Meistersterne in der Fußball-Bundesliga

Wolfgang Schief

Vor nicht allzu langer Zeit[1] beschäftigten wir uns mit der interessanten Frage, welches die größte mögliche Punktzahl ist, mit der eine Mannschaft der Fußball-Bundesliga am Ende der Saison auf einem Abstiegsplatz stehen kann. Nun wenden wir uns der Tabellenspitze der 1. Fußball-Bundesliga zu. Der FC Bayern München gewann in der Saison 2014/15 zum 24. Mal die Bundesliga-Meisterschaft (seit der Gründungssaison 1963/64). Schon in der Saison 2013/14, als der FC Bayern den 23. Titel gewann, fragte mich mein Sohn Ted, der FC Bayern-Fan ist und ein Kindertrikot des Bayern-Kapitäns Philipp Lahm besitzt, ob er sich denn jetzt ein neues Trikot schenken lassen müsste. Es ist nämlich so, dass sich auf den Trikots der Bundesliga-Mannschaften Sterne befinden, deren Anzahl von der Zahl der gewonnenen Titel abhängt. Spieler des FC Bayern (und übrigens keiner anderen Mannschaft) sind momentan berechtigt, 4 Meistersterne zu tragen (Abbildung 1).

Abbildung 1. *Vier Meistersterne auf dem Trikot des FC Bayern München (Photo: www.fcbayern.de)*

Die Frage ist also, ab wann einer Mannschaft 5 Sterne zugeordnet werden. Man sollte meinen, dass sich diese Frage im Zeitalter des Internets innerhalb von Sekunden beantworten ließe. Weit gefehlt! Dieser Mangel ist der Ursprung unseres kleinen Mathematikproblems, das wir jetzt studieren wollen.

Eine Lösung des Problems

Ein Blick auf die offizielle Regelung der Deutschen Fußball Liga zeigt folgenden Sachverhalt:

Ab 3 Meisterschaften:	1 Stern
Ab 5 Meisterschaften:	2 Sterne
Ab 10 Meisterschaften:	3 Sterne
Ab 20 Meisterschaften:	4 Sterne

Es scheint also keine Regel für mehr als 4 Sterne zu geben. Eine natürliche Reaktion (einer der Mathematik zugeneigten Person) auf diese ernüchternde Erkenntnis ist wohl der Versuch, eine einfache Formel zu finden, die obige Daten reproduziert, sich aber auch auf mehr als 4 Sterne anwenden lässt. Wenn $s(n)$ die Mindestanzahl der Titel bezeichnet, die nötig ist, um n Sterne zu bekommen, dann liegt es nahe, ein kubisches Polynom

$$s(n) = \alpha_3 n^3 + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0$$

durch obige Daten, d. h. $s(1) = 3$, $s(2) = 5$, $s(3) = 10$ und $s(4) = 20$, zu bestimmen. In der Tat, die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten α_k führt zu

$$s(n) = \frac{(n+1)(2n^2 - 5n + 12)}{6}.$$

Der Haken an dieser Formel ist allerdings, dass man zur Bestimmung von $s(n)$ eine Division mit 6 vornehmen muss, die zu einem Ergebnis von, sagen wir 41,6666... Meisterschaften im Falle von 5 Sternen führen könnte, was nicht besonders zufriedenstellend wäre (für die der Mathematik zugeneigte Person oder auch ein fußballfanatisches Kind). Bemerkenswerterweise tritt dieses Problem nicht auf! Man sieht sofort, dass $s(5) = 37$ und $s(6) = 63$. Weiterhin schließt man aus der Tatsache, dass der Zähler von $s(n)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, dass

$$s(6m + k) = \text{ganze Zahl} + s(k)$$

für ganzzahlige m und k ist. Jede ganze Zahl n lässt sich jedoch in $n = 6m + k$ für passendes ganzzahliges m und $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zerlegen und daher ist $s(n)$ ganzzahlig für beliebiges n. Zum Beispiel findet man das hübsche Ergebnis $s(7) = 100$.

Die mit klassischer Zahlentheorie vertrauten Leserinnen und Leser werden natürlich sofort anmerken, dass man das ganzwertige Polynom $s(n)$ als Linearkombination von Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben können muss.[2] In der Tat findet man

$$s(n) = 2\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + 2\binom{n}{0},$$

DOI 10.1515/dmvm-2015-0032

und da Binomialkoeffizienten ganzzahlig sind, bestätigt das umgekehrt die Ganzzahligkeit von $s(n)$. Es bleibt dennoch die Frage, warum sich das Polynom $s(n)$ als ganzwertig herausstellt.

