



Courtesy NASA/JPL-Caltech

Wetter und Klima, Gleichgewichte und Katastrophen

Notizen aus der MATHEON-Lounge

von Günter M. Ziegler

Wie berechnet man das Wetter? Warum sind die Wettervorhersagen so unzuverlässig? Wie funktioniert ein Hurrikan? Wie prognostiziert man Klima? Kann man den Klimakatastrophenmeldungen trauen? Welche Mathematik steckt hinter den Modellen? Und kann man hoffen, da mit „mehr Mathematik drin“ weiter zu kommen? Nach einer verheerenden Hurrikan-Saison, nach dem Abzug von Katrina, Rita, Wilma und Alpha, und nach den ersten Herbststürmen über Deutschland fand das vierte Lounge-Gespräch des MATHEON¹ an einem strahlend sonnigen Herbstfreitagnachmittag statt. Über Wettermodellierung und Klimakatastrophen habe ich mich mit Rupert Klein unterhalten; er ist promovierter Ingenieur (Strömungsmechanik), Professor für Mathematik an der FU Berlin, und Leiter der Abteilung „Data and Computation“ am Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung (PIK).

Das Wetter von übermorgen

Der Ausgangspunkt für die Rechnungen für die übliche Wettervorhersage etwa für Deutschland ist ein grobes, globales Modell: Beim Deutschen Wetterdienst in Offenbach werden (auf einem sehr groben Gitter, bei dem die Punkte mehrere hundert Kilometer auseinanderliegen) Strömungs- und Druckverhältnisse über die ganze Erdoberfläche (also auf der Kugel) für mehrere Tage vorausberechnet. Dabei *must* man schon deshalb mit Wetterdaten für den ganzen Globus rechnen, weil es schnelle Signale gibt, die innerhalb von zwei Tagen das Wetter auf dem ganzen Globus beeinflussen können.

Man verwendet dabei auch ein vereinfachtes Strö-

mungsmodell, von dem gezeigt wurde, dass es nur mit nicht-lokalen Randbedingungen (etwa geschlossene Lösung auf der Kugel), nicht aber mit lokalen Randbedingungen (für ein begrenztes Gebiet, etwa Europa) zu einem wohl-gestellten Problem führt [3], [7].

Die Daten aus dem groben globalen Modell bilden die Grundlage für die Rechnungen etwa für Mitteleuropa. Diese werden mit viel größerer Auflösung und Genauigkeit durchgeführt. Dabei löst man auch das volle Gleichungssystem der Strömungsmechanik für ein kompressibles Fluid, das dann auch mit den lokalen Randbedingungen (die aus dem globalen System stammen) wohl-gestellt ist.

¹ DFG-Forschungszentrum „Mathematik für Schlüsseltechnologien“ in Berlin.

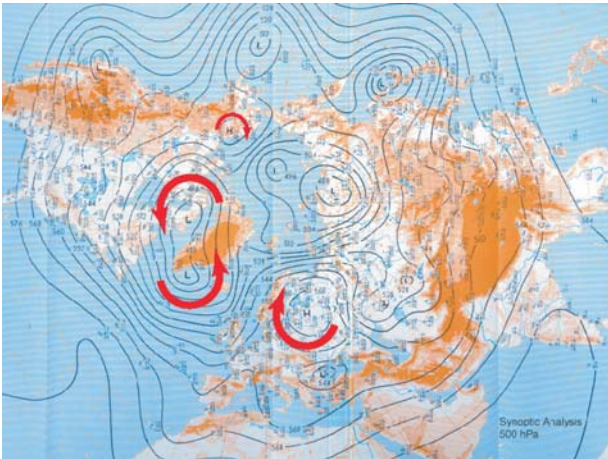


Abbildung 1. Wetterkarte (Peter Névier, FU Berlin)

Allerdings arbeitet man auch hier noch mit einer entscheidenden Vereinfachung, nämlich der Annahme, dass die horizontale Schichtung der Luft aufrechterhalten bleibt. In vielen Situationen ist das ja auch eine adäquate Annahme – aber wenn sie zusammenbricht, dann hat das eben auch einschneidende Auswirkungen auf die Modellierung. Um dies zu sehen betrachten wir einen Luftstrom über einen sanften Hügel, wie in Abbildung 2 angedeutet.

