eigenwerte von H_ω verstanden. Dies ist wesentlich, denn die Menge der Eigenwerte selbst, welche typischerweise dicht in Teilen der reellen Achse liegt, fluktuiert wild als Funktion von ω, insbesondere gilt $\mathbb{P}(E$ ist ein Eigenwert endlicher Multiplizität von $H) = 0$ für jedes beliebig gegebene $E \in \mathbb{R}$.

(ii) Die integrierte Zustandsdichte N ist die Verteilungsfunktion eines Borel-Maßes $\mathcal{N}$ auf $\mathbb{R}$ mit Träger Σ. Für eine Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ misst $\mathcal{N}(B)$ die Volumendichte der Spektralwerte von H in B. Das sogenannte Zustandsdichtemaß $\mathcal{N}$ läßt sich gut aus physikalischen Experimenten bestimmen, z. B. mit Hilfe von Licht-Absorptionsmessungen.

Zu den wichtigen und interessanten Fragestellungen der Theorie zufälliger Schrödinger-Operatoren – gelöst wie auch offen – zählen:

F1 Regularitätseigenschaften der integrierten Zustandsdichte N,
F2 Lifschitz-Ausläufer von N,
F3 Anderson-Lokalisierung und Delokalisierung,
F4 Berechnung elektrischer Leitfähigkeiten.

Um entsprechend detaillierte Aussagen treffen zu können, ist es erforderlich, das Zufallspotential V genauer zu spezifizieren. Die am häufigsten studierten Potentiale werden durch die folgenden Beispiele repräsentiert.

(A) *Anderson-Potential* ($\mathbb{K} = \mathbb{Z}^d$):
$V_\omega(x) = \xi_x^{(\omega)}$, wobei $\{\xi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ eine Familie unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen $\Omega \to \mathbb{R}$ ist mit einer bzgl. des Lebesgue-Maßes absolutstetigen Einzelplatz-Verteilung $\mu := \mathbb{P}(\xi_x \in \cdot)$. Das Spektrum von H ergibt sich in diesem Fall zu $\Sigma = [0, 4d] + \operatorname{supp}(\mu)$, das heißt aus der punktweisen Addition aller möglicher Kombinationen von Spektralwerten der kinetischen Energie T und denen der potentiellen Energie. Letztere sind durch den Träger der Einzelplatz-Verteilung bestimmt.

(L) *Legierungs-Potential* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$):
$V_\omega(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \xi_y^{(\omega)} u(x-y)$ mit Zufallsvariablen wie in (A) und einem nicht-negativen, beschränkten Einzelplatz-Potential $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ mit kompaktem Träger. Analog zu (A) gilt $\Sigma = [\inf \operatorname{supp}(\mu), \infty[$.

(P) *Poisson-Potential* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$):
$V_\omega(x) = \sum_\alpha u\big(x - X_\alpha^{(\omega)}\big)$, wobei u wie in (L) ist und $\{X_\alpha^{(\omega)}\}_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ die Punktmenge der Realisierung ω eines Poisson-Prozesses im $\mathbb{R}^d$. Es gilt $\Sigma = [0, \infty[$.

(G) *Gauß-Potential* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$):
V ist ein homogenes Gaußsches Zufallsfeld mit Mittelwert $\mathbb{E}[V(x)] = 0$ und Kovarianz $\mathbb{E}[V(x)V(y)] =: C(x-y)$, wobei $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ beschränkt ist und im Unendlichen hinreichend schnell abfällt. Es gilt $\Sigma = \mathbb{R}$.

