

Geometrisches Clustering: Mathematik für die Flurverbesserung

Steffen Borgwardt, Andreas Brieden und Peter Gritzmann

I Pacht- und Nutzungstausch für die Flurverbesserung

In vielen landwirtschaftlichen Regionen bewirtschaften Landwirte eine große Anzahl kleiner Flurstücke, die über eine weite Region verstreut liegen. So bearbeiten in einem typischen Landwirtschaftsgebiet in Bayern etwa 7 bis 20 Bauern zwischen 300 und 1000 Flurstücke; Abbildung 1 gibt einen visuellen Eindruck einer typischen Verteilung.

Eine solchermaßen zersplitterte Struktur hat gravierende Nachteile. Da die einzelnen Flurstücke über eine große Region verstreut sind, müssen die Landwirte erhebliche unproduktive Fahrstrecken zurücklegen, die Personal- und Transportkosten verursachen. Berechnungen des Bayerischen Staatsministeriums für Landwirtschaft, Ernährung und Forsten beziffern diese zusätzlichen Kosten auf oftmals mehr als 30 % des Nettoeinkommens der Bauern aus ihrer landwirtschaftlichen Produktion. (EU- und sonstige Subventionen, die einen wesentlichen Teil des Einkommens darstellen, sind in der Regel unabhängig von einer kosteneffizienten Produktion.) Da die einzelnen Flurstücke eher klein sind, können moderne, schwerere Maschinen nicht (oder zumindest nicht gewinnbringend) eingesetzt werden. Insgesamt sind die Bewirtschaftungskos-

ten deutlich höher als wenn alle Flurstücke eines Landwirts in einer einzigen (sinnvoll geschnittenen) Fläche zusammengefasst wären.

In ihrer klassischen Form ist die Flurbereinigung eine vollständige Neustrukturierung der landwirtschaftlichen Fläche; die aktuellen Flurstücksgrenzen werden verworfen und neue erstellt. Dieser Prozess erfordert aufwändige Vermessungen und eine notariell beglaubigte Eigentumsübertragung, ist daher teuer, langwierig und unflexibel. Ist die Flurbereinigung einmal beschlossen, so sind die Landwirte gezwungen, teilzunehmen. Ein typischer klassischer Flurbereinigungsprozess dauert in der Regel mehr als zehn Jahre und kostet ca. 2500 € pro Hektar.

Natürlich ist die Landverteilung in solchen landwirtschaftlichen Gebieten weniger statisch, in denen die Mehrheit der Flurstücke verpachtet ist, d. h. von Pächtern statt Eigentümern bewirtschaftet wird. (Das ist zum Teil Folge des Erbrechts, zum Teil Folge der schwierigen wirtschaftlichen Situation der Kleinbauern.) So können auch Bezirke, die in jüngster Vergangenheit eine klassische Form der Flurbereinigung durchlaufen haben, wie Flickenteppiche aussehen.

Andererseits ist ein Landwirt, der ein Flurstück zur Bewirtschaftung pachtet, emotional weniger an dieses gebunden; er ist daher eher bereit, es zu tauschen, um sei-



Abbildung 1. Eine landwirtschaftliche Region mit 7 Landwirten und 419 Flurstücken. Die verschiedenen Farben repräsentieren die verschiedenen Landwirte, die die Felder bearbeiten.

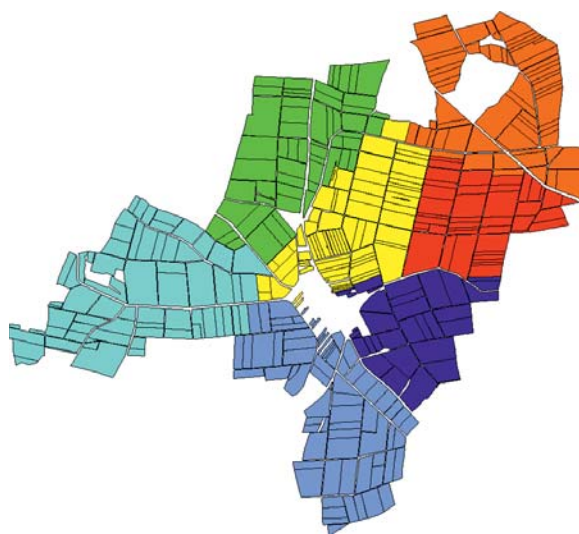


Abbildung 2. Eine verbesserte Verteilung der Flurstücke der landwirtschaftlichen Region aus Abbildung 1.

ne Kostenstruktur zu verbessern. Hierdurch entsteht die Möglichkeit, konzeptionell einfache freiwillige Pacht- und Nutzungstausche durchzuführen – auf der Basis der bestehenden Flurstückenteilung, also ohne Aufhebung der Eigentumsstrukturen, und damit flexibel, kostengünstig und schnell.

Beim freiwilligen Pacht- und Nutzungstausch sollen jedem Landwirt möglichst benachbarte Flurstücke zugewiesen werden, um möglichst große zusammenhängende Flächen zu erreichen. Natürlich müssen dabei verschiedene *Ausgleichsbedingungen* erfüllt sein. So darf sich die Gesamtfläche der Flurstücke eines Landwirts im Zuge der Umverteilung nicht zu stark ändern. Dasselbe gilt für die Bodengüte (Bonität), für an Flurstücke gebundene EU-Subventionen sowie für weitere relevante Parameter. Auch ökologische Restriktionen können eine Rolle spielen. Da insbesondere die Bodenqualität in einer landwirtschaftlichen Region stark variieren kann, müssen in der Praxis Landwirten oftmals Flurstücke zugewiesen werden, die mehrere Zusammenhangskomponenten bilden; diese sollen dann aber zusätzlich so nah wie möglich beieinander liegen.

Die Pacht- und Nutzungsverträge sind freiwillige Vereinbarungen zwischen den Landwirten. Insbesondere dürfen Landwirte einige ihrer Flurstücke fixieren, also nur eine Teilmenge ihrer Felder für eine Neuverteilung freigeben. Ist das der Fall, so sollen andere Flurstücke möglichst an die fixierten herantauscht werden.

