Der Satz von Green-Tao

Valentin Blomer

Terence Tao

Primzahlen seien zum Multiplizieren erfunden worden, nicht zum Addieren, zitiert Gelfand den russischen Physiker Lev Landau. Trotzdem haben die additiven Eigenschaften der Primzahlen Generationen von Mathematikern (und Laien) fasziniert, und neben Fortschritten bei konkreten Problemen sind eine ganze Reihe leistungsfähiger und vielseitig einsetzbarer Methoden entwickelt worden.

Ein großer Durchbruch gelang – in Zusammenarbeit mit Ben Green – dem australischen Mathematiker Terence Tao von der University of California at Los Angeles, der im Sommer 2006 in Madrid die Fields-Medaille verliehen bekam. Zuvor hatte er bereits den Salem-Preis, den Bôcher-Preis, den Clay Research Award und eine Reihe weiterer Auszeichnungen erhalten. Im Jahr 2007 wurde er zum Fellow of the Royal Society (FRS) ernannt und bekam die Medaille der Australian Mathematical Society.

Tao kommt ursprünglich aus der Schule der harmonischen Analysis. Er promovierte 1996 (mit gerade noch 20 Jahren) bei Elias Stein in Princeton über „Three Regularity Results in Harmonic Analysis“. Unter Verwendung geometrischer und kombinatorischer Ideen hat er hier bahnbrechende Resultate erzielt, insbesondere im Zusammenhang mit der Kakeya-Vermutung, der Bochner-Riesz-Vermutung und der Beschränkungsvermutung¹ (z. B. [1, 14, 16, 19, 23]). Sein Arbeitsgebiet umfasst jedoch auch partielle Differentialgleichungen, etwa Wellengleichungen und nichtlineare Schrödingergleichungen (z. B. [2, 3]); seine fundamentalen Arbeiten hier spielten eine wichtige Rolle bei der Verleihung des Bôcher-Preises und der Fields-Medaille. Dazu kommen Operatortheorie, Signalanalyse, kombinatorische Geometrie und additive Zahlentheorie. Aus der Fülle seiner weit über 100 Arbeiten soll hier über den Satz von Green-Tao [9] berichtet werden. Darstellungen dieses Resultats und seiner Beweismethoden finden sich zum Beispiel in [8, 15, 20, 21]. Ich danke Jim Colliander für nützliche Hinweise.

Satz (Green-Tao [9], 2004). Die Primzahlen enthalten beliebig lange arithmetische Progressionen, d. h. für jede natürliche Zahl $k \geq 3$ gibt es eine Folge $p_1, \dots, p_k$ von Primzahlen mit $p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \dots = p_k - p_{k-1}$. Genauer gilt sogar folgendes: Es gibt eine Konstante $\delta_k > 0$, so dass

$$\#\{(n, d) \in [1, N]^2 \mid n, n + d, \dots, n + (k - 1)d \text{ prim}\} \geq \delta_k \frac{N^2}{(\log N)^k}.$$

Zum Beispiel ist $7, 37, 67, 97, 127, 157$ eine arithmetische Progression der Länge $k = 6$ aus Primzahlen. 2004 fanden Frind, Underwood und Jobling eine Progression der Länge 23 mit Anfangsglied $\approx 5.6 \cdot 10^{13}$, aber die Existenz einer solchen Progression könnte natürlich nur eine sporadische Laune der Natur sein. Man beachte, dass der Satz zwar beliebig lange Progressionen aus Primzahlen garantiert, unendlich lange gibt es jedoch nicht, denn $n + jd$ ist für $j = n$ sicher nicht prim.