Hat der Hügel eine horizontale Ausdehnung L , so bilden sich dabei evtl. aufsteigende Schwerewellen, deren horizontale Ausdehnung auch die Größenordnung von L hat, und die deshalb von einer Rechnung mit horizontaler Gitterweite von ca. $L/10$ realistisch erfasst werden.

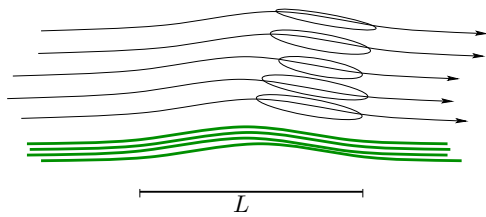


Abbildung 2. Luftstrom über einen Hügel; Schwerewellen bilden sich aus

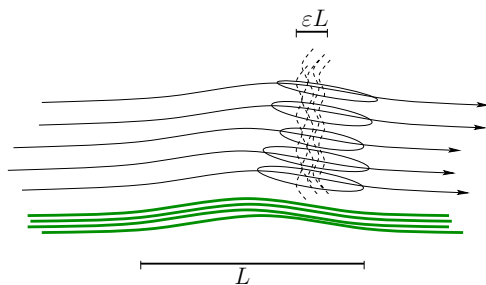


Abbildung 3. Kondensation führt zu Austauschphänomenen in schmalen Säulen

Das Grundmodell enthält aber noch keine Information über Wolkenbildung, Kondensation und Regen. Solche lokalen Phänomene sind durchaus realistisch vorhersagbar, aber sie führen zu aufsteigenden Luftströmen, Säulen und Austauschprozessen die viel schmäler sind, und die man mit der gegebenen Gitterweite nicht erfassen kann.

Deren Netto-Effekte werden unter dem Stichwort „Parameterisierung“ Gitterpunkt für Gitterpunkt unter Hinzuziehung vereinfachter Modellannahmen dem Gesamtmodell beigelegt. Diese Art Eingriff auf der Gitterebene, also auf diskreter Ebene kann im Allgemeinen nicht, wie die Diskretisierung des Ausgangsmodells der Strömungsgleichungen, als eine numerisch konsistente Approximation eines Kontinuumsmodells dargestellt werden. Daher „mischen“ die Parameterisierungen inhärent diskrete und kontinuumsbasierte mathematische Modellierungsansätze, und zwar in einer Weise, die bisher mathematisch nicht durchdrungen oder gerechtfertigt ist.

Ein besserer Wetterbericht?

Sorgfältige statistische Analysen [2] zeigen, dass die Wettervorhersagen für Deutschland in Hinblick auf Windgeschwindigkeiten und Temperaturen in den letzten 20 Jahren deutlich besser geworden sind (in etwa mit Halbierung der Fehlerrate), nicht aber in Bezug auf Niederschlagsmengen. Weiterer Fortschritt ist erwünscht. Wo setzt man an? Verschiedene Möglichkeiten fallen einem ein:

1. Zunächst könnte man die zugrundeliegenden Beobachtungsdaten verbessern. Zur Zeit gibt es in Deutschland 173 volle Wetterstationen, die alle wichtigen Parameter messen, und ca. 3 500 weitere kleine Stationen, an denen nur Niederschlagsmengen aufgezeichnet werden. Man könnte die Anzahl/Dichte der Messstationen vergrößern, die Lage optimieren – grundsätzliche Verbesserungen wird das nicht bringen.
2. Man könnte versuchen, genauer zu rechnen. Zur Zeit rechnet man auf Gittern mit einer Größenordnung von $300 \times 300 \times 50$ Gitterpunkten (also einer räumlichen Auflösung von horizontal 10 km und vertikal im Mittel 300 m), und mit einer zeitlichen Auflösung von etwa einer Minute: Diese ist auch nötig, weil typische Windgeschwindigkeiten die Distanz von 10 km in 20 Minuten überbrücken, die schnelleren Schwerewellen, die das Wetter substantiell mitbestimmen, aber nur 3 Minuten brauchen, und diese müssen realistisch erfasst werden. Damit erfordert eine Rechnung über 48 Stunden die Lösung von nichtlinearen PDEs über ein raum-zeitliches Gitter mit mehreren Milliarden von Knoten. Natürlich kann man die Gitterweite nicht verkleinern, weil die Rechenleistung nicht ausreicht.

ter verfeinern, aber sicher nicht um Größenordnungen.

- Die Anpassung der Rechnungen an die Anfangsdaten (aus dem globalen Modell, und aus lokalen Messungen) ist natürlich ein Problem, und erlaubt Verbesserungen. In diesem Bereich wird schon mit ausgefeilter Rückwärtsoptimierung gearbeitet: Man versucht, Wetterdaten für die Situation vor vier Tagen zu optimieren, die „von damals bis heute“ in der Modellrechnung das richtige Ergebnis liefern – und rechnet mit diesen dann weiter in die Zukunft.

Rupert Klein sieht aber einen weiteren, wichtigeren und mathematisch-grundsätzlichen Ansatzpunkt, und koordiniert Anstrengungen, diesen in Angriff zu nehmen: die unbefriedigende und mathematisch-unsaubere Kopplung der diskreten lokalen Prozesse an die strömungsmechanischen Rechnungen.

Am mathematischen Kern der Strömungsmechanik hat man es mit Erhaltungssätzen vom folgenden Typ zu tun:

$$\int_{\Omega} U dx \Big|_{t_1}^{t_2} = - \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma dt.$$

Dabei bezeichnet Ω ein Gebiet („Kontrollvolumen“, etwa ein einzelnes Tetraeder des Gitters), U ist ein Vektor von Erhaltungsgrößen (Masse, Impuls, Energiedichten), und \vec{F} bezeichnet den Fluss von Masse, Impuls etc. durch die Oberfläche, mit Einheitsnormalenvektor \vec{n} . Damit besagt die Gleichung, dass die zeitliche Änderung der Erhaltungsgrößen durch den Fluss durch die Oberfläche gegeben ist. Dies gilt *exakt*, für beliebige Gebiete, und zwar sowohl kontinuierlich, als auch für diskrete Kontrollvolumina. Daraus kann man sowohl die PDEs als auch die korrekte Numerik ableiten [5], [6].

Die große Herausforderung besteht nun darin, die diskreten Austauschprozesse so ins Modell einzubauen, dass sie die Numerik nicht „kaputtmachen“. Mit dem oben skizzierten sogenannten Finite-Volumen-Ansatz hat man einen klaren Ansatzpunkt: Es gilt, die raumzeitliche Struktur der kleinskaligen Fluktuationen zu modellieren, ihren Einfluss auf die punktweise ausgewerteten Flussgrößen exakt zu berechnen, und auf dieser Basis die Flussintegrale über die Ränder der Kontrollvolumina im raumzeitlichen Gitter numerisch zu berechnen.

Wie funktioniert ein Hurrikan?

Warum Hurrikans wirklich entstehen, ist eigentlich nicht wirklich verstanden. Aber realistische Modelle für das Verhalten von ausgebildeten Hurrikans hat man, und die kann man auch „durchrechnen“.