Die Anzahl der möglichen Neuordnungen ist in der Regel sehr groß: Für k Bauern mit m Flurstücken ist sie k^m . Bereits für moderate Größen von sieben Bauern und 419 Flurstücken (wie in Abbildung 1) gibt es 10^{354} Möglichkeiten; Trial-and-Error-Ansätze sind damit in der Regel nicht zielführend. Aus diesem Grund wurde der freiwillige Pacht- und Nutzungstausch von manchen Beteiligten zunächst als nicht praxistauglich angesehen.

Mathematisch gesehen sind bereits einfache Instanzen des Problems NP-schwierig oder noch schwieriger. Zudem haben vorhandene Standardansätze aus der Graphentheorie Probleme mit den Ausgleichsbedingungen. Darüber hinaus werden in der Praxis angemessene Visualisierungs- und Auswertungstools benötigt.

2 Das Grundmodell

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den freiwilligen Pacht- und Nutzungstausch zu modellieren (isoperimetrische Modelle, Graph- k -Partitionierung etc.). Da jedoch alle bekannten Modelle Schwachstellen bei dieser Anwendung aufweisen, wurde in [12] ein *geometrisches Clusteringmodell* entwickelt. Dieses Modell wird nun zunächst vorgestellt; Abschnitt 3 zeigt danach, wie es tatsächlich die Intuition hinter „guten Clusterings“ abbildet, während Abschnitt 4 eine algorithmische Rechtfertigung gibt.



Abbildung 3. Abstraktion von der Geometrie der Flurstücke; die Flurstücke in Abbildung 1 werden durch ihre Zentren ersetzt; die Färbung entspricht der ursprünglichen Einfärbung.

Zunächst abstrahieren wir von der Geometrie der Flurstücke und ersetzen jedes Flurstück durch sein Zentrum. Die Aufgabe besteht nun darin, eine endliche gewichtete Punktmenge in einem Minkowski-Raum $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$, unter gewissen Ausgleichsbedingungen so zu partitionieren, dass eine geeignete distanzbasierte Funktion optimiert wird. Hier sind die „Zutaten“ unseres Problems (eine Interpretation hinsichtlich der Flurverbesserung wird jeweils in Klammern angegeben): d ist die *Dimension des Raumes der Objekte* (zwei Koordinaten für jedes Flurstück), m ist die *Anzahl der Objekte* (die Anzahl der Flurstücke), $V = \{x_1, \dots, x_m\}$ ist die *gegebene Punktmenge im $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$* (die Menge der Zentren der Flurstücke); natürlich gilt $|V| = m$. Weiter ist k die *Anzahl der Cluster* (die Zahl der Landwirte); in der Regel gilt $k \ll m$. Darüber hinaus ist s die *Anzahl der verschiedenen zu berücksichtigenden Eigenschaften der Punkte* (Größe, Bodenqualität, assoziierte EU-Subventionen der Flurstücke etc.). Die Funktion $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}^s$ ordnet jedem Flurstück seinen *Eigenchaftsvektor* zu, und die Vektoren $b_1^\pm, \dots, b_k^\pm \in \mathbb{R}^s$ geben *Toleranzen* an (für jeden Landwirt definierte Intervallgrenzen für die gesamte Betriebsgröße sowie die anderen Eigenschaften). Die zulässigen Verteilungen der Flurstücke auf die Landwirte sind somit die *Partitionen* $\mathcal{C} = \{V_1, \dots, V_k\}$ von V , die den *Ausgleichsbedingungen*

$$b_i^- \leq \sum_{v \in V_i} \omega(v) \leq b_i^+ \quad (i = 1, \dots, k)$$

genügen.

Falls für alle $i = 1, \dots, k$ gefordert ist, dass $b_i = b_i^- = b_i^+$ gilt, so sprechen wir vom *exakt balancierten Fall*. Im *kombinatorischen Fall* sind alle Gewichte 1 und lediglich die *Kardinalitäten* exakt vorgeschrieben; es ist also $s = 1$, $\omega \equiv 1$ und $|V_i| = b_i$.

Die Definition der Zielfunktion wird durch eine physikalische Vorstellung geleitet: Die Schwerpunkte der gebildeten Cluster stoßen sich ab. Intuitiv sollen die Zentren daher möglichst weit auseinander geschoben werden. Die formale Konstruktion der verwendeten (Klassen von) Zielfunktionen basiert auf zwei Normen: einer Norm $\|\cdot\|$ auf dem \mathbb{R}^d (für die Flurverbesserung ist $d = 2$) und einer zweiten Norm $\|\cdot\|_\diamond$ auf $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$, wobei k wieder die Anzahl der Cluster (Landwirte) ist. $\|\cdot\|_\diamond$ muss *monoton* sein, d. h. es gilt $\|x\|_\diamond \leq \|y\|_\diamond$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}$ mit $0 \leq x \leq y$. Die Zielfunktion hat nun die Form

$$\max \left\| \left(\|c_1 - c_2\|, \|c_1 - c_3\|, \dots, \|c_{k-1} - c_k\| \right)^T \right\|_\diamond,$$

wobei c_i den Schwerpunkt von Cluster V_i bezeichnet. Insgesamt erhalten wir damit ein nichtlineares ganzzahliges Maximierungsproblem über einem Polytop.

Natürlich ist es bei einer solchen Formulierung nicht offensichtlich (und daher wichtig, zu zeigen!), dass sie die Hauptmerkmale des Problems erfasst hat und rechnerisch so effizient ist, dass die in der Praxis relevanten Problemgrößen gelöst werden können.

Man beachte, dass die Nichtlinearität des Maximierungsproblems nur von k , nicht aber von m abhängt. Das ist ein erster Hinweis darauf, dass dieses scheinbar sehr sperrige Problem vielleicht doch nicht so unangreifbar ist. Im Beispiel von Abbildung 1 haben wir $k = 7$, aber $m = 461$. Der nichtlineare Teil des Problems „lebt“ daher nur in der Dimension $kd = 14$.

3 Erfassen der Intuition

In einer perfekten Welt würde jeder Geometer das Clustering aus einem Zellkomplex im \mathbb{R}^d konstruieren; siehe Abbildung 4. Man möchte also gerne (optimale) Clusterings finden, die von Zellzerlegungen „ausgeschnitten“ werden; siehe Abbildung 5. Aber ist das immer möglich?