Die Zufallspotentiale (P) und (G) genießen unter den Kontinuumsmodellen hohe Popularität in der physikalischen Literatur. So gilt das Poisson-Potential (P) als das Paradebeispiel eines Zufallspotentials zur Modellierung von Systemen mit *struktureller Unordnung*, zu denen man auch viele amorphe Materialien zählt. Die räumlichen Irregularitäten im Auftreten der Störstellen werden hierbei durch den Poisson-Prozess $\{X_\alpha\}_\alpha$ modelliert. Neben struktureller Unordnung kennt man noch *konstitutionelle Unordnung.* Darunter versteht man, dass ein Bruchteil der auf einem regelmäßigen Gitter sitzenden Festkörperatome zufällig ausgewählt und durch Atome einer anderen

Sorte ersetzt wird. Zufällige binäre Legierungen fallen hierunter, wie auch eine Reihe dotierter Halbleiter. Das Legierungspotential (L) nimmt hieraus seine Motivation. Angesichts dessen wäre es allerdings natürlicher anstelle einer absolut-stetigen Einzelplatz-Verteilung μ eine Bernoulli-Verteilung zu wählen, mit Hilfe derer man zwischen den beiden Atomsorten unterscheidet. Letztere führt aber in technischer Hinsicht auf große Probleme. Das Gauß-Potential (G) wird in der Physik zur Modellierung von sowohl strukturell als auch konstitutionell ungeordneten Systemen sehr häufig eingesetzt – nicht nur für stark ungeordnete Systeme, wo es aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes als besonders natürlich erscheint. Im Gegensatz zu den genuinen Kontinuumspotentialen (P) und (G) bringt die Gitterstruktur des Legierungspotentials (L) eine Reihe technischer Vereinfachungen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$ mit sich.

Im Folgenden werden die oben aufgeworfenen Fragen F1 bis F4 der Reihe nach angesprochen.

F1 Regularitätseigenschaften der integrierten Zustandsdichte

Diese eher technisch anmutende Fragestellung ist vor allem deshalb von Interesse, da in der physikalischen Literatur die integrierte Zustandsdichte N zumeist als absolut-stetig angenommen wird. In der Tat ist es ihre Lebesgue-Ableitung $\mathrm{d}N/\mathrm{d}E$, die *Zustandsdichte*, welche man dort üblicherweise aus Experimenten extrahiert oder theoretisch zu bestimmen versucht [SE]. Auf mathematischer Seite ist hierzu folgendes bekannt: Sowohl im eindimensionalen kontinuierlichen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als auch im allgemeinen diskreten Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Z}^d$ ist N ohne zusätzliche Voraussetzungen an das zufällige Potential V stetig, und, falls der Erwartungswert $\mathbb{E}\{\log(1 + |V(0)|)\} < \infty$ endlich ist, sogar lokal log-Hölder stetig, d. h. zu jedem $E_0 \in \mathbb{R}$ gibt es eine endliche Konstante $C_{E_0} > 0$, so dass $|N(E) - N(E')| \leqslant C_{E_0} \big|\log|E - E'|\big|^{-1}$, wann immer $E \in]-\infty, E_0]$ und $|E - E'| < 1$ [CL, PF]. Eine entsprechend allgemeingültige Regularitätseigenschaft im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, die beispielsweise nur die Existenz genügend hoher Momente von V voraussetzt, ist trotz jahrzehntelanger Bemühungen bislang nicht etabliert und gilt als bedeutendes offenes Problem [Si1].

Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn man Hölder- oder sogar Absolut-Stetigkeit gewisser Randverteilungen von $\mathbb{P}$ voraussetzen darf, wie es z.B. in (A) und (L) für die Einzelplatz-Verteilung μ gefordert oder in (G) für die Verteilung von $V(0)$ der Fall ist. Denn mit Hilfe sogenannter *Wegner-Abschätzungen* lässt sich diese Eigenschaft dann auf die integrierte Zustandsdichte übertragen – eine Rechtfertigung für die oben erwähnte Verwendung der Zustandsdichte $\mathrm{d}N/\mathrm{d}E$ in der Physik.

Nicht nur stellen Wegner-Abschätzungen bisher das einzige Werkzeug zum Nachweis von Regularitätseigenschaften von N im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$ für $d \geqslant 2$ dar, sie gehen auch als zentraler Bestandteil in die unter F3 anzusprechenden Lokalisierungsbeweise ein.