Abbildung 4. Hurrikan Isabel vor der Ostküste der USA, 2003 Aufnahme: NASA

Um den Kurs eines Hurrikans vorherzusagen muss man seine Dynamik realistisch modellieren. Dies ist, wie Rupert Klein ausführte, ein echt dreidimensionales Problem. Trotzdem kann man den Hurrikan in erster Näherung rotationssymmetrisch modellieren. Das Auge (etwa von 50 Kilometer Durchmesser) ist wolkenfrei, eine Luftsäule von $h_{sc} \approx 10$ km Höhe, die damit die ganze Troposphäre aufspannt; darüber liegt die Tropopause wie ein Deckel. In dem Ring außenrum halten sich Fliehkraft (Zentripetalbeschleunigung), Druckkräfte und Corioliskraft im Gleichgewicht [7], [8].

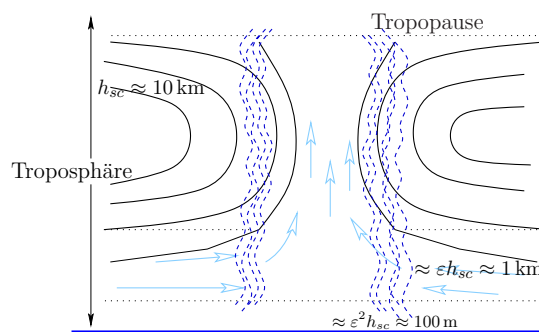


Abbildung 5. Schemazeichnung eines Hurrikans

Im unteren Bereich gibt es eine Schicht der Höhe $\varepsilon h_{sc} \approx 1$ km, in der Luft in den Wirbelsturm angesaugt wird. Dabei ist die Rossby-Zahl ε eine physikalische Konstante. Und darunter gibt es eine noch flachere Schicht von einer Dicke $\varepsilon^2 h_{sc} \approx 100$ m, in der sich über Gischt und Wellen Luft mit großen Wassermengen aus dem warmen Ozean „vollsaugt“. Gleichzeitig regnet es – außerhalb des Auges des Hurrikans – sehr stark, was wieder zu horizontal kleinskaligen Austauschphänomenen führt, die in den darüberliegenden beiden Schichten effektive Quellterme für Energie und Vertikalimpuls hervorrufen.

Um die Bewegung von Hurrikans vorhersagen zu können, muss man allerdings Effekte höherer Ordnung modellieren: Es stellt sich heraus, dass die Rotations-symmetrie nur in erster Näherung stimmt. So steht etwa die Achse eines Hurrikans doch nicht ganz senkrecht. Und die Rotationsgeschwindigkeit, die in erster Näherung umgekehrt proportional mit dem Radius abfällt, wird überlagert von einem sogenannten *Beta-Effekt*, der aus der Variation der Coriolis-Kraft über dem Durchmesser des Hurrikans resultiert. Die Coriolis-Kraft verschwindet am Äquator und ist maximal an den Polen, so dass eine systematische Nord-Süd-Variation dieses Effekts existiert. Dies könnte bei einem Hurrican von 250 km Durchmesser wesentliche Effekte auslösen, und insbesondere die Bewegungsrichtung beeinflussen. Mit einer Doktorandin arbeitet Rupert Klein aktuell an solchen Modellen.

Die Klimakatastrophe ist da?

Ganz ohne Zweifel war die Hurrikan-Saison 2005 verheerend, und hat dramatische Schäden und Zerstörungen ausgelöst. Daraus aber jetzt zu schließen, dass „die Klimakatastrophe“ inzwischen da ist, sei unzulässig, sagt Rupert Klein.

Dabei werden der Öffentlichkeit sehr einfache und plausible Erklärungsmuster angeboten: Wegen der Erderwärmung (davon ist „mindestens zu 50%“ der Mensch schuld) werden die Ozeane wärmer, also saugen die Wirbelstürme mehr Wasser, und daher gebe es die großen Katastrophen . . .