Das einfache Beispiel in Dimension eins mit drei Punkten und zwei Clustern in Abbildung 6 zeigt der perfekten Welt bereits ihre Grenzen auf.

Wir müssen daher im Allgemeinen wohl oder übel akzeptieren, dass einige Punkte auf mehrere Cluster aufgeteilt



Abbildung 4. Die Punktmenge V (links) und eine Partition des \mathbb{R}^2 (rechts)

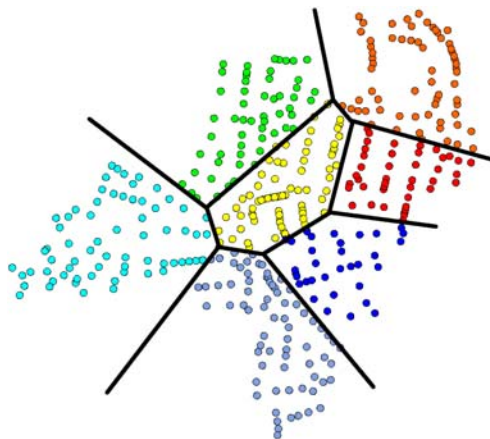


Abbildung 5. Das durch die Lage der Punkte in den 2-dimensionalen Zellen der Zellzerlegung von Abbildung 4 (rechts) definierte Clustering

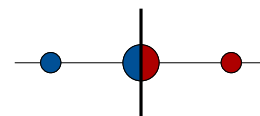


Abbildung 6. Darstellung eines Beispiels mit Parametern $d = 1$, $m = 3$, $k = 2$, $\omega(v_1) = \omega(v_3) = 1$, $\omega(v_2) = 2$, $b_1 = b_2$, für das es kein Clustering gibt, dessen Cluster strikt linear trennbar sind. Die verschiedenen Größen der Scheiben repräsentieren die unterschiedlichen Gewichte der zugehörigen Punkte.

werden. Es reicht also nicht aus, sich auf Partitionen von V zu beschränken; wir müssen vielmehr auch *fraktionale* Zuweisungen der Punkte erlauben. Die Cluster C_j kodieren dann für jeden Punkt x_j aus V seinen zu C_j gehörigen Anteil, d.h. sie sind von der Form $C_j = (\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,m})^T$ mit $\xi_{j,j} \in [0, 1]$.

Zentral sind hierbei gewisse verallgemeinerte *Voronoi-Diagramme*, die *Power-Diagramme*; siehe [1], [4]. Seien $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}^d$ gegebene *Kontrollpunkte* (auch *Sites* genannt) und $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathbb{R}$ vorgegebene *Größen*, dann ist das zugehörige *Power-Diagramm* die durch

$$P_i = \{x : \|s_i - x\|_{(2)}^2 - \sigma_i \leq \|s_j - x\|_{(2)}^2 - \sigma_j \text{ für alle } j\} \\ (i = 1, \dots, k)$$

definierte Zellzerlegung $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ von \mathbb{R}^d . Für $\sigma_1 = \dots = \sigma_k = 0$ erhalten wir die klassischen *Voronoi-* oder *Dirichlet-Zellen*. Die Zellen P_i ändern sich nicht, wenn man eine reelle Zahl σ zu jeder der Größen addiert. Wir dürfen daher annehmen, dass alle Größen positiv sind. Dann bildet die Menge der Punkte mit $\|s_i - x\|_{(2)}^2 = \sigma_i$ eine Sphäre mit Radius $\sqrt{\sigma_i}$, und das Power-Diagramm kann geometrisch konstruiert werden; siehe Abbildung 7.

Natürlich sind wir vor allem an Power-Diagrammen \mathcal{P} interessiert, die mit dem Clustering \mathcal{C} *kompatibel* sind, d.h. für jedes i ist der Träger $\text{supp}(C_i) = \{x_j : \xi_{i,j} \neq 0\}$ von C_i in P_i enthalten. Wir fordern sogar eine noch stärkere Eigenschaft: \mathcal{P} *trägt* \mathcal{C} , wenn $\text{supp}(C_i) = V \cap P_i$ gilt.

Darüber hinaus betrachten wir den *Träger-Multigraph* $G(\mathcal{C})$ des Clusterings $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_k)$. Seine Knotenmenge besteht aus den Clustern C_1, \dots, C_k , und für jedes $x_j \in \text{supp}(C_i) \cap \text{supp}(C_l)$ wird eine Kante zwischen C_i und C_l eingefügt und mit x_j beschriftet. Ein Kreis in $G(\mathcal{C})$ heißt *bunt*, wenn nicht alle seiner Kantenbeschriftungen übereinstimmen, und $G(\mathcal{C})$ heißt *c-kreisfrei*, wenn er keinen bunten Kreis enthält. Wir nennen den Zellkomplex \mathcal{P} *stark kompatibel* mit \mathcal{C} , falls \mathcal{P} das Clustering \mathcal{C} trägt und $G(\mathcal{C})$ *c-kreisfrei* ist.

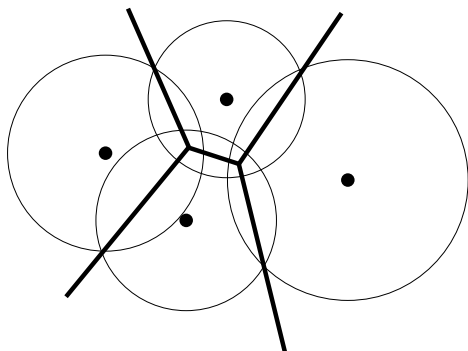


Abbildung 7. Ein Power-Diagramm, das durch vier Kontrollpunkte s_1, s_2, s_3, s_4 (schwarze Punkte) und positive Größen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ definiert wird. Die Kreise sind in den s_i zentriert und haben Radius $\sqrt{\sigma_i}$.