Heuristiken

Warum ist der Satz von Green-Tao überhaupt plausibel? Da die Primzahlen keinem direkten Bildungsgesetz genügen, sondern eher zufällig verteilt zu sein scheinen, könnte man probabilistisch argumentieren: Nach dem Primzahlsatz

$$\pi(x) := \#\{p \leq x \mid p \text{ prim}\} \sim \frac{x}{\log x} \quad (1)$$

beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine „zufällig gewählte“ Zahl n prim ist, ungefähr $1/\log n$. Wenn man nun zufällig einen Startwert $n \leq N$ und eine Differenz $d \leq N$ wählt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die k Zahlen $n, n + d, n + 2d, \dots, n + (k - 1)d$ alle prim sind, etwa $1/(\log N)^k$. Es sollte also ungefähr $N^2/(\log N)^k$ viele Progressionen der Länge k mit Startwert und Differenz höchstens N geben. Dabei haben wir stillschweigend die Annahme gemacht, dass die Ereignisse „ n prim“ und „ $n + d$ prim“ unabhängig sind. Das

¹ Normalerweise bekannt als restriction conjecture

ist offenbar nicht der Fall, wie man zum Beispiel für $d = 1$ sieht: Ist $N > 2$ prim, so $N + 1$ niemals prim. Umgekehrt: Ist $d = 2$ und N prim, so erhöht sich die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass $N + 2$ prim ist, auf $2/\log N$, denn wir wissen bereits, dass $N + 2$ ungerade ist. Diese Effekte lassen sich allerdings leicht in den Griff bekommen; sie rühren von offensichtlichen Teilbarkeits- und Kongruenzbedingungen her oder – etwas vornehmer ausgedrückt – von den p -adischen Obstruktionen der verschiedenen nichtarchimedischen Komplettierungen $\mathbb{Q}_p$ von $\mathbb{Q}$. Für jede Primstelle p bekommen wir einen Korrekturfaktor, so dass die richtige Vermutung lautet:

Vermutung: Für festes $k \geq 3$ gilt

$$\#\{(n, d) \in [1, N]^2 \mid n, n + d, \dots, n + (k - 1)d \text{ prim}\} \sim \gamma_k \frac{N^2}{(\log N)^k} \quad (2)$$

mit $N \rightarrow \infty$, wobei $\gamma_k = \prod_p \alpha_p(k)$ ein explizit angebares, absolut konvergentes Produkt über alle Primzahlen ist mit $\gamma_k = e^{(1+o(1))k \log \log k}$ für $k \rightarrow \infty$.

Sollte diese Vermutung stimmen, so gibt es offenbar für jedes feste k eine (sogar sehr viele) arithmetische Progressionen der Länge k , wenn man N nur genügend groß wählt, etwa $N = k^k$. Insbesondere liefert der Satz von Green–Tao bis auf eine Konstante die vermutete Größenordnung für die Anzahl der betrachteten arithmetischen Progressionen.

Neben probabilistischen Überlegungen wird die Vermutung auch durch eine Methode von Hardy und Littlewood gestützt. Die um 1920 entwickelte und seitdem stark ausgebauten Kreismethode ist eines der mächtigsten analytischen Werkzeuge in der additiven Zahlentheorie und geht zum Beispiel für $k = 3$ von folgendem Ansatz aus: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$f(\alpha) := \sum_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} e^{2\pi i p \alpha}$$

eine endliche Exponentialsumme über Primzahlen². Dann gilt

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^1 f(\alpha)^2 f(-2\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{p_1, p_2, p_3 \leq N} \int_0^1 \exp(2\pi i(p_1 + p_2 - 2p_3)\alpha) d\alpha \\ &= \#\{(p_1, p_2, p_3) \in [1, N]^3 \mid p_1 - p_3 \\ &\quad = p_3 - p_2, \text{ alle } p_j \text{ prim}\}, \end{aligned}$$

denn der Integrand ist 1, wenn $p_1 + p_2 - 2p_3 = 0$ ist, und 0 sonst. Die rechte Seite ist im wesentlichen die Größe, die wir zählen wollen, also muss das Integral I berechnet oder abgeschätzt werden. Dazu beobachten wir, dass f für $\alpha = 0$ leicht auszuwerten ist: $f(0) = \pi(N)$. Ähnlich findet man zum Beispiel³

$$\begin{aligned} f(1/3) &= 1 + e^{2\pi i/3} \#\{p \leq N \mid p \text{ prim}, \\ &\quad p \equiv 1 \pmod{3}\} \\ &\quad + e^{4\pi i/3} \#\{p \leq N \mid p \text{ prim}, \\ &\quad p \equiv 2 \pmod{3}\}. \end{aligned}$$