F2 Lifschitz-Ausläufer

Für alle der aufgeführten Beispielpotentiale ist der untere Rand des Spektrums Σ von H ein sogenannter Fluktuationsrand. Darunter versteht man, dass ein knapp über $\inf \Sigma$ liegender Spektralwert nur dann existieren kann, wenn Realisierungen des Zufallspotentials V vorkommen, die ganz spezielle, höchst unwahrscheinliche Eigenschaften haben. So kann beispielsweise ein knapp über 0 liegender Spektralwert im Fall (P) nur dann realisiert werden, wenn ein sehr großes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ vorliegt, in dem das Potential verschwindet, in das also kein einziger Poisson-Punkt hineinfällt. Der russische Physiker I. M. Lifschitz begann in den 1960er Jahren Spektraleigenschaften zufälliger Schrödinger-Operatoren in der Nähe von Fluktuationsrändern zu studieren. Die Asymptotik der integrierten Zustandsdichte N an Fluktuationsrändern wird deswegen als *Lifschitz-Ausläufer* bezeichnet. Auf mathematischer Seite erfordert die Berechnung von Lifschitz-Ausläufern Methoden aus der Theorie großer Abweichungen für stochastische Prozesse. Damit konnte für den Fall (P) die „Quantenasymptotik“

$$\lim_{E \downarrow 0} \frac{\log[-\log N(E)]}{-\log E} = \frac{d}{2} \tag{6}$$

und im Fall (G) das Verhalten

$$\lim_{E \to -\infty} \frac{-\log N(E)}{E^2} = \frac{1}{2C(0)} \tag{7}$$

bewiesen werden, siehe [LMW] für eine zusammenfassende Darstellung. Ersetzt man $N(E)$ durch $N(E + m)$ in (6), wobei $m := \inf \operatorname{supp}(\mu)$, so gilt das Resultat auch in den Fällen (A) und (L), falls die Einzelplatz-Verteilung $\mu([m, m + v])$ für $v \downarrow 0$ nicht schneller als algebraisch verschwindet.

Nicht nur spielten Lifschitz-Ausläufer eine wichtige historische Rolle in der mathematischen und physikalischen Entwicklung der Theorie zufälliger Schrödinger-Operatoren, ihr Auftreten ist auch ein Indiz für Anderson-Lokalisierung im entsprechenden Teil des Spektrums.

F3 Anderson-Lokalisierung und Delokalisierung

Für die wichtige Frage, ob der zufällige Schrödinger-Operator (1) ein elektrisch leitendes oder isolierendes

Material beschreibt, sind die Eigenschaften des durch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial\psi_t}{\partial t} = H\psi_t \tag{8}$$

gegebenen quantendynamischen Anfangswertproblems entscheidend. Breitet sich eine zur Anfangszeit t_0 auf ein Kompaktum in $\mathbb{K}$ konzentrierte Funktion $\psi_{t_0} = \varphi \in \mathcal{H}$ im Lauf der Zeit $t > t_0$ derart über den ganzen Konfigurationsraum $\mathbb{K}$ aus, dass ihre Momente $M_{n,I,\varphi}(t) := \| \, |x|^{n/2}\chi_I(H)\psi_t\|^2$ für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ und für $t \to \infty$ nach Erwartungswertbildung wie $\mathbb{E}\,[M_{n,I,\varphi}(t)] \sim t^{n\beta}$ mit einem von n unabhängigen Transportexponenten $\beta > 0$ divergieren, so spricht man von *dynamischer Delokalisierung* im Energieintervall $I \subseteq \Sigma$, siehe [GK2] für Details. Dabei bezeichnet $\chi_I(H)$ den Spektralprojektor von H bzgl. I und $\|\cdot\|$ ist die Norm im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Der maximal mögliche Wert $\beta = 1$ des Transportexponenten wird zum Beispiel von der ballistischen Dynamik des freien Teilchens mit dem Schrödinger-Operator $H = T$ realisiert. Gilt dagegen $\mathbb{E}\,[\sup_{t>0} M_{n,I,\varphi}(t)] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit kompaktem Träger, so spricht man von (starker) *dynamischer Lokalisierung* im Energieintervall $I \subseteq \Sigma$. Dies bedeutet, dass ψ_t für alle Zeiten im wesentlichen auf einen endlichen Raumbereich in $\mathbb{K}$ konzentriert bleibt. So eine Situation liegt beispielsweise auch im Fall der gebundenen Zustände des Wasserstoff-Atoms vor: ein Elektron, das anfänglich an das Proton gebunden ist, bleibt für alle Zeiten um den Ort des Protons lokalisiert.