Interessanterweise erhält man den einfachsten Zugriff auf die Existenz eines stark kompatiblen Power-Diagramms mithilfe eines geometrischen Objekts im \mathbb{R}^{kd} . Sei $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ ein zulässiges Clustering mit zugehörigen Schwerpunkten c_1, \dots, c_k und *Schwerpunktvektor* $c := (c_1^T, \dots, c_k^T)^T$. Dann heißt

$$Q = \text{conv} \left\{ c \in \mathbb{R}^{kd} : c \text{ ist der Schwerpunktvektor} \right. \\ \left. \text{eines zulässigen Clusterings} \right\}$$

Schwerpunktkörper. Für stark balancierte Clusterings sind die Schwerpunktkörper Polytope. Ein besonders einfaches Beispiel entsteht für den kombinatorischen Fall mit $d = 1, m = k$ und $V = \{1, \dots, m\}$. Dann ist das zugehörige Schwerpunktpolytop das bekannte *Permutaeder*, d. h.

$$\text{conv} \left\{ (\pi(1), \dots, \pi(m))^T : \pi \text{ ist eine Permutation} \right. \\ \left. \text{von } \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Abbildung 8 zeigt das Permutaeder für $m = 3$.

Es ist nicht ganz offensichtlich, aber die Schwerpunktkörper bilden die zentralen Eigenschaften der kompatiblen Power-Diagramme geeignet ab. Das ist der Schlüssel bei der Suche nach einem „besten“ Power-Diagramm. Wir nennen \mathcal{C} ein *extremales Clustering*, wenn der Schwerpunktvektor von \mathcal{C} ein Extrempunkt von Q ist. Der folgende Satz aus [14] zeigt, dass unser Modell die Intuition hinter guten Clusterings tatsächlich abbildet.

Theorem 3.1. [14]

- (a) Jedes *extremale Clustering* erlaubt ein *stark kompatibles Power-Diagramm*.
- (b) *Höchstens* $k - 1$ *der (gewichteten) Punkte sind fraktionell zugeordnet*.
- (c) *Im stark balancierten Fall ist ein Clustering C genau dann extremal, wenn C ein stark kompatibles Power-Diagramm erlaubt*.

Theorem 3.1 erweitert und verallgemeinert eine Reihe vorangegangener Resultate, die insbesondere den kom-

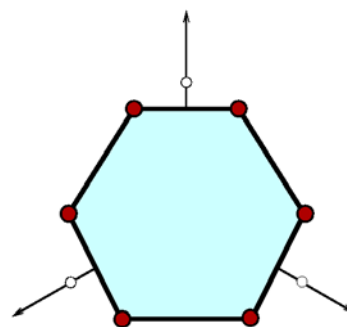


Abbildung 8. Das Permutaeder im \mathbb{R}^3 .

binatorischen Fall behandeln; [6], [2], [3] und [7] (siehe [14] für weitere Referenzen).

Zudem ist es möglich, stark kompatible zentroidale Power-Diagramme (bei denen die Zentren mit den Kontrollpunkten zusammenfallen) durch die lokalen Optima einer ellipsoidalen Funktion über dem Schwerpunktkörper zu charakterisieren; [14]. Die globalen Optima können ebenfalls durch die Trennungseigenschaften der zugehörigen Clusterings charakterisiert werden; [14]. Darüber hinaus gibt es Interpretationen und Erweiterungen im Bereich des Maschinellen Lernens mit Soft Margins; [9].

4 Algorithmische Lösbarkeit

Die konvexe Maximierung ist bekanntlich \mathbb{NP} -schwierig. Im Allgemeinen treten exponentiell viele lokale Maxima auf; wir begnügen uns daher mit Approximationen. [13] gibt scharfe und sehr ermutigende worst case Fehler-schranken für unser Problem. Im Zentrum stehen hierbei wieder geometrische Objekte, die *Clusterkörper*

$$C := \left\{ \left(\begin{array}{c} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{kd} : \left\| \left(\begin{array}{c} \|c_1 - c_2\| \\ \vdots \\ \|c_{k-1} - c_k\| \end{array} \right) \right\|_{\diamond} \leq 1 \right\}.$$

Sie sind offenbar gerade die Niveaumengen unserer Zielfunktionen. Abhängig von den gewählten Normen können Clusterkörper polyedrisch, glatt oder eine Mischung von beidem sein. Wenn etwa beide Normen die ℓ_1 -Norm sind, erhalten wir das Polare des kartesischen Produkts von Permutaedern. Sind beide Normen euklidisch, so sind die zugehörigen Clusterkörper euklidische Zylinder mit d -dimensionalem Linealitätsraum. Ist hingegen die innere Norm beliebig, die äußere aber ℓ_1 bzw. ℓ_{∞} , dann erhalten wir das Polare der Minkowski-Summe bzw. die konvexe Hülle von geeignet diagonal eingebetteten Kopien der skalierten Einheitskugeln des zu $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ konjugierten Raumes.

Diese und andere Strukturergebnisse können genutzt werden, um scharfe polyedrische Approximationen für die zugehörigen Clusterkörper zu erhalten. Aber wie können wir solche Approximationen benutzen?

Wenn wir über eine Approximation eines Clusterkörpers durch ein Polyeder mit einer polynomiellen Anzahl an Facetten verfügen, so können wir prinzipiell den folgenden polynomiellen Algorithmus anwenden:

- Löse ein *lineares Optimierungsproblem* für jede Facette (der Zielfunktionsvektor ist eine äußere Normale der Facette).
- Wähle das Maximum der erhaltenen Werte.

Natürlich hängt die Qualität der approximierten Lösung unserer konvexen Maximierungsaufgabe vom Fehler der polyedrischen Approximation des Clusterkörpers ab.

Hier ist der „vollständig euklidische“ Spezialfall der sehr viel allgemeineren Approximationsergebnisse aus [13].

Theorem 4.1. [13] Sei $\|\cdot\|_{\diamond} = \|\cdot\| = \|\cdot\|_{(2)}$. Dann kann der Clusterkörper durch ein Polytop mit polynomiell vielen Facetten bis auf einen Fehler von

$$O\left(\left(\frac{kd}{\log(kd)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

approximiert werden.

