Fields-Medaillist Wendelin Werner

Robert O. Bauer

1 Überblick

Am 22. August 2006 wurde Wendelin Werner beim Internationalen Mathematiker Kongress in Madrid die Fields-Medaille verliehen. Er ist der erste Wahrscheinlichkeitstheoretiker, dem diese Ehre zuteil wurde. Professor Werner, geboren in Deutschland in 1968, ist französischer Nationalität. Er war von 1987 bis 1991 Student an der École Normale Supérieure und promovierte unter Jean-François Le Gall in 1993. Der Promotion folgte ein Aufenthalt als Leibniz Fellow an der Universität Cambridge, und schließlich, seit 1997, eine Professur an der Universität Paris-Sud. Seit 2005 ist Wendelin Werner auch Professor an der École Normale Supérieure. Seine Arbeit ist mit zahlreichen Preisen ausgezeichnet worden, darunter der Rollo Davidson Preis (1998), der Fermat Preis (2001), der Loève Preis (2005), und, gemeinsam mit Greg Lawler und Oded Schramm, der Pólya Preis (2006).

Wendelin Werner erhielt die Fields Medaille „für seine Beiträge zur Entwicklung der stochastischen Löwner Evolution, der Geometrie der zweidimensionalen Brown'schen Bewegung, und der konformen Feld-Theorie." Dabei war die Geometrie Brown'scher Pfade in der Ebene, angefangen mit Wendelin Werners Dissertation, der erste Schwerpunkt seiner Arbeit. Diese führte ihn zu einer Reihe tiefer Fragen, z. B. der Mandelbrot'schen Vermutung, deren präzise Beantwortung zu dieser Zeit (Mitte bis Ende der 90er Jahre) als klar außerhalb der Reichweite mathematischer Methoden betrachtet wurde.

Physiker konnten mit Mitteln der konformen Feld-Theorie Antworten auf viele dieser Fragen geben und hatten charakteristische Exponenten genau berechnet. Aus mathematischer Sicht waren dies bloße Vermutungen, die Argumente der Physiker für Mathematiker mysteriös, die Resultate allerdings faszinierend, etwa der algebraische Charakter der Exponenten und ihre vielfältigen Beziehungen. Eine ganz neue Welt schien sich aufzutun, wenn Mathematiker sie nur verstehen und auf sichere Fundamente stellen könnten. Gemeinsame Arbeiten von Werner und Lawler (1999) zeigten, dass die grundlegenden Konzepte ‚konforme Invarianz' und ‚Universalität' aus der konformen Feld-Theorie auch im mathematischen Zugang zur Geometrie von Zufallspfaden in der Ebene eine entscheidende Rolle spielen würden. Mit der *Erfindung* der stochastischen Löwner Evolution durch Oded Schramm (1999/2000) bekamen Werner und Lawler das ‚Werkzeug' in die Hand um diese Konzepte für die Mathematik fruchtbar zu machen, was sie dann auch, in Zusammenarbeit mit Schramm, in eindrucksvoller Weise taten. So ist etwa die Mandelbrot'sche Vermutung nun ein Satz.

Die stochastische Löwner Evolution (SLE) erlaubt allgemeiner die Beschreibung einfacher Zufallskurven in der Ebene, deren Verteilung konform invariant ist. Aus der statistischen Mechanik kam die Vermutung, dass solche Kurven als Skalierungslimes für immer feinere diskrete Modelle von Phasengrenzen auftreten würden, etwa als Rand eines *clusters* von gleichgerichteten Elementarmagneten in einem 2-dimensionalen Ising Magnet. Wenn einmal gezeigt ist, dass ein diskretes Model einen konform invarianten Skalierungslimes besitzt, dann kann dieser mittels SLE beschrieben und analysiert werden. Physiker ihrerseits benutzen nun SLE Methoden, mittels derer nicht-lokale Aspekte der Modelle, die die konforme Feld-Theorie beschreibt, direkt analysiert werden können. Im Gegensatz dazu stehen die lokalen Objekte, wie Operatoren und Felder, mit denen die konforme Feld-Theorie gewöhnlich arbeitet. Was diese lokalen Objekte und deren assoziierte Strukturen, wie *operator product expansion* und Darstellungstheorie unendlich-dimensionaler Lie-Algebren, im ‚SLE-Bild' sind, ist bisher nur in Anfängen verstanden und gegenwärtig ein sehr aktives Forschungsfeld. Der Hauptbeitrag zu unserem bisherigen Verständnis davon ist von Wendelin Werner gekommen.

