Diskussion

Grußwort (21-2)

Beim Durchblättern alter Hefte der Mitteilungen stieß ich dieser Tage zufällig auf das Grußwort des Präsidenten der DMV, Jürg Kramer, in Heft 2 von 2013, in dem er schreibt: „Mit großer Sorge betrachtet die DMV jedoch die Entscheidung des Bundeslandes Bremen und die Diskussionen in Berlin und Baden-Württemberg, die Ausbildung nur noch in zwei Schulstufen zu differenzieren und damit das ehemalige Haupt- und Realschullehramt mit dem Gymnasiallehramt zu verschmelzen. Die DMV wird diese bildungspolitische Entwicklung genau verfolgen und sich zusammen mit unseren befreundeten Verbänden für eine Abkehr von dieser Initiative zur Nivellierung des gymnasialen und nichtgymnasialen Sekundarschullehramts einsetzen."

Obwohl das jetzt schon recht lange her ist, denke ich, dass das Thema nach wie vor aktuell und diskussionswürdig ist.

Zweifelsohne wehrt sich die DMV, vertreten durch ihr Präsidium, mit Recht dagegen, dass die mathematische Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer für die Sekundarstufen im Zuge von Umstrukturierungen verwässert wird. Meiner Ansicht nach gehört es dagegen nicht zu den Aufgaben der DMV und ihres Präsidiums, in der (jahrzehntelangen) Diskussion um das hergebrachte dreigliedrige Schulsystem in Deutschland Stellung zu nehmen, das ist jedenfalls eine Frage, in der ich mich als Mitglied von der DMV und ihren Gremien weder für die eine Seite noch für die andere Seite vereinnahmen lassen möchte. Ich würde es daher begrüßen, wenn weitere Stellungnahmen der DMV zu diesem Problemkreis sich nicht die Erhaltung des gymnasialen Lehramts (und damit offenbar auch des Gymnasiums) zum Ziel machen würden, sondern sich darauf konzentrierten, einer Aufweichung der mathematischen Standards in der Ausbildung für die Sekundarstufen, insbesondere (aber nicht nur) für den Unterricht in der Sekundarstufe 2, entgegenzutreten, ganz gleich, ob dieser nun in einer der hergebrachten Schulformen, einer Gesamtschule oder in einer Gemeinschaftsschule erfolgt.

Rainer Schulze-Pillot, Saarbrücken

Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik (22-2)

Der falsche Schein des Modellierens. Der rezent in den *Mitteilungen* ausgetragene Disput um die Zentralabituraufgaben Mathematik in Hamburg hat zwei Aspekte, die zwar in Synergie verwoben, aber im Prinzip unabhängig sind: Der erste bezieht sich auf das innerhalb des letzten Jahrzehnts gesunkene allgemeine mathematische Niveau des Mathematikunterrichts. Der zweite Aspekt betrifft eine besondere Art von sogenannten *Modellierungsaufgaben.*

Obwohl diese Bezeichnung einen realen Anwendungsbezug suggeriert, ist dieser jedoch in den allerwenigsten Fällen gegeben. Vielmehr zeichnen sich diese Aufgaben dadurch aus, dass ein in Formeln vorgegebener mathematischer Sachverhalt durch Text mehr oder minder erfolgreich eingekleidet wird. Vom Schüler wird dann nur erwartet, allen Text wegzulassen und wieder zur Formel zu finden. Das stellt nur eine *Scheinmodellierung* dar und steht im krassen Widerspruch zum eigentlichen Prozess des Modellierens.

Schon die Fachdidaktiker Henn und Müller [4] konstatierten: „Leider sind die meisten der so genannten Modellierungsaufgaben in der Schule und insbesondere in der Abiturprüfung in keiner Weise Modellierungen in unserem Sinn. Fast immer geht man von einer mehr oder weniger komplizierten Funktionsgleichung aus, die angeblich eine Skischanze, einen Turm, einen Spielplatz oder ein anderes Konstrukt beschreibt. Nun muss mit dieser Funktion eine übliche Funktionsuntersuchung gemacht werden. Das Ganze ist dann aber keine Modellierungsaufgabe, sondern spielt sich ganz auf der Seite der Mathematik ab."

Die Hamburger Abituraufgabe „Die Erlöserkirche" von 2011 ist dafür ein einschlägiges Beispiel, wo schon die Hilfestellungen eigentlich keinen Entkleidungsschritt mehr nötig machen.