Dieser Satz und entsprechende weitere Resultate von [13] verschärfen die bekannten Ergebnisse für die allgemeine ℓ_p -Normmaximierung von [5, 15–17] für Clusterkörper; hier speziell um einen Faktor \sqrt{k} . Man beachte, dass die gefundene worst case-Schranke nicht von m abhängt, sondern nur von d und k . Das bestätigt unser heuristisches Argument nach Einführung der Zielfunktion, dass ihr nichtlinearer Teil im \mathbb{R}^{kd} „lebt“.

Ergänzend zu den hier im Detail dargestellten Ergebnissen, studiert [10] einen alternativen Ansatz für den Fall, dass Landwirte mehrere Flurstücke als Nuklei für die Umverteilung fixieren, an die andere Flächen hergetauscht werden. Ferner gibt [8] Schranken für die Durchmesser der im kombinatorischen Fall relevanten Partitions-polytope.

Die entwickelten Algorithmen laufen sämtlich für die praktisch relevanten Größen innerhalb weniger Sekunden bis zu einer halben Minute auf einem Laptop. Es zeigt sich, dass Flexibilität und kurze Rechenzeiten entscheidend dafür sind, dass die Verfahren in der Praxis angenommen werden. Der folgende Abschnitt enthält einige Erfahrungen aus der Praxis vor Ort.

5 Von der Theorie zur Praxis

In Kooperation mit dem *Bayerischen Bauernverband* wurden mehrere Pacht- und Nutzungstausche in Unterfranken moderiert. Dabei wurde das Optimierungstool in verschiedenen Phasen des Prozesses eingesetzt. Natürlich verwendeten wir es im Vorhinein, um das Potenzial des freiwilligen Pacht- und Nutzungstauschs in der betreffenden Region aufzuzeigen. Unsere (zusammen mit der *Landesanstalt für Landwirtschaft* entwickelten) Tools erlauben es, den ökonomischen Nutzen für jeden einzelnen Landwirt recht verlässlich abzuschätzen; siehe Abbildung 9.

In der Praxis war es erforderlich, auch ein einfach zu bedienendes Tool für die Umverteilung von Flurstücken per Hand zur Verfügung zu haben; siehe Abbildung 10. Das klingt im ersten Moment merkwürdig; wir können ja schließlich wesentlich bessere Umverteilungen mit den Optimierungstools produzieren. Es gibt hierfür jedoch zwei gute Gründe:

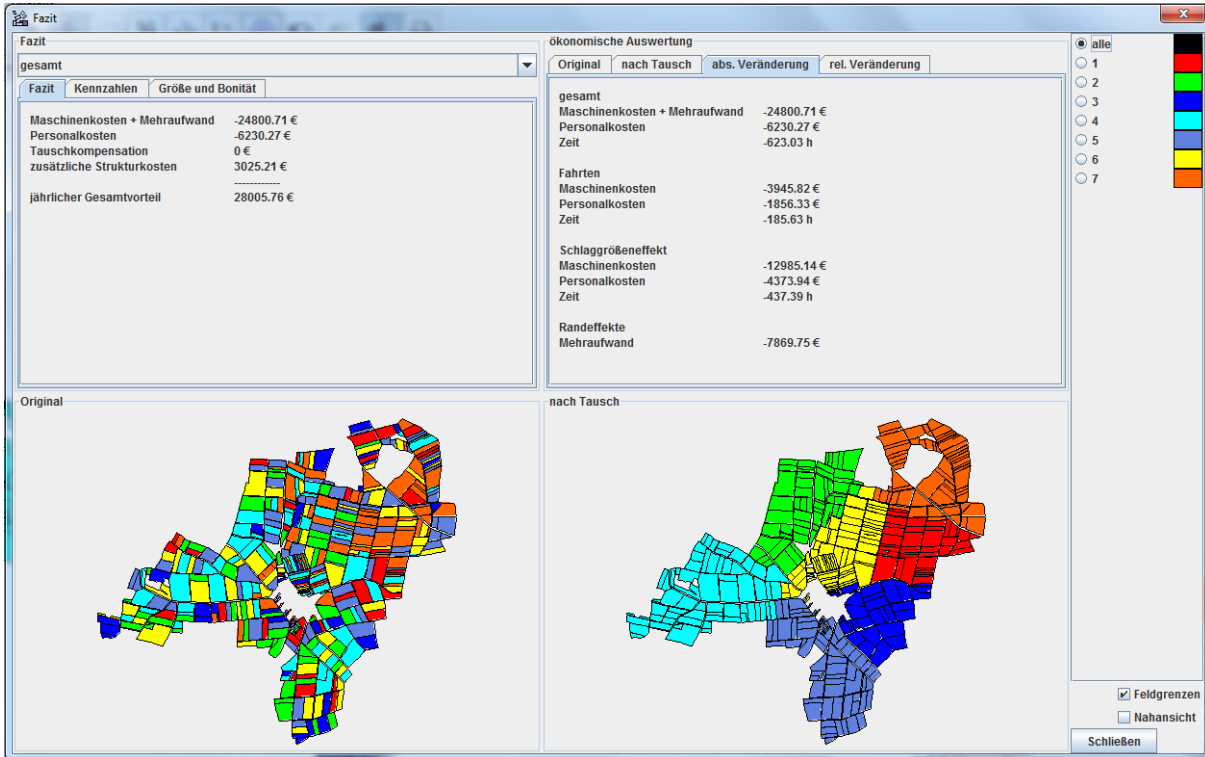


Abbildung 9. Die Tools erlauben ökonomische Auswertungen auf verschiedenen Ebenen – abhängig von der speziellen Struktur der Region. Hier spielen Sterne, spannende Bäume und Traveling Salesmen-Touren eine Rolle. Zudem werden empirische Kostenfunktionen einbezogen, die die Größe und Form der Flurstücke berücksichtigen.