Ausgezeichnete Einführungen zu diesem Themenkreis sind [10, 24] und [1, 7], wobei erstere von Mathematikern und letztere von Physikern verfasst wurden.

2 Zur Arbeit Wendelin Werners

Im Sommer 2001 begann Wendelin Werner seinen Vortrag am Newton Instiute in Cambridge mit der Frage: „Wie wählt man eine Zufallskurve in der Ebene?“ Wenn sich die Kurve selbst überschneiden darf, ist die planare Brown'sche Bewegung ein natürlicher Kandidat. Was sie so ‚natürlich‘ macht, ist der Umstand, dass die Brown'sche Bewegung der Skalierungslimes einer Vielzahl diskreter Modelle ist. Die einfache Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ beschreibt die Position eines Spaziergängers, der jedesmal, wenn er an eine Kreuzung kommt, in eine der vier Richtungen weitergeht. Dabei soll jede Richtung gleichwahrscheinlich, und die Entscheidung für eine Richtung unabhängig von allen vorherigen Entscheidungen sein. Wenn unser Spaziergänger im Nullpunkt beginnt, seine Schrittlänge eins ist, und er n Schritte macht, dann gibt es 4^n mögliche Pfade und jeder mögliche Pfad hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich 4^{-n}. In diesem Sinne ist die einfache Irrfahrt die ‚Gleichverteilung‘ auf dem Pfadraum. Reskaliert man nun das Gitter (und die Schrittlänge), $\mathbb{Z}^2 \to a\mathbb{Z}^2$, und erhöht man gleichzeitig die Schrittfrequenz, so dass der Spaziergänger a^{-2} Schritte in einer Zeiteinheit macht, dann konvergiert, wenn $a \to 0$, die einfache Irrfahrt im Verteilungssinn gegen eine Brown'sche Bewegung. Diese Konvergenz zur Brown'schen Bewegung unter Reskalierung ist für viel allgemeinere Irrfahrten und Gitter gültig. Die Unabhängigkeit des Skalierungslimes vom spezifischen diskreten Modell ist Teil dessen, was in der Physik *Universalität* genannt wird. Da die Brown'sche Bewegung Skalierungslimes ist, ist ihre Verteilung invariant unter Reskalierung: Ein Brown'scher Pfad, unter dem Mikroskop betrachtet, ‚sieht aus‘ wie ein Brown'scher Pfad. Eine weitere leicht einzusehende Symmetrie des Skalierungslimes ist die Invarianz der Verteilung unter Drehungen. Weniger offensichtlich ist die Tatsache, dass auch Abbildungen, die nur infinitesimal aus Reskalierung und Drehung bestehen, die Brown'sche Bewegung invariant lassen. Dies sind gerade die winkelerhaltenden Abbildungen, das heißt, die konformen Abbildungen. Genauer besagt die *konforme Invarianz* der Brown'schen Bewegung: Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, einen Punkt $z \in D$, eine konforme Abbildung $f : D \to f(D)$ und eine Brown'sche Bewegung Z_t mit $Z_0 = z$, die gestoppt wird, wenn sie D verläßt, ist $\tilde{Z}_t \equiv f(Z_t)$ eine Brown'sche Bewegung mit $\tilde{Z}_0 = f(z)$, die gestoppt wird, wenn sie $f(D)$ verlässt. Streng genommen ist $\tilde{Z}_t$ nur eine Brown'sche Bewegung *modulo Zeitreparametrisierungen*. Für Ereignisse die von der Parametrisierung unabhängig sind, etwa dass $\tilde{Z}$ in eine Menge A eintritt, bevor es $f(D)$ verläßt, spielt das aber keine Rolle.