Hat die Deutsche Fußball Liga Glück gehabt?

Man könnte jetzt vermuten, dass die Deutsche Fußball Liga eine glückliche Hand bei der Wahl der Sterne-Titel-Relation bewiesen hat. Computerexperimente lassen jedoch schnell erkennen, dass jede beliebige ganzzahlige Wahl der Daten $s(1), \dots, s(4)$ mit obiger Methode auf ganzzahliges $s(n)$ für beliebiges n zu führen scheint. Die einzige Einschränkung an die Daten ist allerdings die Bedingung, dass sich $s(n)$ als monoton wachsend herausstellen sollte. Es sei bemerkt, dass es sogar passieren kann, dass $s(n)$ negativ wird. Wir überlassen der geneigten Leserschaft die Untersuchung dieses interessanten Aspektes unseres Problems. Wir erwähnen hier nur, dass unser gerade berechnetes Polynom $s(n)$ die gewünschte Monotonieeigenschaft besitzt.

Für den Beweis der Ganzzahligkeit von $s(n)$ für beliebige Daten kann man eleganterweise auf die zentrale Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

für Binomialkoeffizienten zurückgreifen. Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ ist diese die Basis für die Konstruktion des Pascalschen Dreiecks in Abbildung 2. Jede Zahl im Pascalschen Dreieck ist die Summe der beiden direkt darüberliegenden Zahlen. Betrachtet man also die 1en als gegeben, so kann man das Pascalsche Dreieck sukzessive vervollständigen und der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist der k. Eintrag von links in der n. Zeile von oben.

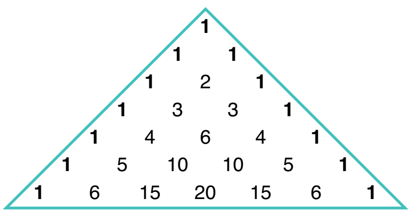

Abbildung 2. *Das Pascalsche Dreieck für Binomialkoeffizienten*

Wie schon im vorherigen Abschnitt betrachten wir jetzt die Binomialkoeffizienten als Polynome in n und machen den Ansatz

$$s(n) = \beta_3 \binom{n}{3} + \beta_2 \binom{n}{2} + \beta_1 \binom{n}{1} + \beta_0 \binom{n}{0}$$

für ein kubisches Polynom. Wenn wir $n = 0$ setzen, dann bekommen wir sofort $\beta_0 = s(0)$. Die Differenz $s(n+1) - s(n)$ ist ein quadratisches Polynom, das sich mithilfe der Binomialidentität als

$$s(n+1) - s(n) = \beta_3 \binom{n}{2} + \beta_2 \binom{n}{1} + \beta_1 \binom{n}{0}$$

schreiben lässt, und somit erhalten wir $\beta_1 = s(1) - s(0)$. Die Differenzen der Differenzen und die Differenzen der Differenzen der Differenzen von $s(n)$ liefern jetzt in analoger Weise

$$\beta_2 = s(2) - 2s(1) + s(0)$$
$$\beta_3 = s(3) - 3s(2) + 3s(1) - s(0).$$

Man sieht also, dass die Koeffizienten β_k ganzzahlig und eindeutig durch die Daten $s(0), \dots, s(3)$ bestimmt sind. Man bezeichnet β_k als die k. Differenz von $s(0), \dots, s(k)$. Die Koeffizienten β_k spielen eine Schlüsselrolle in der schon von Newton entwickelten Theorie der diskreten Taylor-Reihen.[3] Die Entwicklung eines Polynoms in eine Linearkombination von Binomialkoeffizienten ist dabei ein Spezialfall.

Es bleibt noch zu erwähnen, dass unser Argument selbstverständlich auch für Daten der Form $s(1), \dots, s(4)$ gilt. Wir wenden einfach obiges Verfahren auf $\tilde{s}(n) = s(n+1)$ mit den Daten $\tilde{s}(k) = s(k+1)$, $k = 0, \dots, 3$ an. Damit haben wir bestätigt, dass – unabhängig von den ursprünglich angenommenen Daten der Sterne und Titel – das zugehörige kubische Polynom $s(n)$ ganzwertig ist. Im Falle der tatsächlichen Daten erhalten wir

$$s(n+1) = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{0},$$

was, vermöge der Binomialidentität, mit der schon angegebenen Binomialentwicklung von $s(n)$ übereinstimmt. Als Nebenprodukt unserer Argumentation haben wir übrigens gerade angedeutet, wie man ganz allgemein zeigt, dass sich jedes ganzwertige Polynom $p_g(k)$ vom Grad g als Linearkombination von Binomialkoeffizienten mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben lässt. Insbesondere ist jedes Polynom $p_g(k)$ ganzwertig, wenn es ganzzahlige Werte für $k = 0, \dots, g$ hat.[4]

Geht das auch einfacher?