Dynamische Lokalisierung in I impliziert *spektrale Lokalisierung* in I [GK2]. Darunter versteht man, dass H in I mit Wahrscheinlichkeit eins nur reines Punktspektrum hat $\Sigma \cap I = \Sigma_{\mathrm{pp}} \cap I = I$ (mit exponentiell abfallenden Eigenfunktionen). Umgekehrt spricht man von *spektraler Delokalisierung* in I, falls $\Sigma \cap I = \Sigma_{\mathrm{ac}} \cap I = I$. Spektrale Lokalisierung impliziert im allgemeinen nicht dynamische Lokalisierung, jedoch liefern die Lokalisierungsbeweise, von denen im nächsten Absatz die Rede sein wird, meist beides. In dem Zusammenhang sei noch bemerkt, dass die integrierte Zustandsdichte N kein Instrument zur Unterscheidung verschiedener Spektraltypen darstellt, da das Punktspektrum von H, wie bereits angesprochen, dicht ist.

In einer Raumdimension, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, zeigen Transfermatrix-Methoden, dass bereits schwache Unordnung typischerweise zu Lokalisierung des ganzen Spektrums $\Sigma = \Sigma_{\mathrm{pp}}$ führt – so auch in den Beispielen (A), (L) und (P) [CL, PF, Stz]. Ganz anders ist die Situation in höheren Raumdimensionen $d \geqslant 2$, wo man Lokalisierung nur in der Nähe von Fluktuationsrändern des Spektrums erwartet, und nur genügend starke Unordnung in der Lage sein sollte, sie auch in anderen Teilen des Spektrums hervorzurufen. Bisher stehen zwei Techniken zur Auswahl, derer sich alle mathematischen Lokalisierungsbeweise derartiger Aussagen für $d \geqslant 2$ bedienen. (1) Die von J. Fröhlich und T. Spencer 1983 eingeführte und später vereinfachte *Multiskalenanalyse* ist eine sehr aufwändige Induktionsstrategie, um die Resolvente von H zu kontrollieren. Es handelt sich dabei um eine probabilistische Implementierung von KAM-Methoden, kombiniert mit Techniken aus der Perkolationstheorie. Die Technik und das Verständnis der Multiskalenanalyse sind jüngst von J. Bourgain, ausgezeichnet im Jahr 1994 mit der Fields-Medaille, und C. E. Kenig [BK] deutlich vorangetrieben worden. (2) Die für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}^d$ entwickelte, wesentlich einfachere Alternative stammt von M. Aizenman und S. Molchanov aus dem Jahr 1993 und arbeitet mit fraktionellen Momenten der Resolvente. Ihre erst kürzlich auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$ erfolgte Übertragung für das Beispiel (L) hat leider viel von der ursprünglichen Einfachheit eingebüßt. Die Durchführung der Multiskalenanalyse für die Modelle (A) und (L) ist seit Jahren wohletabliert [CL, PF, Stm, GK1]. Der für das Modell (G) bekannte Beweis erfordert demgegenüber einige Abwandlungen und ist jüngeren Datums [FLM, U]. Dagegen galt der Fall (P) bis vor einigen Monaten als offene Herausforderung. Der nun vorliegende Beweis [GHK] verwendet zahlreiche neue Ideen, die in [BK] für einen ebenso lange erwarteten Lokalisierungsbeweis für das Anderson-Bernoulli-Modell in $d \geqslant 2$ entwickelt wurden. Bei letzterem handelt es sich um eine Variante von (L) mit einer Bernoulli-Verteilung für das Einzelplatz-Potential μ.