Was nun, wenn sich der Pfad nicht mehr selbst überschneiden darf? Wo treten einfache (d.h. selbst-überschneidungsfreie) Zufallspfade überhaupt auf? Mit Blick auf die Geographie mag man an Küstenlinien oder Höhenlinien auf Karten von Gebirgsketten denken. In planaren Modellen der statistischen Mechanik treten einfache Kurven als Phasengrenzen auf, z. B. im mathematischen Modell der Perkolation: Betrachten wir ein Gebiet D in der Ebene, das keine Löcher hat und durch ein Honigwabengitter (Pflasterung der Ebene durch reguläre Sechsecke) überdeckt ist, sowie zwei Punkte z, w auf dem Rand von D. Die Punkte z und w teilen den Rand von D in zwei Teile, und wir denken uns die Honigwaben, die den einen Randteil überdecken, alle blau gefärbt, und die, die den anderen Randteil überdecken, alle gelb (wir nehmen der Einfachheit halber an, daß z und w Gitterpunkte sind). Für jede Honigwabe im Inneren des Gebiets werfen wir eine faire Münze und färben sie blau bei ‚Kopf‘ und gelb bei ‚Zahl‘. Betrachten wir nun den *cluster* von blauen Honigwaben, der mit dem blauen Randteil verbunden ist, und den *cluster* von gelben Honigwaben, der mit dem gelben Randteil verbunden ist (typischerweise haben diese *cluster* viele Löcher). Dann gibt es eine Linie, die diese beiden *cluster* trennt, und diese Linie ist ein einfacher Pfad auf dem Gitter von z nach w. Man kann diesen Pfad ‚erforschen‘, indem man z. B. im Punkt z beginnt. Nehmen wir an, dass die Randwabe zur Linken blau ist und die zur Rechten gelb. Man geht bis zum nächsten Gitterpunkt wo man die erste innere Wabe sieht. Ist diese blau, geht man auf dem Gitter nach rechts, und ist sie gelb, so geht man nach links. In dieser Weise schreitet man auf dem Gitter entlang, so dass blaue Waben links des Pfades und gelbe Waben rechts des Pfades sind. Aus topologischen Gründen endet der Pfad im Punkt w. Der Anfang eines solchen Prozesses ist in Abbildung 1 dargestellt.

Nennen wir die Phasengrenze γ. Hat man die Phasengrenze ein Stück weit erforscht, sagen wir ein Teilstück $\gamma' \subset \gamma$, das in z beginnt und in z' aufhört, sind damit von den inneren Waben lediglich jene, die rechts und links an γ' anliegen, in ihrer Farbe festgelegt. Man sieht, dass wenn γ' gegeben ist, die Verteilung der verbleibenden Phasengrenze $\gamma\backslash\gamma'$ gleich ist der Verteilung der Phasengrenze im neuen (geschlitzten) Gebiet $D\backslash\gamma'$ mit Anfangspunkt z' und Endpunkt w. Man sagt, dass die Phasengrenze *Gebiets-Markov* ist. Legt man immer feinere Honigwabengitter über das Gebiet D und hält die Punkte z und w fest, dann vermuteten Physi-

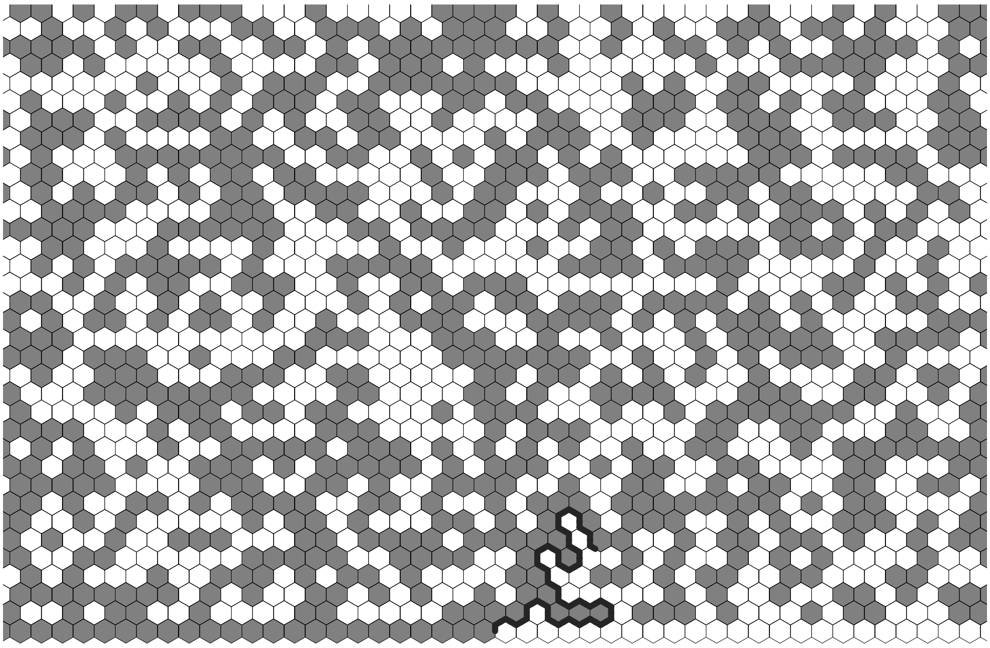


Abbildung 1. *Erforschung der Perkolationsphasengrenze (entnommen aus [24])*

ker, dass die Phasengrenze einen konform invarianten Skalierungslimes besitzt (inzwischen bewiesen), d. h. wenn γ der Skalierungslimes der Phasengrenze in D von z nach w ist und f eine konforme Abbildung, dann hat $f(\gamma)$ die gleiche Verteilung wie der Skalierungslimes der Phasengrenze in $f(D)$ von $f(z)$ nach $f(w)$.