Man wendet jetzt zurecht ein, dass die bisher präsentierte Lösung des Problems und ihre Ableitungen für das jüngere und der Mathematik weniger zugeneigte Lesepublikum nicht zugänglich sein könnten. Wir wollen uns daher jetzt einer äquivalenten Beschreibung der Lösung, die lediglich das Addieren von ganzen Zahlen erfordert, zuwenden. Diese basiert auf dem Konzept der in der Grundschule so beliebten Zahlenmauer. Unsere zunächst aus dem Hut gezauberte spezifische Zahlenmauer ist in Abbildung 3 zu sehen.

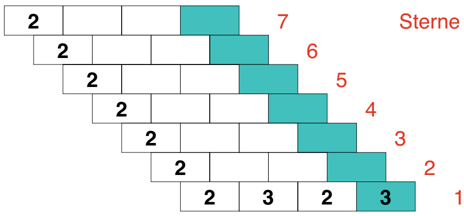

Abbildung 3. *Die Randbedingungen der Zahlenmauer*

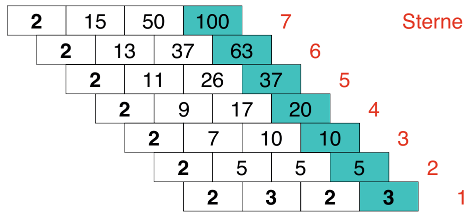

Abbildung 4. *Die durch die Zahlenmauer erzeugte Relation von Sternen und Titeln*

Das Prinzip ist, dass die Summe der Zahlen in zwei horizontal benachbarten Kästchen die Zahl im darüberliegenden Kästchen bestimmt. In unserem Fall bestimmen die Zahlen 2, 3, 2, 3 in der ersten Zeile, die fehlenden Zahlen 5, 5, 5 in der zweiten Zeile. Die dritte Zeile besteht dann aus den Zahlen 2, 7, 10, 10, etc. Auf diese Weise kann man die gesamte Zahlenmauer ausfüllen, wie in Abbildung 4 zu sehen ist. In der rechten Diagonale finden wir die Zahlen 3, 5, 10, 20, 37, 63, 100, die mit $s(n)$ für $n \leq 7$ übereinstimmen! Wir haben also eine einfache Art gefunden, die Daten $s(2)$, $s(3)$ und $s(4)$ zu reproduzieren und weitere ganze Zahlen $s(n)$ zu erzeugen.

Wir könnten die Sache an diesem Punkt ruhen lassen und uns auf den Standpunkt stellen, dass wir ein einfaches Rezept gefunden haben, das eine Lösung unseres Problems liefert. Aber trotzdem: Woher kommen die Randbedingungen[5] in der linken Diagonale und der untersten Zeile der Zahlenmauer und erzeugen wir damit wirklich die ganzzahligen Werte $s(n)$ des kubischen Polynoms für alle n? Zunächst einmal ist klar, dass beliebige Zahlen in der linken Diagonale und der untersten Zeile die restlichen Einträge der Zahlenmauer eindeutig bestimmen. Die unterste Zeile wird jedoch durch die Daten $s(1) = 3$, $s(2) = 5$, $s(3) = 10$ und $s(4) = 20$ festgelegt. In der Tat, wenn wir diese in die leere Zahlenmauer eintragen, dann ist ein dreieckiger Ausschnitt der Zahlenmauer bestimmt, wie Abbildung 5 bestätigt. Insbesondere erhalten wir 2, 3, 2, 3 in der untersten Zeile. Es ist natürlich, wie wir gleich sehen werden, kein Zufall, dass diese Einträge mit den Koeffizienten in der im vorherigen Abschnitt angegebenen Entwicklung von $s(n+1)$ übereinstimmen.