Ganz so einfach ist das aber nicht: Klar scheint, dass aufgrund der Ozeanerwärmung in der Karibik die Hurrikans mehr Feuchtigkeit aufnehmen und zwar deutlich. Die Zerstörungskraft der Hurrikans steigt damit dramatisch an.

Ob aber für die Hurrikan-Saison die globale Ozeanerwärmung den den Hauptanteil an dieser Entwicklung hat, ist laut Rupert Klein nicht klar. Genauso entscheidend können warme Meeresströmungen gewesen sein, die immer wieder mal den Verlauf ändern, derzeit in den Golf von Mexiko führen, und dort die Hurrikan-Serie dramatisch verstärken.



Abbildung 6. <http://www.dkrz.de>

Das ergibt sich so „alle Jubeljahre mal“, sagt Rupert Klein, und auch nicht regelmäßig (wie etwa das El Niño-Phänomen, das einen siebenjährigen Zyklus hat). Vermutlich spielen sowohl globale Erwärmung als auch normale lokale Strömungen, und eventuell auch noch andere Effekte eine Rolle.

Die Klimamodelle

Wenn man schon das Wetter vom Wochenende nicht vorhersagen kann, wie dann das Klima in fünfzig Jahren? Wie stabil sind die Modelle? Kann man denen trauen?

Dabei gibt es zur Klimamodellierung zwei sehr unterschiedliche Ansätze. Am Deutschen Klimarechenzentrum (DKRZ) in Hamburg betreiben Wissenschaftler aus der gesamten deutschen Gemeinde der Klimaforscher sogenannte *Globale Zirkulationsmodelle*. Dies sind im Ursprung Wettervorhersagemodelle, erweitert um eine Reihe von Modellkomponenten für Langzeiteffekte, die für die tägliche Wettervorhersage irrelevant sind. Solche Modelle liefern offensichtlich für die einzelnen Tage keine korrekte Vorhersage mehr, aber es liefert ein „mögliches“ Wetter, und zeitliche Mittelung (und evtl. die Mittelung über etliche Läufe) zeigt dann Tendenzen in der Klimaentwicklung.

Einen entgegengesetzter Ansatz wird am PIK in Potsdam verfolgt: Ein Team der Abteilung „Klimasystem“ entwickelt *Erdsystemmodelle mittlerer Komplexität* (EMICs). Diese Modelle zielen darauf ab, Klima zu simulieren, ohne einzelne Wettermuster nachzurechnen. Die derzeitige Version des Modells ist sehr grob: der Atlantik wird dabei etwa als eine senkrecht-gestellte Scheibe modelliert, auf der sich hohe und tiefe Meeresströmungen in Nord-Süd-Richtung abspielen können; dabei wird z. B. im Atmosphärenteil des Modells mit einer horizontalen Auflösung von nur 13×13 Datenpunkten gerechnet. Bemerkenswerterweise lassen sich auf diesem groben

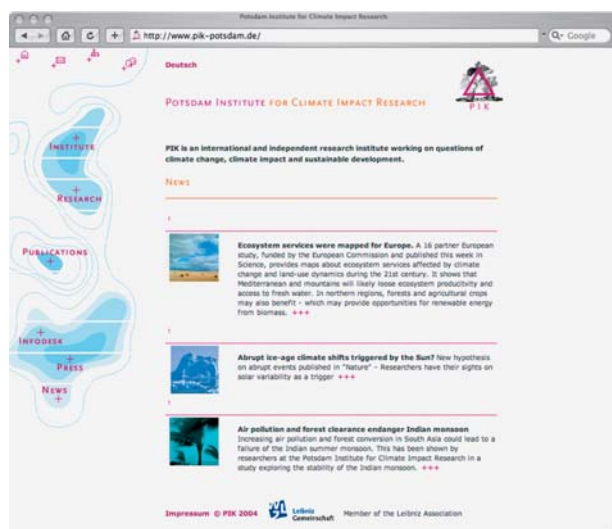


Abbildung 7. <http://www.pik-potsdam.de/>

Modell aber schon langfristige Klimaentwicklungen verfolgen, die etwa die Folge der Eiszeiten (mit Zyklen aus langsamer Erwärmung und dann plötzlichen Temperaturabstürzen) realistisch abbilden.