Die 2-dimensionale Brown'sche Bewegung kann auch zur Konstruktion einfacher Zufallspfade herangezogen werden. Ist Z_t eine Brown'sche Bewegung, die im Punkt $0 \in \mathbb{C}$ beginnt, und $Z[0,t]$ die Punktmenge aller Orte, die die Bewegung bis zum Zeitpunkt t besucht hat, dann hat $\mathbb{C}\backslash Z[0,t]$ genau eine zusammenhängende Teilmenge, die unbeschränkt ist. Den Rand dieser Menge hat Mandelbrot *Brownian frontier* genannt [20], und vermutet, dass die Hausdorff-Dimension dieses Randes $4/3$ ist. Dabei erbt die *Brownian frontier* die konforme Invarianz von der zugrunde liegenden Brown'schen Bewegung. Die *Brownian frontier* steht immer dann im Vordergrund, wenn man Überschneidungs- oder Nichtüberschneidungswahrscheinlichkeiten für Brown'sche Bewegungen untersucht. Seien $Z_1^1, \ldots, Z_{\alpha_1}^1, Z_1^2, \ldots, Z_{\alpha_2}^2, \ldots, Z_{\alpha_k}^k$ unabhängige Brown'sche Bewegungen in der komplexen Ebene, aufgeteilt in k Gruppen der Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Nehmen wir an, dass alle Brown'schen Bewegungen der ersten Gruppe in z_1 starten, die der zweiten Gruppe in z_2, u.s.w., und dass die Startpunkte $z_1, \ldots, z_k$ alle verschieden sind. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich bis zum Zeitpunkt t Brown'sche Pfade verschiedener Gruppen nicht überschnitten haben? Man beachte dabei, dass sich Pfade, die zur gleichen Gruppe gehören, überschneiden dürfen. Durch Subadditivitäts-Argumente läßt sich leicht zeigen, dass diese Wahrscheinlichkeit sich asymptotisch verhält wie $t^{-\xi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)/2}$ wenn $t \to \infty$. In [16] fanden Greg Lawler und Wendelin Werner die Struktur der *kritischen Exponenten* $\xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Insbesondere zeigten sie, dass es unter der Hypothese, dass alle Startpunkte auf der reellen Achse sind und die Pfade nach dem Start in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ bleiben, eine kontinuierliche, streng wachsende konkave Funktion $U : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gibt, so dass

$$\tilde{\xi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = U^{-1}\big(U(\alpha_1) + \cdots + U(\alpha_k)\big). \tag{1}$$

Die Tilde soll anzeigen, dass die Wahrscheinlichkeit unter der erwähnten Hypothese betrachtet wird. Für den Beweis ist die konforme Invarianz der Brown'schen Bewegung von zentraler Bedeutung. Mittels nicht rigoroser Methoden aus der konformen Feld-Theorie hatten die Physiker Duplantier und Kwon die Vermutung aufgestellt [5], dass der kritische Exponent gleich $k(2k+1)/3$ ist, falls jede der k Gruppen aus nur einer Brown'schen Bewegung besteht. Aus Lawlers und Werners Resultaten folgt dann zunächst

$$U(x) = \sqrt{x + 1/24} - \sqrt{1/24},$$

und schließlich die Vermutung

$$\xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{(\sqrt{24\alpha_1 + 1} + \cdots + \sqrt{24\alpha_k + 1} - k)^2 - 4}{48}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) kann die Mandelbrot'sche Vermutung gefolgert werden. Nachdem Lawler und Werner die Strukturgleichung (1) hergeleitet hatten, fand Duplantier eine ‚Erklärung' im

Zusammenhang mit der sogenannten *2D quantum gravity* [4]. Die Strukturgleichung (1) korrespondiert darin der KPZ-Gleichung [8], die eine Beziehung zwischen kritischen Exponenten in der Ebene mit der üblichen flachen Metrik, und der Ebene mit einer ‚Zufallsmetrik' geben soll. Aus rein mathematischer Sicht ist diese Beziehung zwischen (1) und der KPZ-Gleichung noch unklar.