Die Einträge der linken Diagonale hängen von der Methode ab, mit der wir die Daten als Teil einer Zahlenfolge fortsetzen wollen. Wenn wir beliebige Zahlen $s(n)$ in die rechte Diagonale der leeren Zahlenmauer eintragen, dann sind die Zahlen der benachbarten Diagonale per Konstruktion durch die Differenzen

$$\Delta s(n) = s(n+1) - s(n)$$

gegeben. Die nächste Diagonale wird durch die Differenzen der Differenzen von $s(n)$ bestimmt, also

$$\Delta^2 s(n) = \Delta s(n+1) - \Delta s(n)$$

und die linke Diagonale enthält die Zahlen

$$\Delta^3 s(n) = \Delta^2 s(n+1) - \Delta^2 s(n).$$

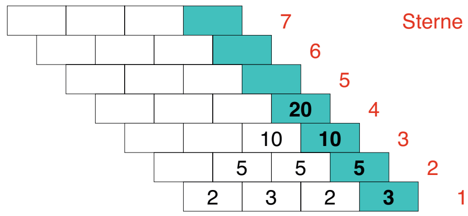

Abbildung 5. *Die von den bekannten Daten erzeugte unterste Zeile 2, 3, 2, 3*

Wenn $s(n)$ jetzt ein kubisches Polynom ist, dann ist $\Delta s(n)$ ein quadratisches Polynom und $\Delta^2 s(n)$ linear in n. Schließlich ist $\Delta^3 s(n)$ konstant und wir kennen diese Konstante! Sie ist die Zahl in der linken unteren Ecke der Zahlenmauer, die durch die Daten $s(1), \dots, s(4)$ bestimmt wird. In unserem Fall (Abbildung 5) wissen wir also ohne explizite Kenntnis des kubischen Polynoms $s(n)$, dass die linke Diagonale mit 2en aufgefüllt werden muss. Wir sehen auch in Abbildung 4, dass die Nachbardiagonale ungerade Zahlen enthält und die folgende Diagonale aus um 1 erhöhten Quadratzahlen besteht. Mithilfe der geschlossenen Formel für $s(n)$ können wir das bestätigen:

$$\Delta s(n) = n^2 + 1, \quad \Delta^2 s(n) = 2n + 1, \quad \Delta^3 s(n) = 2.$$

In anderen Worten: Die von uns postulierte Zahlenmauer ist „nur" eine andere Implementierung der Tatsache, dass die Zahlenfolge $s(n)$ durch die Daten $s(1), \dots, s(4)$ und der Annahme eines kubischen Polynoms eindeutig bestimmt wird. Die Zahlentheorie-Fans unter uns sind sich natürlich des Zusammenhangs zwischen ganzwertigen Polynomen und (speziellen) Zahlenmauern nicht gänzlich unbewusst.

Ausblick

Wie deutet man eigentlich die Werte $s(0) = 2$ und, noch schlimmer, $s(-1) = 0$ des kubischen Polynoms $s(n)$?[6] Um dieses Dilemma zu umgehen, könnte man $s(0) = 0$ als zusätzliches Datum fordern und ein Polynom 4. Grades $s(n)$ bestimmen. Man erkennt dann jedoch sehr schnell, dass die von der Deutschen Fußball

Liga gewählten Daten zu einem absurden Ergebnis führen würden, da die nötige Monotonieeigenschaft von $s(n)$ nicht gegeben wäre. Das ist zum Beispiel an der 4. Differenz der Daten $s(0), \ldots, s(4)$, die das Verhalten des Polynoms für große n festlegt, zu sehen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \beta_4 &= s(4) - 4s(3) + 6s(2) - 4s(1) + s(0) \\ &= 20 - 4 \cdot 10 + 6 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 0 \\ &= -2, \end{aligned}$$

sodass $s(n)$ sogar negativ wird für große n (Abbildung 6). Man kann zeigen, dass dies für $n > 10$ der Fall ist. Ein Teil des Problems mit den gegebenen Daten ist, dass eine Mannschaft mehr tun muss, um den ersten Stern zu bekommen, als vom ersten zum zweiten Stern zu kommen. In anderen Worten, die 2. Differenz β_2 ist negativ.