In der fachdidaktischen Literatur wird im Prinzip eine detaillierte hierarchische Unterscheidung getroffen, aufsteigend von „eingekleideten Aufgaben", über „Textaufgaben" zu „Sachproblemen", wo aus letzteren die „Modellierungsaufgaben" als viel komplexere Probleme herausragen sollen [3, Kap. 1.3]. Diese Hierarchie ist in der Praxis längst kollabiert: Alles ist zur „Modellierung" geworden, was nicht schon vollständig mathematisch durchformalisiert ist.

Scheinmodellierungsaufgaben richten bei Schülern, Lehrern, Eltern und damit auch für das Fach Mathematik selbst einen großen Schaden an.

Erstens vermitteln solche Aufgaben ein völlig verzerrtes Bild von der Wissenschaft Mathematik und deren Rolle in der Gesellschaft. Dazu passt, dass deutschlandweit eine strukturierte Computer-Alphabetisierung in Form eines guten Informatikunterrichts kaum vorhanden ist. Zudem wird im naturwissenschaftlichen Unterricht nur noch wenig gerechnet. Während also den natürlichen Anwendungen der Mathematik der Eingang in den Schulunterricht verwehrt wird, soll das Surrogat Scheinmodellierungsaufgaben dieses Defizit übertünchen. Die verstärkte Anwendungsorientierung ist somit nicht echt, sondern nur vorgeschoben. Das weiß der Schüler natürlich nicht und fragt sich, ob die erlebte Art des Mathematikunterrichts wirklich ein Lernen für das Leben ist. Bei etwas gesundem Menschenverstand prägt sich ihm ein negatives Bild des Faches Mathematik ein [8].

Zweitens verkennt dieser Ansatz völlig die wirkliche Bedeutung von Abstraktion und innermathematischem Aufbau für die Anwendung der Mathematik. Wirkliche Anwendungen werden durch die geeignete Abstraktion oft überhaupt erst ermöglicht: Das Konzept des Grenzübergangs lieferte mit der Differential- und Integralrechnung jenen mathematischen Apparat, mit dem die klassische Physik einer überschaubaren Analyse zugänglich wurde. Bezüge zur Physik und Technik werden in Abituraufgaben jedoch mit Scheinmodellierungen dadurch untergraben, dass die „Modelle" nicht stimmig sind, sondern nur einem vorgedachten einfachen funktionalen Zusammenhang übergestülpt wurden [1, 8].

Ironischerweise beschädigt neben dem fehlenden elementarmathematischen Wissen [2, 7] gerade die fehlende Fähigkeit der Abiturienten zur Abstraktion die Anwendbarkeit der Schulmathematik selbst, und zwar als fachliche Grundlage bei der Aufnahme eines MINT-Studiums. Das ist der dritte fatale Fehler des vordergründig „nutzorientierten" Zugangs. In gewissem Maße spiegelt sich darin die Diskussion um die Rolle von Bildung und Ausbildung wider. Während ein vereinfachtes Verständnis von Ausbildung auf eine gute Vorbereitung auf den ersten Tag im Job zielt, soll einen die Bildung für das ganze restliche Leben wappnen [6].

DOI 10.1515/dmvm-2015-0003

„Dabei wäre alles ganz einfach" – wie in vielen anderen Bildungsfragen [5]. Die Mathematik ist eine nützliche Wissenschaft. Dann sollte es kein Problem sein, diesen Nutzen auch im Schulunterricht darzustellen. Es gibt schon für die Elementarmathematik in der Schule genügend viele konkrete Anlässe für entdeckendes Lernen und für die Entwicklung – durch die Lehrkraft angeleitet – von abstrakten Kalkülen, die in den gehörigen geschichtlichen Rahmen zu setzen sind [9]. Dass dies auch in heutiger Zeit nicht unmöglich ist, zumindest (noch) in Österreich, demonstriert die dortige erfolgreiche Schulbuchreihe „Das ist Mathematik" (für die Sekundarstufe I; aktuell herausgegeben von H. Humenberger).

Für die angehenden Lehrkräfte bedarf es eines gerüttelten Maßes an Fachwissen und intellektuellem Selbstbewusstsein, sich dem vorherrschenden didaktischen Mainstream reflektiert zu entziehen. Als Fachwissenschaftler sollten wir alles tun, um sie darin zu unterstützen!

Literatur

[1] A. Baumann: Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben" anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009. *Mathematikinformation* 55 (2011) 15–23 (www.mathematikinformation.info/pdf2/MI55Baumann.pdf).