In einer weiteren Arbeit [17] zeigten Lawler und Werner, dass jede geschlossene Zufallsmenge in der Ebene, deren Verteilung konform invariant ist und eine gewisse Regularität besitzt, sich wie eine ‚Gruppe' von unabhängigen Brown'schen Bewegungen verhält, zumindest was Überschneidungswahrscheinlichkeiten betrifft, und deuteten dies als eine Manifestation von Universalität.

Die Vermutung (2) war im Einklang mit Ober- und Unterschranken, die Mathematiker für einige der kritischen Exponente gefunden hatten. Die dafür benutzten Methoden jedoch schienen ungeeignet, die Vermutung selbst zu beweisen. Dazu bedurfte es eines ganz neuen Zugangs, der erst durch Oded Schramms *stochastische Löwner Evolution* möglich wurde. Die stochastische Löwner Evolution beruht auf Karl Löwners Theorie der Schlitzabbildungen, eingeführt 1923 in Zusammenhang mit der Bieberbach'schen Vermutung [18]. Sei γ eine einfache Kurve in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ mit einem Endpunkt auf der reellen Achse und dem anderen im Innern von $\mathbb{H}$. Dann gibt es eine konforme Abbildung $g : \mathbb{H}\backslash\gamma \to \mathbb{H}$ mit der Entwicklung $g_\gamma(z) = z + 2a/z + o(1/|z|)$ wenn $z \to \infty$. Der Koeffizient a wird ‚Halbebene-Kapazität von γ' genannt, und die Kurve $s \in (0,t] \mapsto \gamma_s \in \mathbb{H}$ kann so parametrisiert werden, dass das Segment $\gamma[0,s]$ Halbebene-Kapazität s hat. Das Bild der Spitze γ_s des Segments $\gamma[0,s]$ unter der Abbildung $g_s \equiv g_{\gamma[0,s]}$ ist ein Punkt w_s auf der reellen Achse. Löwner zeigte, dass dann für jeden Punkt $z \in \mathbb{H}$

$$\partial_s g_s(z) = \frac{2}{g_s(z) - w_s}, \quad g_0(z) = z, \qquad (3)$$

gilt, und dass für die Menge H_t der Punkte in $\mathbb{H}$, für welche die Lösung bis zur Zeit t existiert, $H_t = \mathbb{H}\backslash\gamma(0,t]$ gilt. Dies heißt aber, dass jede einfache Kurve $s \mapsto \gamma_s$ in der oberen Halbebene, die auf der reellen Achse beginnt, durch eine Bewegung $s \mapsto w_s$ auf der reellen Achse dargestellt werden kann. Schramm fragte nun: Wenn γ eine einfache Zufallskurve ist, deren Verteilung konform invariant und Gebiets-Markov ist, was für einen Zufallsprozeß w_s erhält man dann auf der reellen Achse?. Er zeigte in [22], dass w_s ein vielfaches einer ein-dimensionalen Brown'schen Bewegung B_s sein muß. Umgekehrt bedeutet dies, dass man alle konform invarianten Gebiets-Markov Prozesse erhält, indem man die ‚chordale Löwner Gleichung' (3) mit $w_s = \sqrt{\kappa}B_s$ für eine positive Konstante κ löst. Die resultierende Verteilung auf Zufallskurven in der oberen Halbebene heißt SLE$_\kappa$. In neueren Arbeiten wird dieses Akronym oft als *Schramm-Loewner evolution with parameter* κ gelesen. Gemäß dem Riemann'schen Abbildungssatz sind alle einfach zusammenhängenden Gebiete, die mindestens zwei Randpunkte haben, konform äquivalent. Insbesondere ist damit SLE qua konformer Invarianz in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet D definiert, nämlich als Bild von SLE in $\mathbb{H}$ unter einer konformen Abbildung $f : \mathbb{H} \to D$. Dass dies wohldefiniert ist, ist leicht einzusehen.

Damit stellte sich nun die Frage, welcher Wert von κ zum Skalierungslimes eines bestimmten Modells gehört. Zum Beispiel: Welche SLE$_\kappa$-Kurve beschreibt Phasengrenzen der Perkolation (falls diese, wie zum damaligen Zeitpunkt vermutet, konform invariant sind), und welche beschreibt die Brownian Frontier? Lawler, Schramm, und Werner [11], und Steffen Rohde und Schramm [21] zeigten, dass die Eigenschaften der SLE$_\kappa$-Kurve stark von κ abhängen. Beispielsweise ist das Komplement von H_t (nennen wir es K_t) nur eine einfache Kurve für $\kappa \leq 4$. Für $4 < \kappa$ ist das Komplement von H_t eine kompakte Menge, die allerdings durch eine sich selbst berührende, aber nicht selbstüberschneidende Kurve erzeugt wird [21]. Für $\kappa \geq 8$ ist diese erzeugende Kurve raumfüllend. Diese drei Phasen sind in Abbildung 2 dargestellt.