Für ein Polynom 5. Grades fehlt uns eine Bedingung, die dieses eindeutig festlegt. Im Zusammenhang mit einer entsprechenden Zahlenmauer wäre es natürlich, die Konstante in der linken Diagonale, also die 5. Differenz β_5, vorzugeben, sodass

$$s(n) = \beta_5 \binom{n}{5} - 2\binom{n}{4} + 4\binom{n}{3} - \binom{n}{2} + 3\binom{n}{1}.$$

Gibt es für β_5 eine kanonische Wahl? Für $\beta_5 = 0$ erhalten wir natürlich das unbrauchbare Polynom 4. Grades. Wir überlassen den Leserinnen und Lesern diese amüsante Spielwiese der experimentellen Mathematik, bemerken jedoch, dass die Wahl $\beta_5 = 1$ zu einem Polynom führt, das die gewünschte Monotonieeigenschaft besitzt. Ein vielleicht positives Nebenprodukt dieser *a priori* willkürlichen Wahl ist, dass dieses $s(n)$ für alle in mindestens diesem und (fast) dem nächsten Jahrhundert relevanten n weniger schnell anwächst als das kubische Polynom. Wir erhalten die Zahlenfolge 0, 3, 5, 10, 20, 36, 59, 91, … In der Tat, interessanterweise gleicht sich das Anwachsen der Polynome bei $s(9) - s(8) = 65$ an und erst an der Stelle $n = 10$ wird das kubische Polynom bei identischem Wert $s(10) = 297$ eingeholt (Abbildung 6).

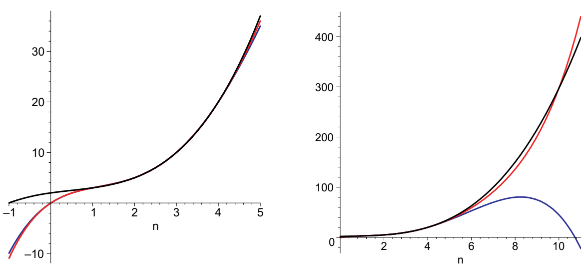

Abbildung 6. *Die Polynome $s(n)$ vom Grad 3 (schwarz), 4 (blau) und 5 für $\beta_5 = 1$ (rot)*

Fazit

Wenn die Deutsche Fußball Liga die kanonische kubische Formel übernehmen sollte, dann kämen wir zu folgendem Resultat: Der FC Bayern München muss noch 13-mal Meister werden, um einen 5. Stern zu bekommen. Bei der derzeitigen Dominanz dieser Mannschaft, könnte das in absehbarer Zeit passieren. Allerdings wird Philipp Lahm dann schon im wohlverdienten Ruhestand sein und Ted wird sich eines Erwachsenentrikots eines anderen zu diesem Zeitpunkt aktuellen Fußballkünstlers des FC Bayern erfreuen. Man könnte der Deutschen Fußball Liga jedoch auch nahelegen, das Verhältnis von Sternen und Titeln leicht zu modifizieren. Wenn man $s(1) = 2$, $s(2) = 5$, $s(3) = 10$ und $s(4) = 18$ wählt, dann erhält man

$$s(n) = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{1}$$

und daher umsonst $s(0) = 0$. Die zugehörige Zahlenfolge ist jetzt 0, 2, 5, 10, 18, 30, 47, 70, 100, … und das würde auch das Sternesammeln etwas beschleunigen.

Danksagung. Der Autor möchte sich bei seinem Kollegen Dr. David Angell und seinem Bruder Dr. Andreas Schief für aufschlussreiche Diskussionen zu diesem Thema bedanken.

Anmerkungen

1. Axel Werner, Kombinatorische Optimierung und die 40-Punkte-Regel, *Mitteilungen der DMV* 19 (2011), 153–157.
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Integer-valued_polynomial
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient
5. Eine „Rechtfertigung" für die Einträge der linken Diagonale und der untersten Zeile der Zahlenmauer, die man vielleicht als humorvolles „Verkaufsargument" vorbringen könnte, ist folgende: In jedem Spiel gibt es zwei Mannschaften und daher füllen wir die linke Diagonale mit 2en auf. In jedem Spiel werden 2 oder 3 Punkte vergeben, je nachdem, ob es ein Unentschieden oder einen Sieger gibt. Also ordnen wir der untersten Zeile abwechselnd 2en und 3en zu.
6. Konsequenterweise würde das wohl bedeuten, dass aus den Trikots einer Mannschaft ohne Titel ein Stern gestanzt würde, der bei zwei gewonnenen Meisterschaften wieder eingesetzt werden würde.

Prof. Wolfgang Karl Schief, School of Mathematics and Statistics, The University of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australia. w.schief@unsw.edu.au

Wolfgang Schief studierte Physik und Mathematik an der LMU in München. Er promovierte in England und lebt seit 1993, mit einer dreijährigen Unterbrechung als Professor an der TU Berlin, in Australien. Er beschäftigt sich mit integrablen Strukturen in der Kontinuumsmechanik und (diskreter) Differentialgeometrie.