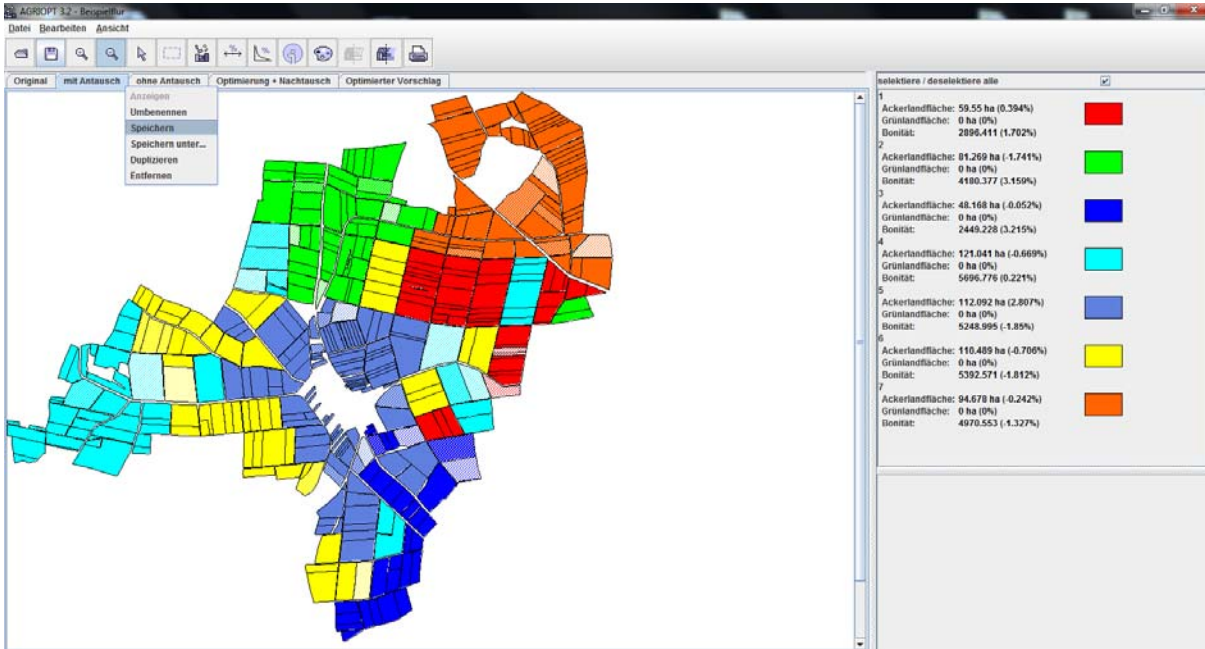


Abbildung 10. Ein Tool zur händischen Umverteilung per Drag and Drop sowie zur automatischen Bewertung

Da jeder Landwirt für jedes einzelne Flurstück zu jedem Zeitpunkt entscheiden kann, ob er es in den freiwilligen Pacht- und Nutzungstausch einbringt, und jeder Landwirt seine „Filetstücke“ erst einmal behalten will, besteht der Gesamtpool tauschbarer Flächen zu Beginn ei-

nes jeden Prozesses fast ausschließlich aus Flurstücken unterdurchschnittlicher Qualität. Das Potenzial der Methode ist dann naturgemäß begrenzt. Die Möglichkeit der Landwirte, mit einem bequemen, einfach zugänglichen und transparenten Tool zunächst händisch Tauschmög-

lichkeiten auszuprobieren und die auf eine Leinwand projizierten Ergebnisse des händischen Tauschs zu diskutieren, erhöhte das Vertrauen in die eigenbestimmte und -kontrollierte Natur des Verfahrens. (Zudem wurde der „Spieltrieb“ der Teilnehmer geweckt, was für die Atmosphäre der Treffen von Vorteil war.) Nach einer anfänglichen „Initiierungsphase“ waren die Landwirte vom Potenzial und der Fairness der Methodik und ökonomischen Analyse überzeugt und gaben dann die meisten ihrer Flurstücke in den gemeinsamen Tauschpool, d. h. für die Umverteilung frei.

Das manuelle Tool hatte aber noch eine weitere Bedeutung. Es gibt in der Regel weit mehr Nebenbedingungen an die Umverteilung der Flurstücke als explizit spezifiziert werden. So waren etwa einige Landwirte zwar grundsätzlich bereit, sich an dem Verfahren zu beteiligen, hatten aber spezielle Vorstellungen, die sich erst im Prozess „manueller Post-Optimierung“ mit dem Tauschtool zeigten.

Da verschiedene praktisch relevante Klassen zusätzlicher Nebenbedingungen (welche Flurstücke dürfen getauscht werden, oder mit wem, etc.) einfach in das Modell integriert werden können, konnte das Optimierungstool auch in Zwischenstufen des Prozesses eingesetzt werden, um die Dynamik der Treffen zu verstärken. Am Ende entstanden Lösungen, die (zumindest annähernd) optimal bezüglich aller neu identifizierten, zusätzlichen Nebenbedingungen waren. Wichtigstes Erfolgskriterium war aber, dass alle beteiligten Landwirte zufrieden waren; schließlich ist das Verfahren bis zum letzten Moment freiwillig und unzufriedene Landwirte können jederzeit aussteigen.

Ludwig Geis, ein Landwirt, der an einem der Pacht- und Nutzungstausche in Nordbayern teilgenommen hat, bewertet die Auswirkungen wie folgt: *Die Konsequenzen der Umsetzung ... sind enorm, aus ökonomischer wie aus ökologischer Sicht. ... Neben den niedrigeren Bewirtschaftungskosten ergeben sich ein geringerer Aufwand an Pflanzenschutz-*

mitteln, ein höherer Ertrag und weniger Streitigkeiten unter Nachbarn.

Neben dem Einsatz bei realen Tauschverfahren sind die entwickelten Tools bereits bei der Ausbildung von Landwirten im Einsatz. Tatsächlich wurden die Beispielfläuren der Abbildungen 1 und 2 zu Visualisierungs- und Trainingszwecken für die Schulung von Landwirten erstellt. (Aus Gründen des Datenschutzes verwenden wir hier nicht die realen Daten der Landwirte einer Region.)

In einem separaten Projekt mit dem *Bayerischen Staatsministerium für Landesentwicklung und Umweltfragen* wurden die entwickelten Methoden ferner unter besonderer Berücksichtigung ökologischer Aspekte von Umweltmaßnahmen im Rahmen von Programmen zur Stärkung der Biodiversität angewandt.