Physikalisch betrachtet entsprechen verschiedenen Werten von κ verschiedene Universalitätsklassen. Lawler, Schramm und Werner identifizierten die Universalitätstklasse für ‚Ränder' der Brown'schen Bewegung, nämlich $\kappa = 6$, und konnten dann die Vermutung (2) beweisen und weitere Eigenschaften der kritischen Exponente finden [11, 12, 13, 14].

In 2001 bewies Stas Smirnov die konforme Invarianz des Skalierungslimes der Perkolationsphasengrenze [23]. Mit Werner zeigte er dann, dass diese durch SLE$_6$ beschrieben wird und sie berechneten kritische Exponenten, die von Physikern vorhergesagt worden waren. Zum Beispiel zeigten sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Nullpunkt mit einem Punkt der Entfernung R durch ein *cluster* einer Farbe verbunden ist, wie $R^{-5/48}$ abfällt wenn $R \to \infty$.

Dass $\kappa = 6$ der korrekte Parameterwert ist, stammt daher, dass nur für diesen Wert SLE die sogenannte *Lokalitätseigenschaft* hat. Seien $D' \subset D$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete, die die Randpunkte z und w gemein haben. Lokalität besagt, dass man zwischen einem SLE im Gebiet D von z nach w und einem SLE im Gebiet D' von z nach w nicht unterschei-

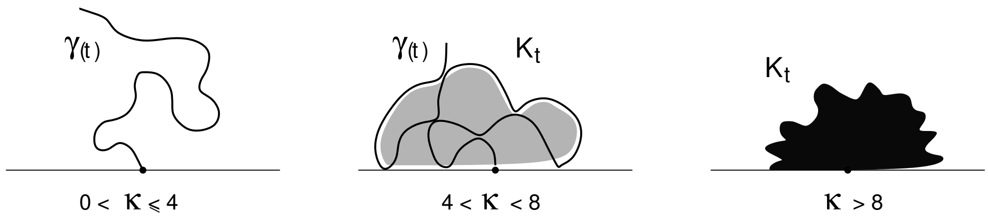


Abbildung 2. *Die Phasen der SLE-Spur (entnommen aus [7])*

den kann, solange die Kurve im Gebiet D' verläuft. Anders gesagt, die Zufallskurve ‚fühlt' den Rand erst, wenn sie ihn trifft. Diese Eigenschaft besitzt sowohl die Brown'sche Bewegung wie auch die Perkolationsphasengrenze, wie man sich leicht überzeugt.

Dass man Exponenten für SLE berechnen kann, rührt daher, dass man via der Löwner'schen Gleichung Itôs stochastischen Kalkül auf die SLE-Kurve anwenden kann. Mittels dieses Kalküls haben Lawler, Schramm und Werner auch gezeigt, dass SLE für $\kappa = 8/3$ (und nur für diesen Wert) die *Restriktionseigenschaft* besitzt [15]. Diese besagt: Wenn γ ein $\mathrm{SLE}_{8/3}$ in einem Gebiet D vom Randpunkt z zum Randpunkt w ist, D' ein Teilgebiet von D, dessen Rand z und w beinhaltet, dann ist die bedingte Verteilung von γ unter der Hypothese $\gamma \subset D'$ gerade die eines $\mathrm{SLE}_{8/3}$ im Gebiet D' von z nach w. Hier sind sowohl D als auch D' als einfach zusammenhängend anzunehmen. Diese Eigenschaft, zusammen mit der konformen Invarianz, impliziert, dass die Wahrscheinlichkeit der Hypothese gegeben ist durch

$$P(\gamma \subset D') = |\Phi'(z)\Phi'(w)|^{\alpha}$$

für eine Konstante α, die nicht von D und D' abhängt. Hierbei ist Φ eine konforme Abbildung von D' auf D, die z und w festhält. In [15] wird gezeigt, dass Restriktionsmaße (d. h. Maße die konform invariant sind und die Restriktionseigenschaft besitzen) für jedes $\alpha \geq 5/8$ existieren, nicht aber für $\alpha < 5/8$. Mittels der Gebiets-Markov-Eigenschaft läßt sich zeigen, dass $\mathrm{SLE}_{8/3}$ das Restriktionsmaß zum Exponenten $\alpha = 5/8$ ist. Es ist das einzige Restriktionsmaß, das von einfachen Kurven getragen wird und es wird vermutet, dass es der Skalierungslimes des *self-avoiding random walk* ist. Roland Friedrich und W. Werner haben gezeigt, dass die Restriktionseigenschaft von $\mathrm{SLE}_{8/3}$ zu Höchstgewichts-Darstellungen der unendlichdimensionalen Lie Algebra der Gruppe der Diffeomorphismen des Einheitskreises führt [6]. Damit war eine direkte Verbindung zur konformen Feld-Theorie geschaffen worden, die auch von Physikern weiterverfolgt wurde [2, 7].