Ohne Zweifel beeinflusst der Mensch das Klima. Der CO_2 -Gehalt der Atmosphäre steigt, zumindest teilweise auch aufgrund der Verbrennung fossiler Brennstoffe. Eben weil menschliche/industrielle Prozesse klar das Klima beeinflussen (können) ist auch nicht von *Klimavorhersagen* die Rede, sondern von *Klimaszenarien*: In die Modelle dafür müssen Annahmen über zukünftige ökonomische (und damit politische) Entwicklungen eingehen. Dabei sind die Hebel, die wir zur Beeinflussung des Klimas haben, allesamt langsam, aber auch langfristig wirksam: Auch wenn man den CO_2 -Ausstoß sofort drastisch senken wollte und könnte, würde das die Erwärmung von Atmosphäre und Ozeanen erst langsam bremsen. Realistische Klimamodelle sind wichtig, um die relevanten politisch-ökonomischen Steuerungsmöglichkeiten zu identifizieren und zu bewerten.

Literatur

- [1] R. Klein, E. Mikusky & A. Owinoh: Multiple Scales Asymptotics for Atmospheric Flows, in: 4th European Conference of Mathematics (Stockholm 2004), A. Laptev (ed.), EMS Publishing House, Zürich 2005, pp. 201–220.
- [2] E.E. Ebert, U. Damrath, W. Wergen & M.E. Baldwin: The WGNE Assessment of short-term quantitative precipitation forecast, *Bulletin American Meteorolog. Soc.* 84 (2003), 481–492.
- [3] J. Ohliger & A. Sundström: Theoretical and practical aspects of some initial-boundary value problems in fluid dynamics, Preprint STAN-CS-76-578, Stanford University, Nov. 1976.
- [4] C. Cao & E.S. Titi: Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics, Preprint, March 2005, 19 pages; [arXiv:math.AP/0503028](https://arxiv.org/abs/math.AP/0503028)
- [5] P. Wesseling: Principles of Computational Fluid Dynamics, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 29, Springer-Verlag, Heidelberg 2001
- [6] D. Kroener: Numerical Schemes for Conservation Laws, Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics, Wiley, Chichester and B.G. Teubner, Stuttgart, 1997
- [7] A. Callegari & L. Ting: Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Applied Mathematics* 35 (1978), 148–175.
- [8] G.M. Reznik & W.K. Dewar: An analytical theory of distributed axisymmetric barotropic vortices on the β -plane, *J. Fluid Mechanics* 269 (1994), 301–321.

Adressen der Autoren

Prof. Günter M. Ziegler (TU Berlin)
 DFG-Forschungszentrum MATHEON
 TU Berlin, MA 3–1
 Str. des 17. Juni 136
 10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de
unter Mitarbeit von
 Prof. Dr.-Ing. Rupert Klein
 Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung (PIK)
 Telegrafenberg A 31
 14473 Potsdam
rupert.klein@pik-potsdam.de

Weitere Informationen

IPCC Third Assessment Report – Climate Change 2001. Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) <http://www.ipcc.ch/>
 Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung (PIK): <http://www.pik-potsdam.de>
 Deutsches Klimarechenzentrum (DKRZ): <http://www.dkrz.de>
 Deutscher Wetterdienst: <http://www.dwd.de>
 European Centre for Medium-Range Weather Forecasts: <http://www.ecmwf.int>
 DFG-Schwerpunktprogramm 1167 *Quantitative Precipitation Forecast*:
<http://www.meteo.uni-bonn.de/projekte/SPPMeteo>