Allgemein kann der Integrand von I an rationalen Stellen $\frac{a}{q}$ mit nicht zu großem Nenner gut approximiert werden, wenn man hinreichend gut über die Verteilung von Primzahlen in Restklassen modulo q Bescheid weiß. Aus Stetigkeitsgründen kann man die Approximationen auf eine kleine Umgebung dieser rationalen Punkte fortsetzen. Das Integral über diesen Teil des Einheitsintervalls liefert genau den vermuteten Hauptterm. Wenn man nun den Integranden abseits von rationalen Stellen durch andere Methoden kontrollieren kann, kann das Restintegral als Fehlerterm identifiziert werden, und (2) ist bewiesen. Für $k = 3$ ist das tatsächlich möglich, und wurde von van der Corput [4] 1939 durchgeführt.

Ein weiterer Ansatz besteht darin, (2) kombinatorisch mit Hilfe der Einschluss-Ausschluss-Formel bzw. des Siebs des Eratosthenes zu beweisen. Um in einer Menge $S \subseteq [1, N]$ die Primzahlen zu zählen, muss man von der Gesamtzahl erst alle Vielfachen von 2 abziehen, dann alle Vielfachen von 3 (dabei aber die zweimal abgezogenen Vielfachen von 6 wieder addieren) und so fort bis zur größten Primzahl unterhalb von $\sqrt{N}$. Das liefert eine Summe von $2^{\pi(\sqrt{N})}$ Termen mit wechselnden Vorzeichen, die sich nicht gut kontrollieren lässt. Die Siebtheorie stellt kombinatorische Mittel zur Verfügung, mit denen in vielen Fällen ein leicht modifiziertes Verfahren („Sieb“) zumindest bis N^δ für ein (kleines, aber festes) $\delta > 0$ durchgeführt werden kann. Eine Zahl $s \in S$, die nur durch Primzahlen $p > N^\delta$ teilbar ist, hat höchstens $1/\delta$ viele Primfaktoren; auf diese Weise findet man also „Fastprimzahlen“ in S . Ein Sieb lässt sich allgemeiner auch auf k -Tupel von Zahlen, etwa arithmetische Progressionen der Länge k , anwenden. E. Grosswald [12] konnte 1980 zeigen, dass es arithmetische Progressionen beliebiger Länge in Fastprimzahlen gibt; genauer: Für jedes $k \geq 3$ gibt es eine natürliche Zahl $A = A(k)$, so dass es eine (sogar viele) arithmetische Progressionen der Länge k von

² Da f eine 1-periodische Funktion ist, kann sie auch als Funktion auf dem Einheitskreis S^1 aufgefasst werden. Daher kommt der Name Kreismethode.

³ Der erste Summand 1 kommt von der Primzahl 3

Zahlen gibt, die höchstens A Primfaktoren besitzen. Kreis- und Siebmethode können kombiniert werden: Heath–Brown [13] bewies 1981, dass es unendlich viele Progressionen aus vier Zahlen gibt, von denen drei prim sind und die vierte höchstens zwei Primteiler besitzt.

Schließlich könnte man hoffen, dass man gar keine arithmetischen Eigenschaften der Primzahlen benötigt, sondern allein die aus dem Primzahlsatz gewonnene Dichte (1) ausreicht, um arithmetische Progressionen zu garantieren. Dies wird seit langem vermutet, wurde aber noch nicht bewiesen. Ein berühmter Satz von van der Waerden [25] (1927) besagt, dass für jede disjunkte Zerlegung $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^n S_j$ von $\mathbb{N}$ in endlich viele Teilmengen S_j wenigstens eine Teilmenge beliebig lange arithmetische Progressionen enthält. Durch eine sehr geschickte Anwendung der Kreismethode zeigte der Fields-Medaillen-Träger Klaus Roth [17] 1956, dass für eine geeignete Konstante $c > 0$ jede Menge $S \subseteq [1, N]$ mit Kardinalität $\#S \geq cN/\log \log N$ eine arithmetische Progression der Länge 3 enthält. Einer der wichtigsten Sätze in diesem Rahmen ist der Satz von Szemerédi [18] (1975): Für $S \subseteq \mathbb{N}$ sei $d^*(S) := \limsup \#(S \cap [1, N])/N$ die obere Dichte. Gilt nun $d^*(S) \geq c > 0$, so besitzt S beliebig lange arithmetische Progressionen. Szemerédis Beweis benutzt unter anderem van der Waerdens Satz. Später wurden eine ganze Reihe von anderen Beweisen gefunden, zum Beispiel von Furstenberg [5] (1977) und von Gowers [7] (2001), der sogar schärfer zeigte: Es gibt Konstanten $c_k, d_k > 0$, so dass jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ mit $\#(S \cap [1, N]) \geq c_k N (\log \log N)^{-d_k}$ eine Progression der Länge k enthält. Für die Primzahlen reicht das nach (1) leider noch nicht. Erdős und Turan vermuteten 1936 allgemeiner, dass jede Teilmenge von $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ unendlich lange arithmetische Progressionen enthält, falls $\sum 1/a_j$ divergiert (dies ist für die Primzahlen der Fall). Diese Vermutung ist offen; es nicht einmal bekannt, ob eine solche Menge stets arithmetische Progressionen der Länge 3 enthält.