Vom Standpunkt der statistischen Mechanik ist es natürlich, Phasengrenzen in allgemeineren Gebieten zu betrachten, etwa in einem Ringgebiet oder auf einem Torus. Aus der Sicht der konform invarianten Maße ist es natürlich, 2-dimensionale Gebilde zu betrachten, die durch eine konforme Struktur gegeben sind, d.h. Riemann'sche Flächen. Das wesentlich neue an der Theorie der konform invarianten Maße auf solchen Gebilden ist der Umstand, dass topologisch gleiche Gebilde in verschiedene konforme Äquivalenzklassen fallen. Zum Beispiel sind zwei Ringgebiete nur dann konform äquivalent, wenn der Quotient der Radien des ersten Ringgebietes gleich dem des zweiten Ringgebietes ist. Der Quotient der Radien ist eine konforme Invariante, der Modul des Ringgebiets. Kompliziertere Gebilde haben mehrere Moduli. Dies hat zur Folge, dass es für solche Gebilde eine reichere Klasse von konform invarianten Maßen gibt, die Gebiets-Markov sind, [3]. Aus Sicht der statistischen Mechanik überrascht das nicht, da etwa eine Phasengrenze in einem Ringgebiet, die zwei Randpunkte auf dem äußeren Randkreis verbindet, in unterschiedlicher Weise mit dem inneren Randkreis ‚wechselwirken' kann.

In [25] konstruiert und beschreibt Wendelin Werner ein natürliches Maß auf der Menge der einfachen (überschneidungsfreien) geschlossenen Kurven einer Riemann'schen Fläche. Genauer konstruiert er für jede Riemann'sche Fläche S ein σ-endliches Maß μ_S, so dass für jede konforme Abbildung Φ von einer Fläche S auf eine Fäche S' das Bildmaß von μ_S unter Φ gerade $\mu_{S'}$ ist, und so, dass man für jede Fläche S und jede Fläche $S' \subset S$ das Maß $\mu_{S'}$ aus dem Maß μ_S erhält, indem man letzteres auf diejenigen einfachen, geschlossenen Kurven beschränkt, die in S' enthalten sind. Er zeigt weiter, dass $\{\mu_S\}$ bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstante die einzige Familie von Maßen mit diesen Eigenschaften ist. Die Konstruktion – der schwierigste Teil des Satzes – hebt in genialer Weise Eigenschaften von planarer Brown'scher Bewegung und $\mathrm{SLE}_{8/3}$ erst von einfach zusammenhängenden Gebieten zu Ringgebieten und dann zu Riemann'schen Flächen. Die Tatsache, dass dieses Maß das einzige solche Maß ist, läßt es als fundamentales Objekt erscheinen. Es ist zum einen verbunden mit *conformal welding* und der Konstruktion der ‚Brown'schen Bewegung auf der Gruppe der Diffeomorphismen des Einheitskreises' [19]. Zum anderen haben Maxim Kontsevich und Yuri Suhov die Vermutung aufgestellt, dass das von Werner konstruierte Maß ein Mitglied einer ein-parametrigen Familie von Maßen auf Jordan Kurven ist, die Werte in einer gewissen Potenz eines bestimmten Determinanten-Bündels nehmen und Phasengrenzen kleiner massiver Störungen konformer Feld-Theorien beschreiben [9].

Wie diese kurze Auswahl und Beschreibung hoffentlich deutlich macht, hat Wendelin Werners Arbeit wesentlich zur geradezu revolutionären Entwicklung unseres Verständnisses konform invarianter Maße während der letzten Jahre beigetragen. Vor allem aber hat seine Arbeit die Tür zu einem weiteren, tieferen Verständnis solcher Maße und ihrer Beziehung zur konformen Feld-Theorie weit aufgestoßen.

Literatur

[1] Bauer, M., Bernard, D., *2D growth processes: SLE and Loewner chains*, Phys. Rept. (2006) Vol. 432, 115–221, arXiv:math-ph/0602049.

