Lie Algebren und automorphe Formen

von Nils R. Scheithauer

Wir beschreiben in diesem Artikel Beziehungen zwischen unendlich-dimensionalen Lie Algebren und automorphen Formen.

Sei $M_n(\mathbb{C})$ die Algebra der komplexen $n\times n$-Matrizen. Wir können auf $M_n(\mathbb{C})$ ein neues Produkt $[a,b] = ab - ba$ einführen. Dieses Produkt ist antisymmetrisch, d. h.

$$[a,b] = -[b,a]\,,$$

und erfüllt die Jacobi Identität

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0\,.$$

Eine Algebra mit einem solchen Produkt wird als Lie Algebra bezeichnet. Es hat sich herausgestellt, daß enge Beziehungen zwischen gewissen unendlich-dimensionalen Lie Algebren und automorphen Formen bestehen. Dies sind meromorphe Funktionen, die einfache Transformationseigenschaften unter geeigneten Gruppen aufweisen. In diesem Artikel stellen wir drei Beispiele für den Zusammenhang zwischen Lie Algebren und automorphen Formen vor. Wir skizzieren Borcherds' Beweis der *moonshine conjecture*. Danach formulieren wir eine analoge Vermutung für Conways Gruppe Co_0. Im letzten Abschnitt beschreiben wir Klassifikationsresultate für unendlich-dimensionale Lie Algebren.

Lie Algebren

Die Theorie der Lie Gruppen und Lie Algebren wurde 1873 von Sophus Lie begründet. Eine Lie Gruppe ist eine Gruppe mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so daß die Multiplikation und Inversenbildung differenzierbar sind. Beispiele für Lie Gruppen sind die Sphären $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ und $S^3 = \{x \in \mathbb{H} \,|\, |x| = 1\}$ und die Matrixgruppen $GL_n(\mathbb{R})$ und $GL_n(\mathbb{C})$. Viele der geometrischen Eigenschaften einer Lie Gruppe lassen sich mit Hilfe ihrer Lie Algebra beschreiben. Die Lie Algebra einer Lie Gruppe ist der Tangentialraum an die Identität. Die Gruppenstruktur induziert ein Produkt auf dem Tangentialraum, welches antisymmetrisch ist und der Jacobi Identität genügt. Dies ist der Ausgangspunkt für die abstrakte Definition einer Lie Algebra. Eine Lie Algebra ist ein Vektorraum mit einem antisymmetrischen Produkt, welches die Jacobi Identität erfüllt.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden die endlich-dimensionalen einfachen Lie Algebren über den komplexen Zahlen von Killing und Cartan klassifiziert. Es gibt vier unendliche Familien, die sogenannten klassischen Lie Algebren $A_n = sl_{n+1}(\mathbb{C})$, $B_n = so_{2n+1}(\mathbb{C})$, $C_n = sp_{2n}(\mathbb{C})$ und $D_n = so_{2n}(\mathbb{C})$, sowie fünf exzeptionelle Lie Algebren G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8. Eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung einer endlich-dimensionalen einfachen Lie Algebra zerfällt in Gewichtsräume. Die Darstellung ist dabei durch das höchste auftretende Gewicht festgelegt. Der Charakter der Darstellung ist eine Reihe, deren Koeffizienten durch die Dimensionen der Gewichtsräume gegeben sind. Die Weylsche Charakterformel beschreibt den Charakter als Quotienten einer Summe über die Weyl Gruppe und eines Produktes über positive Wurzeln. Angewendet auf die triviale Darstellung erhält man die Nenneridentität, welche im folgenden eine wichtige Rolle spielen wird. Äußere Automorphismen liefern getwistete Nenneridentitäten. Einer endlich-dimensionalen einfachen Lie Algebra ist eine Matrix, die sogenannte Cartan Matrix, zugeordnet. Die Diagonalelemente und die Hauptminoren dieser Matrix sind positiv. Nach einem Resultat von Serre kann man die Lie Algebra eindeutig aus der Cartan Matrix rekonstruieren. Dabei teilt man aus einer freien Lie Algebra gewisse Relationen aus, die durch die Matrix gegeben sind.