Beweisideen

Obwohl keine der im letzten Abschnitt vorgestellten Heuristiken einen Beweis von (2) liefert, spielen sie alle beim Beweis des Satzes von Green–Tao eine wichtige Rolle. Die Grundidee besteht darin, bei Mengen zwischen solchen zu unterscheiden, die sich wie Zufallsmengen verhalten (Pseudozufallsmengen), und solchen, die eine gewisse Struktur tragen. Für Pseudozufallsmengen kann man probabilistisch argumentieren, während man im anderen Fall die spezielle Struktur ausnutzen kann. Die Hoffnung

ist, allgemeine Mengen in einen zufälligen und einen strukturierten Anteil zu zerlegen, und in beiden Fällen hat man eine geeignete Methode parat. Die Schwierigkeit ist natürlich, dies zu präzisieren.

Sucht man nach arithmetischen Progressionen in Primzahlen, so ist man mit offensichtlichen Effekten konfrontiert, die vom Restklassenverhalten der Primzahlen modulo „kleiner“ Zahlen q herrühren, zum Beispiel gibt es deshalb keine Progressionen in Primzahlen mit Abstand $d = 1$. Diese Effekte sind verantwortlich für den Hauptterm in der Kreismethode und, äquivalent dazu, für den Korrekturfaktor γ_k im probabilistischen Ansatz. Aus technischen Gründen werden diese Eigenschaften zunächst aus den Primzahlen herausoperiert: Während fast alle Primzahlen ungerade sind, ist die Zahlenfolge $(p-1)/2$ für $p \geq 3$ im wesentlichen gleichverteilt modulo 2, da es etwa gleich viele Primzahlen in den Restklassen 1 und 3 modulo 4 gibt. Durch weitere Skalierung kann man die Primzahlenfolge so modifizieren, dass sie in Restklassen bezüglich aller Primzahlen $p \leq P$ gleichverteilt ist: Dazu setzt man $W := \prod_{p \leq P} p$ und definiert „modifizierte Primzahlen“ als Zahlen $\tilde{p}$, so dass $W\tilde{p} + 1$ prim ist. Um nun (2) zu beweisen, sind zwei Dinge nötig: Die Begriffe „Struktur“ versus „Pseudozufallsmenge“ müssen mathematisch präzise gefasst werden, und es muss untersucht werden, welchen Einfluss diese Struktur im Falle der Primzahlen hat. Beides ist im Allgemeinen sehr schwer.

Als Vorstufe fassen wir Teilmengen $S \subseteq [1, N]$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ auf und betrachten die Fourierkoeffizienten der charakteristischen Funktion $1_S(x)$, wir betrachten also Exponentialsummen der Form

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{2\pi i s r/N} 1_S(s) \\ = \sum_{s \in S} e^{2\pi i s r/N}, \quad r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}; \end{aligned} \quad (3)$$

diese vergleichen wir mit den Fourierkoeffizienten des Erwartungswerts

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{2\pi i s r/N} (\#S/N), \quad r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \quad (4)$$