Der Fall $d = 2$ ist spezieller Natur. Hier wird die Möglichkeit diskutiert, dass schwache Unordnung, wie in einer Dimension, bereits zu Lokalisierung im ganzen Spektrum führen könnte, wenn auch möglicherweise nur mit algebraisch abfallenden Eigenfunktionen. Es gibt bis heute keinerlei Sätze, die diese Aussage befürworten oder ihr widersprechen. Die wohl bedeutendste offene Frage betrifft jedoch den Nachweis spektraler oder dynamischer Delokalisierung für ergodische zufällige Schrödinger-Opertoren in $d \geqslant 3$, deren Existenz seit Anderson [A] nicht angezweifelt wird. Bislang wurde spektrale Delokalisierung lediglich für ein Anderson-Modell auf Cayley-Bäumen gezeigt [Kl, ASW]. Für das zufällige Landau-Modell, d. h. das eines Elektrons im Konfigurationsraum $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2$ unter dem Einfluss eines räumlich konstanten Magnetfelds und dem Zufallspotential (L), wird in [GKS] dynamische Delokalisierung in der Nähe der Landau-Niveaus nachgewiesen, was ein erstes Resultat dieser Art darstellt.

F4 Leitfähigkeiten

Zu Beginn des letzten Punktes wurde bereits angedeutet, dass Lokalisierung bzw. Delokalisierung sich in isolierenden bzw. leitenden elektrischen Eigenschaften des Systems widerspiegeln sollte. Die direkte Messgröße hierfür ist die elektrische (Wechselstrom-) Leitfähigkeit $\sigma(\nu)$. Sie gibt an, wie sich die mittlere Geschwindigkeit eines Elektrons, und somit der elektrische Strom, ändert, wenn man das System einem elektrischen Wechselfeld der Frequenz $\nu \in \mathbb{R}$ aussetzt. Selbstverständlich sollte – im Gegensatz zu einem Metall – ein elektrischer Isolator dadurch gekennzeichnet sein, dass seine Gleichstrom-Leitfähigkeit $\sigma(0)$ am absoluten Temperaturnullpunkt $T = 0$ verschwindet. Dass dem für Energien im Bereich dynamischer Lokalisierung so ist, haben [N, BGKS] bewiesen – nebst Wohldefiniertheit von $\sigma(0)$, versteht sich. Dieses Ergebnis bestätigt auf mathematisch rigorose Weise, dass das Konzept der (dynamischen) Lokalisierung physikalisch sinnvoll ist.

Der Physiker und Nobelpreisträger N. F. Mott hatte vor mehr als 35 Jahren Gleiches im Sinn, als er mit einer stark heuristisch geprägten Argumentation zeigte, dass $\sigma(\nu)$ im lokalisierten Bereich und bei $T = 0$ im Limes $\nu \downarrow 0$ wie $\nu^2\bigl(\log \frac{1}{\nu}\bigr)^{d+1}$ verschwindet. Von dieser, heute unter dem Namen *Mott-Formel* bekannten Asymptotik glaubt man in der Physik, dass sie das generische Verhalten der Leitfähigkeit im lokalisierten Energiebereich eines ungeordneten Festkörpers bei $T = 0$ widergibt. Eine mathematisch rigorose Definition von $\sigma(\nu)$ steht heute noch aus. Jüngst konnte aber gezeigt werden [KLM], dass Integrale der Leitfähigkeit $\int_B \mathrm{d}\nu\ \sigma(\nu)$ über Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}$ als Werte $\mathcal{S}(B)$ eines wohldefinierten Borel-Maßes $\mathcal{S}$ interpretiert werden können. Im Rahmen des Modells (A) gehorcht dieses *Leitfähigkeitsmaß* $\mathcal{S}$ außerdem der Abschätzung

$$\frac{1}{\nu}\,\mathcal{S}([0,\nu]) \leqslant \text{const.}\,\nu^2\Bigl(\log\frac{1}{\nu}\Bigr)^{d+2}, \qquad (9)$$

für genügend kleine Frequenzen $\nu > 0$ [KLM]. Die obere Schranke (9) kommt bis auf eine Potenz des Logarithmus an die berühmte Mott-Formel heran.