[2] A. Baumann: Mathe-Lücken und Mathe-Legenden – Einige Bemerkungen zu den mathematischen Fähigkeiten von Studienanfängern. *Die Neue Hochschule* 2013, Heft 5, S. 154–157.

[3] R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.): *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule – theoretische und didaktische Hintergründe*. Springer Spektrum, 2013.

[4] H.-W. Henn, J.H. Müller: Von der Welt zum Modell und zurück. In: R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.): *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule – theoretische und didaktische Hintergründe*. Springer Spektrum, 2013, Kap. 10, S. 202–220.

[5] K.P. Liessmann: *Geisterstunde: Die Praxis der Unbildung – eine Streitschrift*. Paul Zsolnay Verlag 2014.

[6] J. Nida-Rümelin: *Der Akademisierungswahn – zur Krise beruflicher und akademischer Bildung*. Edition Körber-Stiftung, Hamburg, 2014.

[7] A. Schwenk-Schellschmidt: Mathematische Fähigkeiten zu Studienbeginn. Symptome des Wandels? Thesen zur Ursache. *Die Neue Hochschule* 2013, Heft 1, S. 26–29.

[8] H. Walser: Die Modellierung des schönen Scheins. *Mathematikinformation* Nr. 55 (2011) 3–14.

[9] G.M. Ziegler: Mathematikunterricht liefert Antworten: Auf welche Fragen? *Mitteilungen der DMV* 19 (2011) 174–178.

Hans-Jürgen Bandelt, Hamburg
Timo Weidl, Stuttgart

Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik (22-2)

Die Kritik an den Hamburger Abituraufgaben im Artikel von Jahnke et al. ist sehr berechtigt, bezieht sie sich doch nicht nur auf den abnehmenden Schwierigkeitsgrad der Abituraufgaben im Laufe der Jahre 2005 bis 2013, sondern auch auf den Stil dieser Aufgaben, der inzwischen in fast allen Bundesländern Standard ist.

Die kompetenzorientierten „Modellierungsaufgaben" bringen nicht nur einen unnötigen Textwust, der eine „Einlesezeit" von ½ Stunde Dauer erfordert, sondern auch Pseudo-Anwendungen, die nicht der Realität entsprechen. Die im Artikel zitierte Analysis-Aufgabe „Halbinsel" beispielsweise erzählt folgendes:

> Ein neuer Praktikant erstellt für den Verlauf der nördlichen Strandlinie die Funktionsgleichung
>
> $$g(x) = -\tfrac{7}{90}x^2 + \tfrac{13}{6}x + 15 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 30.$$
>
> Der Projektleiter zweifelt dieses Ergebnis an und fordert seinen Praktikanten auf, exemplarisch für drei Punkte mit x-Werten aus dem Intervall [5; 25] zu überprüfen, ob der Funktionsgraph von g mit der Strandlinie übereinstimmt. Eine Abweichung der Funktionswerte von den gemessenen Werten (siehe Abbildung in der Anlage) von maximal 1 m soll akzeptiert werden.

So geht man in der Vermessungspraxis nicht vor. Man arbeitet mit Polygonen, nicht mit Polynomen. Im Hinblick auf ein Ingenieurstudium sind derartige Aufgaben kontraproduktiv.

Viele Mathematiker haben sich in der Diskussion um Kompetenzorientierung, taschenrechnerlastigen Mathematikunterricht und Mathematikdefizite der Studienanfänger schon zu Wort gemeldet, in Artikeln, in Diskussionen in der DMV und andernorts sowie in Arbeitskreisen, auch in Zusammenarbeit mit Didaktikern.

Deswegen habe ich mich sehr über den Diskussionsbeitrag von E. Chr. Wittmann (in 22-4) gewundert, der plötzlich die Mathematiker für den Mathematiknotstand verantwortlich macht, die angeblich keine Kommunikation mit den Didaktikern pflegen.

Es haben sich viele engagierte Mathematiker/innen an Hochschulen und Fachhochschulen in Arbeit gestürzt, die gar nicht zu Ihrem Aufgabenbereich in Lehre und Forschung gehört. Sie haben Brückenkurse konzipiert, elektronische Vorkurse programmiert oder andere Konzepte für die Studieneingangsphase in Mathematik durchgeführt, um die Defizite abzufangen, die durch verquere Bildungspolitik entstanden sind.