Ist die Differenz von (3) und (4) für alle $r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ klein, so ist dies ein guter Indikator dafür, dass S sich wie eine Pseudozufallsmenge verhält. In der Tat reicht dieser Ansatz für den Fall dreigliedriger Progressionen bereits aus, weshalb van der Corput mit seinem Beweis für $k = 3$ erfolgreich war. Die Definition von Pseudozufallsmengen hängt allerdings von den Objekten ab, die man untersucht. Will man längere Progressionen zählen, wird die Definition von Pseudozufallsmengen wesentlich schwieriger. Hier muss man die charakteristische Funktion

von S auch gegen quadratische Exponentialen der Form $e^{2\pi i s^2/N}$ oder noch komplizierterer gegen Terme der Art $e^{2\pi i s\sqrt{2}\{s\sqrt{3}\}}$ aufsummieren⁴. Die genaue Charakterisierung der richtigen Testfunktionen ist sehr schwer und ebenso der Nachweis, dass die charakteristische Funktion auf modifizierten Primzahlen nicht mit diesen Testfunktionen korreliert. Für $k = 4$ ist es Green und Tao im Nachhinein gelungen [10, 11], dies nachzuweisen. Im allgemeinen Fall ist dies allerdings in gewisser Hinsicht noch schwerer als das (immer noch ungelöste) Primzahlzwillingproblem; deshalb schlagen Green und Tao einen etwas anderen Weg ein.

Nach (1) sind die Primzahlen zu dünn, um den Satz von Szemerédi anzuwenden, selbst in Gowers' quantitativer Form. Die Idee von Green–Tao ist, die Primzahlen in eine geeignete, gut kontrollierbare und nicht wesentlich grössere Menge $\mathcal{P}'$ einzubetten; damit können sie eine relative Version des Satzes von Szemerédi beweisen: Jede hinreichend große Teilmenge von $\mathcal{P}'$ besitzt beliebig lange arithmetische Progressionen. Insbesondere besitzt damit auch jede nicht zu dünne Teilmenge der Primzahlen beliebig lange arithmetische Progressionen, etwa die Menge aller Primzahlen $p \equiv 1 \pmod 6$. Dass $\mathcal{P}'$ „gut kontrollierbar“ sein muss, heißt hier, dass sie sich in einem gewissen präzise definierten Sinn wie eine Zufallsmenge verhält. Sehr grob kann man sich $\mathcal{P}'$ als Fastprimzahlen vorstellen. Etwas genauer wird die Menge durch Anwendung des Selberg-Siebs konstruiert, und es ist mit rein klassischen Methoden möglich (wenn auch nicht ganz leicht), die nötigen Eigenschaften von $\mathcal{P}'$ nachzurechnen.

Die relative Version des Satzes von Szemerédi ist das Herzstück des Satzes von Green–Tao. Zur rigorosen Durchführung ist eine komplizierte und zum Teil neu entwickelte Maschinerie nötig. Zunächst ist es aus technischen Gründen einfacher, Mengen durch ihre charakteristischen Funktionen zu ersetzen und grundsätzlich mit nichtnegativen Funktionen anstatt mit Mengen zu arbeiten. In dieser Formulierung besagt der Satz von Szemerédi: Ist $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative, beschränkte Funktion mit $\sum_{n=1}^N f(n) \geq \delta N$ für ein $\delta > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \sum_{d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(n)f(n+d) \cdots \\ \cdot f(n+(k-1)d) \\ \geq c(k, \delta)N^2 + o(N^2) \end{aligned} \quad (5)$$

für eine positive Konstante $c(k, \delta)$. Ist dabei insbesondere f charakteristische Funktion einer Menge, so zählt die linke Seite die Anzahl

der arithmetischen Progressionen. Eine wichtige Rolle im Beweis von Green und Tao spielen die Methoden von Furstenbergs und Gowers' Beweis des Szemerédischen Satzes.