[2] Bauer, M., Bernard, D., *SLE martingales and the Virasoro algebra*, Phys. Lett. B (2003) Vol. 557, 309–316.

[3] Bauer, R. O., Friedrich, R., *On radial stochastic Loewner evolution in multiply connected domains*, J. Funct. Anal. (2006) Vol. 237, 565–588.

[4] Duplantier, B., *Random walks and quantum gravity in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. (1998) Vol. 81, No. 25, 5489–5492.

[5] Duplantier, B., Kwon, K.-H., *Conformal invariance and intersections of random walks*, Phys. Rev. Lett. (1988) Vol. 61, No. 22, 2514–2517.

[6] Friedrich, R., Werner, W., *Conformal restriction, highest-weight representations and SLE*, Comm. Math. Phys. (2003) Vol. 243, 105–122.

[7] Gruzberg, I. A., *Stochastic geometry of critical curves, Schramm-Loewner evolutions, and conformal field theory*, J. Phys. A (2006) Vol. 39, 12601–12656.

[8] Knizhnik, V. G., Polyakov, A. M., Zamolodchikov, A. B., Mod. Phys. Lett. A (1988) Vol 3, 819.

[9] Kontsevich, M., Suhov, Y., *On Malliavin measures, SLE and CFT*, arXiv:math-ph/0609056.

[10] Lawler, G., Conformally invariant processes in the plane, American Mathematical Society, Rhode Island, 2005.

[11] Lawler, G., Schramm, O., Werner, W., *Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents*, Acta Math. (2001) Vol. 187, 237–273.

[12] Lawler, G., Schramm, O., Werner, W., *Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents*, Acta Math. (2001) Vol. 187, 275–308.

[13] Lawler, G., Schramm, O., Werner, W., *Values of Brownian intersection exponents III: Two-sided exponents*, Ann. Inst. Henri Poincaré PR (2002) Vol. 38, 109–123.

[14] Lawler, G., Schramm, O., Werner, W., *Analyticity of intersectionexponents for planar Brownian motion*, Acta Math. (2002) Vol. 189, 179–201.

[15] Lawler, G., Schramm, O., Werner, W., *Conformal restriction: the chordal case*, J. Amer. Math. Soc., (2003) Vol. 16, 917–955.

[16] Lawler, G., Werner, W., *Intersection exponents for planar Brownian motions*, Ann. Probab., (1999) Vol. 27, No. 4, 1601–1642.

[17] Lawler, G., Werner, W., *Universality for conformally invariant intersection exponents*, J. Eur. Math. Soc. (2000) Vol. 2, 291–328.

[18] Löwner, K., *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I.*, Math. Ann. (1923) Vol. 89, 103–121.

[19] Airault, H., Malliavin, P., Thalmaier, A., *Canonical Brownian motion on the space of univalent functions and resolution of Beltrami equations by a continuity method along stochastic flows*, J. Math. Pures Appl. (9) 83 (2004), no. 8, 955–1018.

[20] Mandelbrot, B., The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982.

[21] Rohde, S., Schramm, O., *Basic properties of SLE*, Ann. of Math. (2) (2005) Vol. 161, no. 2, 883–924.

[22] Schramm, O., Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, Israel J. Math. (2000) Vol. 118, 221–288.

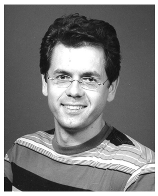
[23] Smirnov, S., *Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits*, C. R. Acad. Sci. Paris S. I. Math. (2001), Vol. 333, no. 3, 239–244.

[24] Werner, W., Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions, Lectures on probability theory and statistics, 107–195, Lecture Notes in Math., 1840, Springer, Berlin, 2004.

[25] Werner, W., *The conformally invariant measure on self-avoiding loops*, arXiv:math.PR/0511605.

Adresse des Autors

Prof. Dr. Robert O. Bauer
Altgeld Hall
Department of Mathematics
University of Illinois at
Urbana-Champaign
1409 West Green Street
Urbana, IL 61801, USA
rbauer@math.uiuc.edu



Robert Bauer ist 1968 in Freiburg im Breisgau geboren. Studium in Heidelberg (1990–1992) und an der University of Illinois at Urbana-Champaign (1992–1997), Postdoc am Institute for Advanced Study in Princeton, New Jersey (1997–1998), und am Georgia Institute of Technology in Atlanta, Georgia (1998–2001). Seit 2001 an der University of Illinois at Urbana-Champaign (Assistant Professor 2001–2007/Associate Professor 2007–).