6 Zusätzliche Anforderungen in der Forstwirtschaft

In vielen forstlichen Regionen in Nordbayern ist eine effiziente und nachhaltige Bewirtschaftung der forstwirtschaftlichen Flächen nahezu unmöglich geworden – eine Folge des Erbschaftsrechts und der häufigen Änderung der Eigentumsverhältnisse. Die durchschnittliche Größe der Flurstücke ist inzwischen kleiner als ein Hektar; zudem sind viele Parzellen aufgrund ihrer Form (lang, aber sehr schmal) schlecht zu bewirtschaften. Die Ausgangssituation ist also weitgehend dieselbe wie in der Landwirtschaft. Allerdings sind in der Praxis einige neue Probleme zu bewältigen, die mit dem unterschiedlichen Zeitrahmen der Produktion, der in der Regel größeren Anzahl an Eigentümern und der unterschiedlichen Einstellung der Eigentümer zu ihren Flurstücken zusammenhängen. In einem Folgeprojekt mit dem *Bayerischen Staatsministerium für Ernährung, Landwirtschaft und Forsten* wurden die Tools

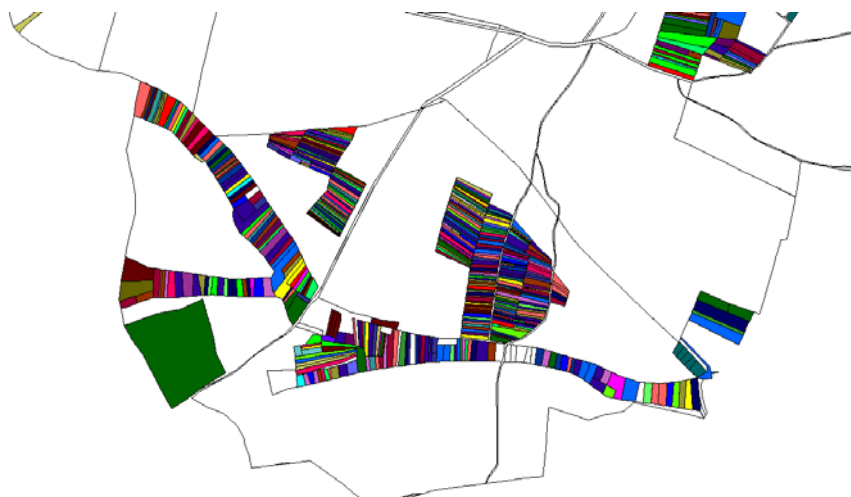


Abbildung 11. Eine typische forstwirtschaftliche Region. Verschiedene Farben repräsentieren verschiedene Eigentümer.

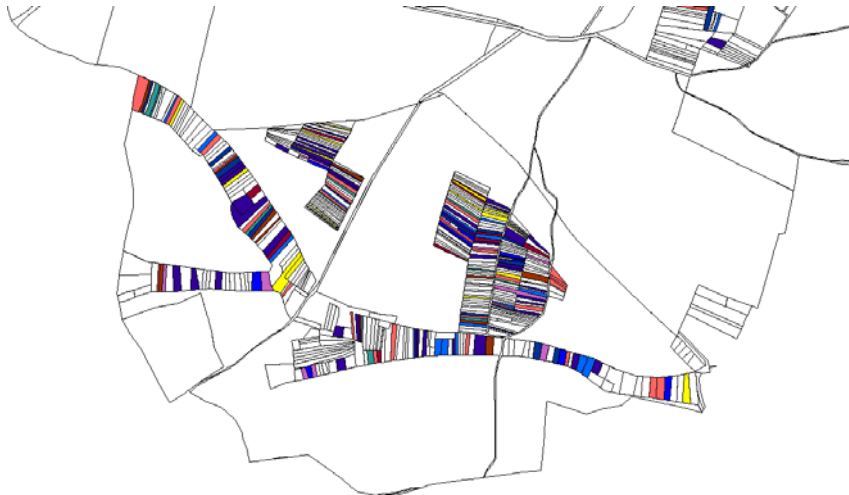


Abbildung 12. Eine Auswahl von zehn Eigentümern mit maximalem „Landtausch-Potenzial“ und ihre 162 Flurstücke

daher für spezielle Anwendungsgebiete in der Forstwirtschaft angepasst.

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf ein zusätzliches Preprocessing-Problem. Selbst in kleinen Regionen gibt es oft mehrere hundert Eigentümer, von denen viele nur einige wenige, winzige Flurstücke besitzen. Abbildung 11 zeigt ein Beispiel; es besteht aus 460 Flurstücken, die 127 Eigentümern gehören.

Bei so vielen Eigentümern ist es in der Praxis sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, Verhandlungen mit allen Anspruchsgruppen zu führen. Daher möchten die Forstämter eine „überschaubare“ Teilmenge der Eigentümer für die Durchführung eines Verfahrens auswählen. Natürlich sollen dabei solche Eigentümer identifiziert werden, die zusammen ein hinreichend großes – nach bestimmten Kriterien optimales – Verbesserungspotenzial für die Kostenstruktur besitzen. Sobald das geschehen ist, wird ein Landtauschprozess angestoßen – genau wie in der Landwirtschaft. Die Frage der Bestimmung einer besten Menge von k Eigentümern führt mathematisch auf ein *densest weighted k -subgraph*-Problem. Bekanntlich handelt es sich hierbei wieder um ein NP-schwieriges Problem. Durch die hier auftretende besondere Struktur kann es für die forstwirtschaftliche Praxis aber überraschend effizient gelöst werden; [11].