Dazu betrachten wir folgende Situation: Sei $(X, \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X), \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T : X \rightarrow X$ eine messbare Abbildung mit $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ für alle $A \in \mathcal{X}$ und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Hat nun $E \in \mathcal{X}$ positives Maß, so gibt es nach Furstenberg [5] ein $n \in \mathbb{N}$, so dass auch $\bigcap_{j=0}^{k-1} T^{-jn}E$ positives Maß hat. Weiterhin zeigt er die folgende kombinatorische Korrespondenz: Ist die obere Dichte $d^*(A)$ von A positiv, so gibt es ein Quintupel $(X, \mathcal{X}, \mu, T, E)$ wie oben mit $\mu(E) = d^*(A)$, so dass für alle $m_1, \dots, m_{k-1}$ gilt:

$$\begin{aligned} d^*(A \cap (A + m_1) \cap \dots \cap (A + m_{k-1})) \\ \geq \mu(E \cap T^{-m_1}E \cap \dots \cap T^{-m_k}E). \end{aligned}$$

Mit $m_j := jn$ folgt insbesondere der Satz von Szemerédi. Das Wichtige dieses erneuten Beweises des Satzes von Szemerédi ist die Einführung von Ergodentheorie in die Diskussion, die viele Ideen von Green–Tao inspiriert hat.

Gowers' Beweis benutzt harmonische Analysis. Eine wichtige Konstruktion ist dabei die U^d -Norm einer Funktion $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, die definiert wird durch

$$\|f\|_{U^d} := \left(\frac{1}{N^{d+1}} \sum_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{h} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d} \prod_{\omega \in \{0,1\}^d} f(x + \omega \cdot \mathbf{h}) \right)^{1/2^d}.$$

mit dem üblichen Skalarprodukt $\omega \cdot \mathbf{h}$ im $\mathbb{R}^d$. Diese Normen werden dazu verwendet, zu messen, wie weit eine Funktion f von ihrem Erwartungswert, d. h. der konstanten Funktion mit Wert $N^{-1} \sum_{n=1}^N f(n)$, entfernt ist. Ähnlich wie in (3) und (4) ist für die charakteristische Funktion einer Pseudozufallsmenge S der Abstand in allen U^d -Normen für $d \leq k-1$ klein⁵.

Der Beweis des Satz von Green–Tao beruht auf folgender Methode: Die charakteristische Funktion auf den modifizierten Primzahlen wird durch Multiplikation mit $\log N$ hochskaliert, so dass die neue Funktion f Erwartungswert 1 hat. Mittels des oben angesprochenen Selberg-Siebs bekommt man eine Majorante g , die sich gut kontrollieren lässt, weil sie von einer Pseudozufallsmenge (Fastprimzahlen) kommt. Der Satz von Szemerédi (5) ist für f nicht anwendbar, weil diese Funktion nicht beschränkt ist. Dafür zeigen Green und Tao, dass sich f im wesentlichen in zwei Teile zerlegen lässt: Der eine Teil ist in Bezug auf die Gowers-Norm U^{k-1} nah

⁴ hier bezeichnet $\{x\} = x - [x]$ den gebrochenen Anteil von x

⁵ Man erinnere sich daran, dass die Definition einer Pseudozufallsmenge von k abhängt.

an seinem Erwartungswert und damit kontrollierbar. Der andere Teil wird majorisiert durch den entsprechenden Teil von g . Man kann nun unter Ausnutzung der Eigenschaften von Pseudozufallsmengen zeigen, dass dieser Teil von g beschränkt ist. Deshalb ist auch der entsprechende Teil von f beschränkt, und für diesen lässt sich damit der originale Satz von Szemerédi (5) anwenden.

Der gesamte Beweis beinhaltet eine beeindruckende Mischung aus Zahlentheorie, Ergodentheorie, harmonischer Analysis und Kombinatorik. Die entwickelten Techniken sind flexibel einsetzbar. In [24] zeigen Tao und Ziegler, dass allgemeiner die Primzahlen beliebig lange polynomielle Progressionen enthalten: Für beliebige Polynome $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Z}[x]$ mit $q_1(0) = \dots = q_k(0) = 0$ gibt es (unendlich viele) $n, d \in \mathbb{N}$, so dass $n + q_1(d), n + q_2(d), \dots, n + q_k(d)$ allesamt prim sind. Ähnliche Resultate sind auch zum Beispiel für Gaußsche Primzahlen möglich [22]. Unter Anwendung der Resultate von Green–Tao wird in [6] bewiesen, dass jede Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ mit positiver oberer Dichte $d^*(S)$ unendlich viele Progressionen der Länge 3 enthält, so dass die gemeinsame Differenz eine Zahl der Form $p + 1$ ist (p prim). Es ist klar, dass die von Green und Tao entwickelten Methoden für die kombinatorische Zahlentheorie eine Vielzahl neuer Türen öffnen.