Eine Diskussion über die „Sinnhaftigkeit" von Modellierungsaufgaben (s. Kaiser/Busse in 22-2) mit den „Qualitätssicherern" der Bildungsadministration habe ich selbst schon vergeblich versucht. Ich habe mich bereits an das hessische Kultusministerium, das BMBF und das Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) in Berlin gewendet. Am IQB wird gerade ein bundesweiter Abituraufgabenpool erstellt. Mein Versuch, die guten Thüringer Abituraufgaben 2007-10 für den Abituraufgabenpool als Musteraufgaben vorzuschlagen, wurde mehrfach abgewimmelt. Es werden nur Aufgaben in den Pool aufgenommen, die den kompetenzorientierten „Bildungsstandards für das Mathematikabitur 2012" entsprechen.

Wenn Sie sich diese Bildungsstandards (mit Musteraufgaben ab S. 25 [vgl. http://tinyurl.com/lrbglqs, Anm. d. Red.]) ansehen, werden Sie unter anderem feststellen, dass keine Autoren angegeben sind. Das ist – nicht nur im wissenschaftlichen Umfeld – unüblich. (Das IQB weist sich als Institut unter dem Dach der Humboldt-Universität aus).

Astrid Baumann, Frankfurt

Mini-Monomath (22-4)

In den *Mitteilungen* 3/2014 habe ich Aufgabe 1 der Mathematik-Olympiade 2014 gesehen und sofort gedacht: ‚Diese Aufgabe könnte ich meinen Betriebsökonomie-Studierenden zeigen.' Mangels Zeit für eine geeignete Aufbereitung habe ich das bisher nicht getan, sodass ich über das Resultat nicht berichten kann.

Die Aufgabe lässt sich unmittelbar auf ein ökonomisches Standardproblem – die Suche nach der Produktionsmenge mit minimalen Stückkosten, dem sogenannten Betriebsoptimum – zurückführen. Kennt man dieses Problem, ist die Lösung ganz einfach. Der so entstehende Ansatz illustriert insbesondere die

Mächtigkeit grafischer Darstellungen. Obwohl grafische Vorgehensweisen oft sehr anschaulich, praktisch wichtig und wenig aufwändig sind, werden sie im Schulunterricht leider kaum geübt, wenn sie denn überhaupt als Lösungsmethode zugelassen werden. Im Studium führt das regelmäßig zu Verunsicherung, was man nun „darf" und was nicht, und häufig fällt die grafische Anschauung als eines der ersten Dinge dem Bemühen vieler Studierender zum Opfer, den Stoff eigenständig auf das in ihren Augen notwendige Minimum zu reduzieren. Immerhin zeigt nun eine „olympische" Aufgabe, dass schulische Beschränkungen auf das Rechnerische schade sind und das methodische Repertoire erheblich einschränken.

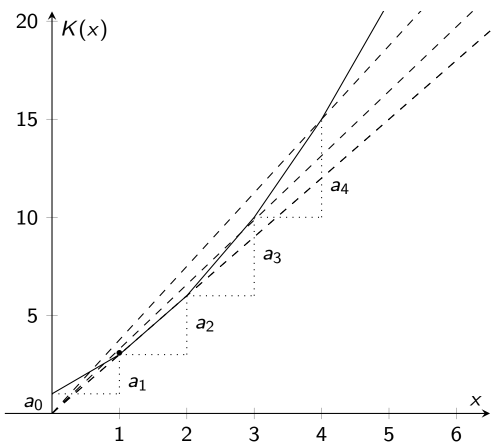
Zur Aufgabe: Wir interpretieren die Größen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ als Kosten in einem Produktionsprozess. Die Größe a_0 interpretieren wir als die Fixkosten der Produktion und für $n \geq 1$ interpretieren wir a_n als die Kosten für die Produktion der n-ten Einheit – ökonomisch gesprochen: die Grenzkosten. $K(n) := a_0 + \cdots + a_n$ sind dann die Gesamtkosten bei der Produktion von n Einheiten, und der mittlere Term

$$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n}$$

in der gegebenen Ungleichung entspricht den Stückkosten $K(n)/n$ bei einer Produktionsmenge von n Einheiten. Wir sollen also zeigen, dass eine eindeutig bestimmte Produktionsmenge existiert, für die die Stückkosten strikt höher sind als die Kosten der letzten produzierten Einheit (die Grenzkosten nach links), aber schwach niedriger als die Kosten der nächsten Einheit (die Grenzkosten nach rechts).

