Eine K3-Fläche – oder: Eine Anmerkung zum Umschlag

Oliver Labs und Alessandra Sarti

K3-Flächen bekamen ihren Namen im 20. Jahrhundert vom französischen Mathematiker André Weil; er schreibt: *Im zweiten Teil meines Berichts geht es um kählersche Varietäten, K3 genannt, zu Ehren von Kummer, Kodaira, Kähler und des Berges K2 im Kaschmir-Gebirge.* Dies sind komplexe Flächen, deren exakte Definition zwar recht technisch ist, von denen man jedoch einen guten Eindruck bekommt, wenn man Flächen vom Grad 4 im komplexen Dreiraum betrachtet, die nämlich größtenteils K3-Flächen sind.

Im Gegensatz zu Flächen von allgemeinem Typ, zu denen beispielsweise nicht-singuläre Flächen vom Grad ≥ 5 gehören, ist die Klasse der K3-Flächen recht gut verstanden. Ihre eindimensionale Entsprechung sind elliptische Kurven, die in der Kryptologie Anwendungen haben. In höheren Dimensionen heißen ihre Verwandten Calabi-Yau-Varietäten, die für Physiker wegen ihren Beziehungen zur String–Theorie interessant sind.

Zu den bekanntesten Beispielen von K3-Flächen gehören die Kummer-Flächen; dies sind Flächen vom Grad 4 mit 16 Singularitäten. Solche Flächen studierte bereits in den 1860er Jahren der deutsche Mathematiker Ernst Eduard Kummer, weil er festgestellt hatte, dass keine Fläche vom Grad 4 mehr als 16 Singularitäten aufweisen kann. Die von ihm angegebenen Flächen haben die Gleichung

$$\mathrm{Ku}_\mu:\ \left(x^2+y^2+z^2-\mu^2\right)^2-\lambda\, y_0\, y_1\, y_2\, y_3 = 0,\qquad \lambda = \frac{3\mu^2-1}{3-\mu^2},$$

wobei wir für unsere mittlere Abbildung $\mu = 1.36$ und die y_i als Seiten eines regelmäßigen Tetraeders gewählt haben:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 - z - \sqrt{2}x, \\ y_1 &= 1 - z + \sqrt{2}x, \\ y_2 &= 1 + z + \sqrt{2}y, \\ y_3 &= 1 + z - \sqrt{2}y. \end{aligned}$$

Übrigens sind K3-Flächen immer zusammenhängend, für die reellen Bilder muss dies aber natürlich nicht zutreffen. Um dies zu veranschaulichen, zeigen das obere und untere Bild jeweils eine kleine Deformation $\mathrm{Ku}_{1.36} = \pm\varepsilon$ der singulären Fläche.

Die Fläche auf dem Cover dieser DMV–Mitteilungen zeigt eine Kummer-Fläche, die im Zusammenhang mit sogenannten Abelschen Flächen in einem Artikel von C. Birkenhake, H. Lange und D. van Straten 1989 auftauchte:

$$\begin{aligned} &m_1^2(y_0^2y_1^2 + y_2^2y_3^2) \\ &\quad + m_2^2(y_1^2y_3^2 + y_0^2y_2^2) + m_3^2(y_0^2y_3^2 + y_1^2y_2^2) \\ &\quad + 2m_1m_2(y_0y_1 + y_2y_3)(y_1y_3 - y_0y_2) \\ &\quad + 2m_1m_3(y_0y_3 - y_1y_2)(y_0y_1 - y_2y_3) \\ &\quad + 2m_2m_3(y_1y_2 + y_0y_3)(y_1y_3 + y_0y_2) \\ &\quad + m_0^2y_0y_1y_2y_3 = 0, \end{aligned}$$

wobei wir $m_0 = m_1 = m_2 = 1$ und $m_3 = -10$ gesetzt haben.

Auch in der Ausstellung *Imaginary* (www.imaginary2008.de) sind Kummer-Flächen zu sehen, da sie zu den prominentesten Beispielen von Flächen mit vielen Singularitäten gehören.

Adressen der Autoren
Oliver Labs
Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
66123 Saarbrücken
labs@math.uni-sb.de
http://www.oliverlabs.net

Alessandra Sarti
Johannes Gutenberg Universität Mainz
FB 08, Institut für Mathematik
Staudingerweg 9
55099 Mainz
sarti@mathematik.uni-mainz.de