Schlusswort: Von Bienen und Blüten

Die eingangs erwähnte wechselseitige Befruchtung zwischen Physik und Mathematik und die dabei ausgeübte Rolle der Mathematischen Physik wirft die Frage auf, wie sich die Beschäftigung mit zufälligen Schrödinger-Operatoren über das unmittelbare Gebiet hinaus auf die Funktionalanalysis und die Stochastik ausgewirkt hat. Hierzu drei Beispiele in zunehmender Allgemeinheit und Bedeutung:

(i) Motiviert durch zufällige Schrödinger-Operatoren mit einem Gaußschen Potential (G), wird in [Si2, BLM] eine Feynman-Kac-Formel für eine (in einem gewissen Sinne) maximale Klasse nach unten unbeschränkter Schrödinger-Operatoren bewiesen, die zur Charakterisierung allgemeiner *unbeschränkter* Schrödinger-Halbgruppen dient.

(ii) Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen spektralen und dynamischen (De-) Lokalisierungskriterien führten zu einem vertieften Verständnis zwischen Regularitätseigenschaften von Spektralmaßen selbstadjungierter Operatoren und quantendynamischen Transportgrößen, siehe z.B. die Übersichtsdarstellung [G].

(iii) Als letztes und wohl immmer noch bedeutsamstes Beispiel sei angeführt, dass die grundlegende Arbeit von M. D. Donsker und S. R. S. Varadhan zur Asymptotik des „Wiener Würstchens“ [DV] durch das Problem der Lifschitz-Ausläufer motiviert worden war.

Danksagung. Mein herzlicher und aufrichtiger Dank gilt Hajo Leschke und Annette Zippelius, die meinen bisherigen wissenschaftlichen Weg allzeit fördernd begleitet haben. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für finanzielle Unterstützung gedankt.

Literatur

[ASW] M. Aizenman, R. Sims und S. Warzel, Stability of the absolutely continuous spectrum of random Schrödinger operators on tree graphs. Vorabdruck math-ph/0502006.

[A] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492–1505 (1958).

[AsMe] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Solid state physics.* Saunders, Philadelphia, 1976.

[BGKS] J.-M Bouclet, F. Germinet, A. Klein und J. H. Schenker, Linear response theory for magnetic Schrödinger operators in disordered media. Vorabdruck math-ph/0408028, erscheint in *J. Funct. Anal.*

[BK] J. Bourgain und C. E. Kenig, On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. Erscheint in *Inventiones Math.*

[BLM] K. Broderix, H. Leschke und P. Müller, Continuous integral kernels for unbounded Schrödinger semigroups and their spectral projections. *J. Funct. Anal.* **212**, 287–323 (2004).

[CL] R. Carmona und J. Lacroix, *Spectral theory of random Schrödinger operators.* Birkhäuser, Boston, 1990.

[DV] M. D. Donsker und S. R. S. Varadhan, Asymptotics of the Wiener sausage. *Commun. Pure Appl. Math.* **28**, 525–565 (1975). Errata: *ibid.*, 677–678.

[FLM] W. Fischer, H. Leschke und P. Müller, Spectral localization by Gaussian random potentials in multi-dimensional continuous space. *J. Stat. Phys.* **101**, 935–985 (2000).

[G] F. Germinet, Quantum dynamics and generalized fractal dimensions: an introduction. In *Seminaire: Équations aux Dérivées Partielles, 2002–2003.* Exp. No. XVIII, 14. École Polytech., Palaiseau, 2003.

[GHK] F. Germinet, P. Hislop und A. Klein, On localization for the Schrödinger operators with a Poisson random potential. Vorabdruck math-ph/0506012.