Die Serre Konstruktion läßt sich auch auf Matrizen anwenden, deren Hauptminoren nicht notwendig positiv sind. Auf diese Weise erhält man Kac-Moody Algebren [K]. Diese Lie Algebren sind i.a. unendlich-dimensional, ihre Theorie ist der endlich-dimensionalen aber in vielen Aspekten sehr ähnlich. Insbesondere gibt es eine Charakterformel für irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen und eine Nenneridentität. Kac-Moody Algebren lassen sich nur noch unter gewissen Annahmen an die Cartan Matrizen klassifizieren. Setzt man beispielsweise voraus, daß die Determinante der Cartan Matrix verschwindet und die echten Hauptminoren positiv sind, so erhält man die Klasse der affinen Kac-Moody Algebren. Sie können als Tensorprodukte der endlich-dimensionalen einfachen Lie Algebren mit Laurent Polynomen geschrieben werden. Die Nenneridentitäten der affinen Kac-Moody Algebren liefern Reihenentwicklungen unendlicher Produkte. Beispielsweise ist die Nenneridentität der Affinisierung von $sl_2(\mathbb{C})$

$$\prod_{n>0}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2} z^n$$

Jacobis Tripelproduktformel. Die Reihe auf der rechten Seite ist eine Jacobische Thetafunktion. Die Nenneridentitäten der affinen Kac-Moody Algebren transformieren auf einfache Weise unter geeigneten Jacobi Gruppen, d. h. sind Jacobi Formen [K, B2].

Borcherds hat herausgefunden, daß die Bedingungen an die Cartan Matrix weiter abgeschwächt werden können. Wendet man die Serre Konstruktion auf Matrizen an, deren Diagonalelemente nicht notwendig positiv sind, so erhält man verallgemeinerte Kac-Moody Algebren. Die Theorie dieser Lie Algebren ist der endlich-dimensionalen Theorie weiterhin sehr ähnlich. Insbesondere gilt wieder eine Nenneridentität. Wir werden sehen, daß diese in einigen Fällen automorphe Formen für orthogonale Gruppen sind. Natürliche Realisierungen finden die verallgemeinerten Kac-Moody Algebren in der Physik. Einige dieser Lie Algebren beschreiben bosonische Strings, die sich auf geeigneten Raumzeiten bewegen.

Automorphe Formen

Die Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene

$$H = \{\, \tau \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(\tau) > 0 \,\}$$

durch gebrochen lineare Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,.$$

Eine meromorphe Funktion f auf der oberen Halbebene heißt Modulfunktion vom Gewicht k, wobei k eine ganze Zahl ist, wenn

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ und f meromorph in der Spitze $i\infty$ ist. Die Funktion f wird als Modulform bezeichnet, wenn f zusätzlich holomorph auf H und in der Spitze $i\infty$ ist. Zum Beispiel ist für eine gerade Zahl $k \geq 4$ die Eisenstein Reihe

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

eine Modulform vom Gewicht k. Das Transformationsverhalten unter der Modulgruppe folgt hier leicht durch eine Umordnung der Summe. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung des Kotangens zeigt man, daß die Fourier Entwicklung der Eisenstein Reihe gegeben ist durch

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

mit $q = e^{2\pi i \tau}$ und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} j(\tau) &= 1728\, \frac{E_4(\tau)^3}{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2} \\ &= q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \ldots \end{aligned}$$

ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0.