Das ist bei strikt positiven Fixkosten und steigenden Grenzkosten allerdings klar. Wegen $a_0 > 0$ sind für $n = 1$ die Stückkosten größer als die Grenzkosten nach links. Aufgrund der Voraussetzungen gehen die Grenzkosten für $n \to \infty$ gegen unendlich. Bei Ausweitung der Produktion werden die Stückkosten genau so lange abnehmen, wie die Grenzkosten unter den Stückkosten liegen. Die Stückkosten bilden damit zunächst eine fallende und die Grenzkosten eine steigende Folge, bis die Grenzkosten die Stückkosten übersteigen und dann auch die Stückkosten zu wachsen beginnen. Die gesuchte Produktionsmenge weist unter allen Produktionsmengen minimale Stückkosten auf und stellt mithin ein sogenanntes Betriebsoptimum dar.

Das Problem lässt sich sehr schön grafisch veranschaulichen. Durch lineare Interpolation erhält man eine konvexe (ökonomisch: progressive) Kostenfunktion $K\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ mit strikt positiven Fixkosten $K(0)$ und $K'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, wie im nachstehenden Diagramm:



Die Grenzkosten K' entsprechen jeweils den Steigungen der einzelnen Abschnitte der Kostenfunktion; die Stückkosten bei gegebener Produktionsmenge x werden durch die Steigung des Fahrstrahls vom Ursprung aus durch den Punkt $\big(x, K(x)\big)$ repräsentiert. Ein Betriebsoptimum liegt genau dann vor, wenn der Fahrstrahl minimale Steigung hat. Es erfüllt stets die Bedingung, dass die Steigung der Kostenfunktion nach links hin (schwach) kleiner, nach rechts hin (schwach) größer ist als die Steigung des Fahrstrahls. Die Existenz eines solchen Betriebsoptimums unter den gegebenen Voraussetzungen ist geometrisch offensichtlich; aufgrund der Formulierung in der Aufgabe sucht man das kleinste aller Betriebsoptima und dies garantiert die Eindeutigkeit.

Aus der Grafik erkennt man aber noch mehr:

- Welchen Wert a_0 hat, ist unerheblich, solange er strikt positiv ist. Die Voraussetzungen könnte man zu $a_0 > 0$ und $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ abschwächen.
- Die Einschränkung auf natürliche Kostenwerte ist unerheblich. Es genügt, dass die Werte $a_1, a_2, \ldots$ eine strikt monoton steigende Folge positiver reeller Zahlen bilden, welche gegen unendlich konvergiert.

Johannes Gerd Becker, Winterthur

Protokoll der Mitgliederversammlung (22-4)

Im vorletzten Berichtspunkt des Präsidenten wird eine Revision der Fächersystematiken der DFG erwähnt [vgl. hierzu S. 18 in diesem Heft, Anm. d. Red.]. Tatsächlich handelt es sich hierbei jedoch um eine Revision der amtlichen Fachsystematik des Statistischen Bundesamtes (DESTATIS), für die der Wissenschaftsrat (WR) im Rahmen des Projektes „Kerndatensatz Forschung" Empfehlungen erarbeitet hat und dabei im letzten Jahr neben vielen anderen Akteuren auch die DFG und Fachgesellschaften wie die DMV um Stellungnahmen und Vorschläge gebeten hat. Die Ergebnisse dieser Konsultationen hat der WR im Juni 2014 veröffentlicht (siehe http://tinyurl.com/ke9rmrv). Demnach soll es in Bezug auf die Mathematik keine Änderungen geben. Veröffentlichen wird DESTATIS seine revidierte Fachsystematik aber voraussichtlich erst Ende 2015.

Unabhängig davon erfolgt eine Überprüfung der Struktur der DFG-Fachkollegien und ihrer Fächer regelmäßig vor jeder Fachkollegienwahl durch den Senat der DFG. Die Mathematik mit dem Fachkollegium FK 312-01 firmiert in der DFG-Systematik als eigenständiges Fachgebiet im Wissenschaftsbereich „Naturwissenschaften". Für die kommende Wahlperiode wird es für die Mathematik hier keine strukturellen Veränderungen geben.

Christian Fischer und Frank Kiefer, DFG-Geschäftsstelle Bonn

In eigener Sache

Kurz vor Drucklegung wurde Jürg Kramers Beitrag „Zur Revision der Fächersystematiken" aus dem Dezemberheft der *Mitteilungen* in die vorliegende Ausgabe verschoben. Bedauerlicherweise wurde dabei aus den Augen verloren, dass diese Entscheidung eine Aktualisierung des „Grußwortes" hätte nach sich ziehen müssen.

Die Redaktion bittet um Entschuldigung.