Literatur

- [1] Aurenhammer, F. (1987) Power Diagrams: Properties, algorithms and applications. *SIAM J. Computing* 16, 78–96.
- [2] Aurenhammer, F., Hoffmann, F., Aronov, B. (1992) Minkowski-type theorems and least-squares partitioning. In: *Proc. 8th Ann. ACM Symp. Comput. Geom.*, Berlin, 350–357.
- [3] Aurenhammer, F., Hoffmann, F., Aronov, B. (1998) Minkowski-type theorems and least-squares clustering. *Algorithmica* 20, 61–76.
- [4] Aurenhammer, F., Klein, R. (2000) Voronoi diagrams. In: *Handbook of Computational Geometry* (ed. by Sack, J., Urrutia, G.), Elsevier, 201–290.
- [5] Bárány, I. and Füredi, Z. (1986) Computing the volume is difficult. *Proc. 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 442–447.
- [6] Barnes, E.R., Hoffman, A.J., Rothblum, U.G. (1992) Optimal partitions having disjoint convex and conic hulls. *Math. Prog.* 54, 69–86.
- [7] Borgwardt, S. (2010). A Combinatorial Optimization Approach to Constrained Clustering. Ph.D. Thesis, TU München.
- [8] Borgwardt, S. (2013) On the diameter of partition polytopes and vertex-disjoint cycle cover. *Math. Prog.* 141, 1–20.
- [9] Borgwardt, S. (2014) On soft power diagrams. *Math. Mod. Alg. Oper. Research*, in print; arXiv:1307.3949
- [10] Borgwardt, S., Brieden, A., and Gritzmann, P. (2011) Constrained minimum k -star clustering and its application to the consolidation of farmland. *Oper. Research* 11, 1–17.
- [11] Borgwardt, S. and Schmiedl, F. (2014) Threshold-based preprocessing for approximating the weighted dense k -subgraph problem. *European J. Oper. Research* 234, 631–640.
- [12] Brieden, A. and Gritzmann, P. (2004) A quadratic optimization model for the consolidation of farmland by means of lend-lease agreements. In: *Operations Research Proceedings 2003: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR 2003)*, editors: Ahr, D., Fahrion, R., Oswald, M. and Reinelt, G., Springer-Verlag, Heidelberg, 324–331.
- [13] Brieden, A. and Gritzmann, P. (2010) On clustering bodies: Geometry and polyhedral approximation, *Discrete Comp. Geom.* 44, 508–534.
- [14] Brieden, A. and Gritzmann, P. (2012) On optimal weighted balanced clusterings: gravity bodies and power diagrams, *SIAM J. Discrete Math.* 26, 415–434.
- [15] Brieden, A., Gritzmann, P., Kannan, R., Klee, V., Lovász, L., and Simonovits, M. (1998) Approximation of diameters: Randomization doesn't help, *IEEE Symp. Found. Computer Sci. (FOCS'98)*, 244 – 251.
- [16] Brieden, A., Gritzmann, P., Kannan, R., Klee, V., Lovász, L., and Simonovits, M. (2001) Deterministic and randomized polynomial-time approximation of radii, *Mathematika* 48, 63–105.
- [17] Kochol, M. (1994) Constructive approximation of a ball by polytopes, *Math. Slovaca* 44, 99–105.

Dr. Steffen Borgwardt, Zentrum Mathematik,
Technische Universität München, 80290 München
borgwardt@ma.tum.de

Prof. Dr. Andreas Brieden, Universität der Bundeswehr, Werner-
Heisenberg-Weg 39, 85579 Neubiberg
andreas.brieden@unibw.de

Prof. Dr. Peter Gritzmann, Zentrum Mathematik,
Technische Universität München, 80290 München
gritzmann@tum.de



Steffen Borgwardts Forschung fällt in den Bereich der Diskreten Mathematik, Optimierung und Datenanalyse. Er hält einen Dokortitel der TU München und Diplome in Mathematik und Informatik. Im Frühjahr 2015 schloss er seine Habilitation ab. Aktuell ist er als Gastprofessor an der University of California, Davis. Davor arbeitete er als Vertretungsprofessor an der TU Braunschweig und leitete ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt für das Bayerische Staatsministerium. 2013 erhielt er zusammen mit A. Brieden und P. Gritzmann den EURO Excellence in Practice Award.



Andreas Brieden ist seit 2005 Inhaber der Professur für Statistik, insbesondere Risikomanagement, an der Universität der Bundeswehr München. Darüber hinaus leitet er seit Herbst 2013 das MBA Programm International Management der Universität der Bundeswehr und der European School of Business, Reutlingen. Ein aktueller Schwerpunkt seiner Forschungsinteressen ist die prädiktive Analytik mithilfe der Methoden der mathematischen Optimierung. Vor der Auszeichnung mit dem EURO Excellence in Practice Award erhielt er 2001, während seiner Habilitationszeit an der TU München, den Felix Klein-Preis für innovative Lehre und 2003 den Walther von Dyck-Forschungspreis.

Der Schwerpunkt seiner Forschungsinteressen ist die prädiktive Analytik mithilfe der Methoden der mathematischen Optimierung. Vor der Auszeichnung mit dem EURO Excellence in Practice Award erhielt er 2001, während seiner Habilitationszeit an der TU München, den Felix Klein-Preis für innovative Lehre und 2003 den Walther von Dyck-Forschungspreis.



Nach Professuren an den Universitäten Siegen, Augsburg und Trier ist Peter Gritzmann seit 1997 Professor der Fakultät für Mathematik (und seit 2008 auch der Fakultät für Informatik) der Technischen Universität München. Er war (z. T. wiederholt) Gastprofessor an der University of Washington, Seattle, dem Institute for Mathematics and its Applications an der University of Minnesota, Minneapolis und an der Université Paris 7. In seiner Forschung befasst sich Peter Gritzmann mit Fragen der Diskreten Mathematik, der Angewandten Geometrie und der Optimierung. Zu seinen Auszeichnungen gehören ein Feodor Lynen-Forschungsstipendium der Alexander von Humboldt-Stiftung, der Max Planck-Forschungspreis sowie der EURO Excellence in Practice Award. Peter Gritzmann war unter anderem Präsident der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Vizepräsident der Technischen Universität München sowie Vorsitzender des Feodor Lynen-Auswahlausschusses der Alexander von Humboldt-Stiftung.

Dieser Aufsatz ist eine (freie) Übersetzung des Artikels *Geometric Clustering for the Consolidation of Farmland and Woodland*, *Mathematical Intelligencer* 36 (2014), 37–44. Die Autoren danken dem Springer-Verlag für seine Druckerlaubnis; besonderer Dank gebührt Marjorie Senechal, der Herausgeberin des *Mathematical Intelligencer*, für ihre Unterstützung. Eine Kurzzusammenfassung erschien in den *IFORS News* 7 (2013), 10–11, anlässlich der Verleihung des *EURO Excellence in Practice Awards 2013* an die Autoren.