Die Definition der Modulform läßt sich auf verschiedene Arten verallgemeinern. Jacobi Formen sind holomorphe Funktionen auf $H \times \mathbb{C}$, die auf geeignete Weise unter der Jacobi Gruppe $SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ transformieren. Ein Beispiel ist die oben angegebene Jacobische Thetafunktion. Im allgemeinen sind die Nenneridentitaeten der affinen Kac-Moody Algebren automorphe Formen fuer hoeherdimensionale Verallgemeinerungen der Jacobi Gruppe. Für die Theorie der verallgemeinerten Kac-Moody Algebren sind automorphe Formen zu orthogonalen Gruppen von Bedeutung. Dies sind meromorphe Funktionen auf Grassmann Mannigfaltigkeiten, die auf einfache Weise unter diskreten Untergruppen der orthogonalen Gruppen $O_{n,2}(\mathbb{R})$ transformieren. Borcherds hat eine Abbildung von vektorwertigen Modulformen für $SL_2(\mathbb{Z})$ zu automorphen Formen für orthogonale Gruppen gefunden [B3]. Da diese automorphen Formen schöne Produktentwicklungen haben, werden sie als automorphe Produkte bezeichnet.

Das Monster

Um 1983 wurde die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen abgeschlossen. Es gibt 18 unendliche Familien, die zyklischen Gruppen mit Primzahlordnung, die alternierenden Gruppen und die Gruppen vom Lie Typ. Weiterhin gibt es 26 sporadische einfache Gruppen. Der Beweis dieses Resultats geht auf mehr als hundert Mathematiker zurück und umfaßt mehrere tausend Seiten. Die größte sporadische einfache Gruppe ist das Monster. Diese Gruppe wurde 1973 unabhängig von Fischer und Griess vorhergesagt und 1982 von Griess konstruiert. Die kleinsten irreduziblen Darstellungen des Monsters haben Dimensionen $1, 196883, 21296876, \ldots$. McKay hat folgenden Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Funktion j und den Dimensionen der irreduziblen Darstellungen des Monsters bemerkt

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 196884 &= 196883 + 1 \\ 21493760 &= 21296876 + 196883 + 1\,. \end{aligned}$$

Diese Beobachtung führte Conway und Norton 1979, d. h. bevor die Existenz des Monsters überhaupt bewiesen war, zu der Vermutung, daß es einen Modul $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ für das Monster gibt, so daß die

McKay-Thompson Reihen $T_g(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{tr}(g|V_n)q^n$, wobei $\mathrm{tr}(g|V_n)$ die Spur des Elements g im Monster auf dem Vektorraum V_n ist, Modulfunktionen vom Gewicht 0 zu Geschlecht 0 Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$ sind [CN]. Diese Vermutung wird im englischen Sprachgebrauch als *moonshine conjecture* bezeichnet. Die Übersetzung als *Mondschein Vermutung* ist nicht ganz zutreffend, da *moonshine* in diesem Zusammenhang eher als *Unsinn* gemeint war. Frenkel, Lepowsky und Meurman [FLM] haben 1988 einen Kandidaten für V konstruiert, auf dem das Monster operiert. Der Modul V hat eine zusätzliche algebraische Struktur, die einer Vertex Algebra, die invariant unter der Operation des Monsters ist. Frenkel et al. haben gezeigt, daß die graduierten Dimensionen von V durch die Koeffizienten von $j - 744$ gegeben sind, d.h. die McKay-Thompson Reihe der Identität ist gerade $j - 744$. Sie konnten jedoch nicht allgemein zeigen, daß die McKay-Thompson Reihen Modulfunktionen zu Geschlecht 0 Gruppen sind. Dies wurde von Borcherds im Rahmen der Theorie verallgemeinerter Kac-Moody Algebren bewiesen [B1]. Er konstruierte mit Hilfe des Moduls V eine verallgemeinerte Kac-Moody Algebra, die Monster Lie Algebra. Die Nenneridentität dieser Lie Algebra

$$\frac{1}{q_1} \prod_{\substack{n_1>0 \\ n_2\in\mathbb{Z}}} (1 - q_1^{n_1} q_2^{n_2})^{[j](n_1 n_2)} = j(\tau_1) - j(\tau_2)$$

liefert eine Produktformel der Funktion j. Der Exponent $[j](n)$ bezeichnet hierbei den n-ten Koeffizienten in der Fourier Entwicklung von j. Borcherds zeigte, daß das Monster in natürlicher Weise auf der Monster Lie Algebra operiert und berechnete die zugehörigen getwisteten Nenneridentitäten. Diese Identitäten implizieren, daß die McKay-Thompson Reihen Modulfunktionen vom Gewicht 0 zu Geschlecht 0 Gruppen sind.