[GK1] F. Germinet und A. Klein, Bootstrap multiscale analysis and localization in random media. *Commun. Math. Phys.* **222**, 415–448 (2001).

[GK2] F. Germinet und A. Klein, A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition. *Duke Math. J.* **124**, 309–350 (2004).

[GKS] F. Germinet, A. Klein und J. H. Schenker, Dynamical delocalization in random Landau Hamiltonians. Vorabdruck math-ph/0412070, erscheint in *Ann. Math.*

[H] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Ki] W. Kirsch, Random Schrödinger operators: a course. In H. Holden und A. Jensen (Hrsgb.), *Schrödinger operators*. Lecture Notes in Physics, vol. 345. Springer, Berlin, 1989, S. 264–370.

[Kl] A. Klein, Extended states in the Anderson model on the Bethe lattice. *Adv. Math.* **133**, 163–184 (1998).

[KLM] A. Klein, O. Lenoble und P. Müller, On Mott's formula for the ac-conductivity in the Anderson model. Vorabdruck, math-ph/0508007.

[LMW] H. Leschke, P. Müller und S. Warzel, A survey of rigorous results on random Schrödinger operators for amorphous solids. *Markov Process. Relat. Fields* **9**, 729–760 (2003). Eine aktualisierte Version ist erschienen in J.-D. Deuschel und A. Greven (Hrsgb.), *Interacting stochastic systems*. Springer, Berlin, 2005, S. 119–151.

[LGP] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul und L. A. Pastur, *Introduction to the theory of disordered systems*. Wiley, New York, 1988 [Russisches Original: Nauka, Moskau, 1982].

[M] N. F. Mott, Conduction in non-crystalline systems. I. Localized electronic states in disordered systems. *Phil. Mag.* **17**, 1259–1268 (1968).

[N] F. Nakano, Absence of transport in Anderson localization. *Rev. Math. Phys.* **14**, 375–407 (2002).

[PF] L. Pastur und A. Figotin, *Spectra of random and almost-periodic operators*. Springer, Berlin, 1992.

[RS] M. Reed und B. Simon, *Methods of modern mathematical physics IV: Analysis of operators*. Academic, New York, 1978.

[Si1] B. Simon, Schrödinger operators in the twenty-first century. In A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble und B. Zegarlinski (Hrsgb.), *Mathematicl Physics 2000*. Imperial College Press, London, 2000, S. 283–288.

[Si2] B. Simon, A Feynman-Kac formula for unbounded semigroups. *Canadian Math. Soc. Conf. Proc.* **28**, 317–321 (2000).

[SE] B. I. Shklovskii und A. L. Efros, *Electronic properties of doped semiconductors*. Springer, Berlin, 1984 [Russisches Original: Nauka, Moskau, 1979].

[Stm] P. Stollmann, *Caught by disorder: bound states in random media*. Birkhäuser, Boston, 2001.

[Stz] G. Stolz, Localization for random Schrödinger operators with Poisson potential. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* **63**, 297–314 (1995).

[U] N. Ueki, Wegner estimates and localization for Gaussian random potentials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40**, 29–90 (2004).

Adresse des Autors
Priv.-Doz. Dr. Peter Müller
Department of Mathematics
University of California, Irvine
CA 92697-3875
USA
`peter.mueller@physik.uni-goettingen.de`

Der Autor studierte Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg und am Imperial College in London, die Promotion erfolgte 1996 in Erlangen. Nach der Habilitation in Physik 2002 an der Universität Göttingen, wo er seitdem als Privatdozent tätig ist, nutzte er längerfristige Beurlaubungen, um zunächst am Institut für Mathematik der Universität Bochum zu arbeiten. Seit knapp einem Jahr forscht er am Department of Mathematics der University of California in Irvine. Abseits seiner wissenschaftlichen Interessen ist der Autor diversen Formen von Unordnung eher weniger zugeneigt.

Peter Müller ist Sektionspreisträger der Sektion „Mathematische Physik" auf der DMV-Jahrestagung 2004. Dieser Artikel ist Teil der Serie von Preisträger-Arbeiten.