Literatur

- [1] J. Bennett, T. Carbery und T. C. Tao, *On the multilinear restriction and Kakeya conjectures*, Acta Math. **196** (2006), 261–302
- [2] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka und T. C. Tao, *Sharp global well-posedness for periodic and non-periodic KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and T* , J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 705–746
- [3] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka und T. C. Tao, *Global well-posedness and scattering in the energy space for the critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$* , erscheint in Annals of Math.
- [4] J. G. van der Corput, *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Ann. **116** (1939), 1–50
- [5] H. Furstenberg, *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256
- [6] N. Frantzikinakis, B. Host und B. Kra, *Multiple recurrence and convergence for sequences related to the prime numbers*, erscheint in J. Reine Angew. Math.
- [7] W. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, GAFA **11** (2001), 465–588
- [8] B. J. Green, *Long arithmetic progressions of primes*, erscheint in „Proceedings of the Gauß–Dirichlet conference“, Göttingen, CMI proceedings series, AMS (2007), Åg149–167.
- [9] B. J. Green und T. C. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, erscheint in Annals of Math.

- [10] B. J. Green und T. C. Tao, *Quadratic uniformity of the Möbius function*, erscheint in Annales de l'Institut Fourier
- [11] B. J. Green und T. C. Tao, *Linear equations in primes*, erscheint in Annals of Math.
- [12] E. Grosswald, *Arithmetic progressions of arbitrary length and consisting only of primes and almost primes*, J. Reine Angew. Math. **317** (1980), 200–208
- [13] D. R. Heath-Brown, *Three primes and an almost prime in arithmetic progression*, J. Lond. Math. Soc. **23** (1981), 396–414
- [14] N. Katz, I. Laba und T. C. Tao, *An improved bound on the Minkowski dimension of Besicovitch sets in $\mathbb{R}^3$* , Annals of Math. **152** (2000), 383–446.
- [15] B. Kra, *The Green–Tao Theorem on arithmetic progressions – an ergodic point of view*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (2006), 3–23
- [16] G. Mockenhaupt und T. C. Tao, *Kakeya and restriction phenomena in finite fields*, Duke Math. J. **121** (2004), 35–74
- [17] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. Lond. Math. Soc. **28** (1953), 245–252
- [18] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245
- [19] T. C. Tao, *The Bocher–Riesz conjecture implies the restriction conjecture*, Duke Math. J. **96** (1999), 363–376
- [20] T. C. Tao, *Long arithmetic progressions in the primes*, <http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/acnt.html>
- [21] T. C. Tao, *Arithmetic progressions and the primes*, Collect. Math. **2006**, Vol. Extra, 37–88
- [22] T. C. Tao, *The Gaussian primes contain arbitrarily shaped constellations*, J. Analyse Math. **99** (2006), 109–176
- [23] T. C. Tao, A. Vargas, L. Vega, *A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 967–1000
- [24] T. C. Tao und T. Ziegler, *The primes contain arbitrarily long polynomial progressions*, erscheint in Acta Math.
- [25] B. L. van der Waerden, *Ein Satz über die Klasseneinteilung von endlichen Mengen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 185–187

Adresse des Autors

Prof. Dr. Valentin Blomer
Department of Mathematics
Bahen Centre, 40 St. George St.
University of Toronto, Toronto, Ontario
Canada M5S 2E4
vblomer@math.toronto.edu

Valentin Blomer (Jg. 1977) studierte in Mainz, promovierte bei Jörg Brüdern in Stuttgart und habilitierte sich in Göttingen. Nach einem Jahr als Juniorprofessor in Göttingen ist er seit Sommer 2005 Assistant Professor an der University of Toronto. Sein Arbeitsgebiet ist analytische Zahlentheorie; für seine Forschung wurde er mit dem Heinz Maier-Leibnitz-Preis der DFG ausgezeichnet. Er ist verheiratet und hat eine Tochter. Die Arbeit des Autors wird durch das NSERC grant 311664-05 gefördert.