Conways Gruppe

Ein Gitter im $\mathbb{R}^n$ ist der ganzzahlige Aufspann von n linear unabhängigen Vektoren. Ein Gitter heißt unimodular, wenn die n Basisvektoren ein Parallelotop mit Einheitsvolumen erzeugen. Weiterhin wird ein Gitter als gerade bezeichnet, wenn alle Gittervektoren gerade Norm haben. Mit Hilfe der Theorie der Modulformen zeigt man, daß unimodulare gerade Gitter nur in Dimensionen existieren, die durch 8 teilbar sind. In Dimension 8 gibt es bis auf Isometrie genau ein solches Gitter, in Dimension 16 zwei und in Dimension 24 gibt es bis auf Isometrie genau 24 unimodulare gerade Gitter. Danach wächst die Anzahl der Gitter sehr stark an. Unter den 24 unimodularen geraden Gittern im $\mathbb{R}^{24}$ gibt es genau ein Gitter, welches keine Vektoren der Norm 2 besitzt. Das impliziert, daß es keinen Vektor in diesem Gitter gibt, so daß die Spiegelung in der Hyperebene orthogonal zu diesem Vektor das Gitter in sich selbst abbildet, d.h. das Gitter hat keine Wurzeln. Dieses Gitter wird als Leech Gitter bezeichnet. Die Automorphismengruppe des Leech Gitters ist Conways Gruppe Co_0. Teilt man aus Co_0 die normale Untergruppe erzeugt von -1 aus, so erhält man die sporadische einfache Gruppe Co_1. Das charakteristische Polynom eines Elements g der Ordnung n in Co_0 läßt sich schreiben als $\prod_{d|n}(x^d - 1)^{b_d}$. Die Stufe von g ist definiert als die Stufe der Modulfunktion $\eta_g(\tau) = \prod_{d|n} \eta(d\tau)^{b_k}$. Conways Gruppe Co_0 operiert in natürlicher Weise auf der Falschen Monster Lie Algebra [B1]. Dies ist eine verallgemeinerte Kac-Moody Algebra, die die physikalischen Zustände eines bosonischen Strings beschreibt, der sich auf einem 26-dimensionalen Torus bewegt. Die getwisteten Nenneridentitäten der Falschen Monster Lie Algebra unter der Operation von Co_0 sind vermutlich automorphe Formen singulären Gewichts für orthogonale Gruppen. Diese Vermutung ist in Analogie zu Conway und Nortons Vermutung zu sehen. Sie wurde bisher für Elemente quadratfreier Stufe bewiesen [S1, S2, S3]. Dieses Theorem impliziert folgendes Resultat. Sei N eine quadratfreie positive ganze Zahl mit $\sigma_1(N)|24$. Dann gibt es ein Element g in Co_0 der Ordnung N mit charakteristischem Polynom $\prod_{d|N}(x^d-1)^{24/\sigma_1(N)}$. Sei Λ^g das Fixpunktgitter von g. Dann ist die getwistete Nenneridentität zu g gegeben durch

$$e^\rho \prod_{d|N} \prod_{\alpha\in(L\cap dL')^+} (1 - e^\alpha)^{[1/\eta_g](-\alpha^2/2d)} = \sum_{w\in W} \det(w) w\big(\eta_g(e^\rho)\big) ,$$

wobei $L = \Lambda^g \oplus II_{1,1}$ und W die Spiegelungsgruppe von L ist. Diese Identität definiert eine automorphe Form singulären Gewichts für eine orthogonale Gruppe und ist außerdem die ungetwistete Nenneridentität einer verallgemeinerten Kac–Moody Algebra. Wir erhalten so 10 verallgemeinerte Kac-Moody Algebren, die der Falschen Monster Lie Algebra sehr ähnlich sind.

Klassifikationsresultate

Wir haben bereits gesehen, daß die bekannten Klassifikationsresultate der Kac-Moody Algebren bestimmte Eigenschaften der Cartan Matrizen voraussetzen. Insbesondere muß die Cartan Matrix endlich sein. Für verallgemeinerte Kac-Moody Algebren ist diese Annahme nicht sinnvoll, weil die wichtigsten verallgemeinerten Kac-Moody Algebren, die Monster Lie Algebra und die Falsche Monster Lie Algebra, unendlich viele einfache Wurzeln und somit unendliche

Cartan Matrizen haben. Da die Nenneridentitäten einiger verallgemeinerter Kac-Moody Algebren automorphe Formen singulären Gewichts für orthogonale Gruppen sind, ist es naheliegend zu untersuchen, ob sich diese Lie Algebren klassifizieren lassen. Diese Idee scheint vielversprechend. Man kann beispielsweise zeigen [S4], daß die 10 oben angegebenen Lie Algebren die einzigen verallgemeinerten Kac-Moody Algebren sind, deren Nenneridentitäten vollständig reflektive automorphe Produkte singulären Gewichts auf Gittern quadratfreier Stufe und positiver Signatur sind. Dieses Klassifikationsresultat basiert auf Eigenschaften der Eisenstein Reihen E_k und der Bernoulli Zahlen B_k. Die Falsche Monster Lie Algebra verdankt ihre Existenz zum Beispiel der Tatsache, daß

$$\frac{2k}{B_k} = 24$$

für $k = 14$ ist. Im Gegensatz zu den affinen Kac-Moody Algebren gibt es hier also nur endlich viele Lie Algebren mit automorpher Nenneridentität.

Literatur

[B1] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. math. **109** (1992), 405–444

[B2] R. E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products*, Invent. math. **120** (1995), 161–213

[B3] R. E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. math. **132** (1998), 491–562

[CN] J. H. Conway and S. P. Norton, *Monstrous moonshine*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 308–339

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the monster*, Pure and Applied Mathematics 134, Academic Press, Boston, 1988

[K] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[S1] N. R. Scheithauer, *Generalized Kac-Moody algebras, automorphic forms and Conway's group I*, Adv. Math. **183** (2004), 240–270

[S2] N. R. Scheithauer, *Generalized Kac-Moody algebras, automorphic forms and Conway's group II*, Preprint 2004, eingereicht

[S3] N. R. Scheithauer, *Moonshine for Conway's group*, Habilitationsschrift, Heidelberg, 2004

[S4] N. R. Scheithauer, *On the classification of automorphic products and generalized Kac-Moody algebras*, Preprint 2005, eingereicht

Adresse des Autors
Priv.-Doz. Dr. Nils R. Scheithauer
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
69120 Heidelberg
`nrs@mathi.uni-heidelberg.de`

Nils R. Scheithauer wurde am 9. Mai 1969 in Marburg geboren. Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten Kiel, Brest und Hamburg. 1998 Promotion in Theoretischer Physik, Universität Hamburg; März 1998–Aug. 1999 Postdoktorand an der Universität Cambridge; Sept. 1999–Apr. 2000 Postdoktorand an der Universität Hamburg; Mai 2000–Apr. 2002 Research Fellow an der UC Berkeley. Seit Mai 2002 Nachwuchsgruppenleiter am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg im Rahmen des Emmy Noether-Programms. 2004 Habilitation („Moonshine for Conway's group"), Universität Heidelberg. 2004 Sektionspreis für Algebra auf der DMV-Jahrestagung in Heidelberg.