Zwei Fliegen und eine Klappe

Gerhard J. Woeginger

Knobelaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades gehören zur Mathematik einfach dazu. Manchmal verbirgt sich dahinter interessante Mathematik. Hier soll es darum gehen, zwei Aufgaben aus ganz verschiedenen Wettbewerben vorzustellen und aufzuzeigen, was die eine mit der anderen zu tun hat.

1 Die erste Aufgabe

Im Juli 2014 wurde die 55. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) in Kapstadt in Südafrika abgehalten. Bei diesem Wettbewerb versuchten sich 504 Schüler und 56 Schülerinnen aus 101 Ländern daran, sechs zum Teil äußerst knifflige mathematische Aufgaben zu lösen. Die erste Aufgabe sah dabei so aus:

Es sei $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen. Man beweise, dass es genau eine ganze Zahl $n \geq 1$ gibt, für die folgendes gilt:

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}. \tag{1}$$

Die Aufgabe war als „leichte“ Einstiegsaufgabe gedacht und wurde auch von 370 der 560 Teilnehmer vollständig gelöst. Die durchschnittlich erreichte Punktezahl betrug 5,348 Punkte (von 7 möglichen Punkten). Zum Vergleich: Die „schwierige“ sechste Aufgabe bei dieser IMO wurde nur von 15 Teilnehmern vollständig gelöst, und die durchschnittlich erreichte Punktezahl betrug bei ihr bloß 0,339 Punkte (von 7 möglichen).

Diese Aufgabe wurde bereits ausführlich in den *Mitteilungen* diskutiert: Timothy Gowers („Mini-Monomath“, *Mitteilungen* 22-4, S. 202–204) beschreibt seine Gedankengänge, Ideen und Irrwege, die ihn schließlich zur Lösung führten. Johannes Gerd Becker (*Mitteilungen* 23-1, S. 5–6) formuliert die Aufgabe in ein ökonomisches Produktionsproblem um, das er dann mit einer eleganten grafischen Methode löst.

2 Die Lösung der ersten Aufgabe

Wir definieren $b_n = (a_n - a_1) + (a_n - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$. Dann gilt $b_1 = 0$, und man rechnet leicht nach, dass aus der Monotonie $a_n < a_{n+1}$ auch die Monotonie $b_n < b_{n+1}$ folgt. Weiters ist (1) äquivalent zu

$$b_n < a_0 \leq b_{n+1}. \tag{2}$$

Da die Folge der ganzen Zahlen b_i mit $b_1 = 0$ beginnt und dann streng monoton gegen unendlich wächst, wird die positive ganze Zahl a_0 irgendwo zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Folgengliedern b_n und b_{n+1} zu liegen kommen. Daraus ergeben sich sofort die Existenz und die Eindeutigkeit der gewünschten Zahl $n \geq 1$.

Diese Lösung zeigt uns auch, dass die Aufgabe gar nichts mit ganzen Zahlen zu tun hat: Solange $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ eine *unbeschränkte* Folge positiver *reeller* Zahlen ist, gehen die obigen Argumente problemlos durch.

3 Die zweite Aufgabe

Bereits seit dem Jahr 2003 wird im Dezember immer der „Digitale Mathematische Adventskalender“ für Schüler veranstaltet. Organisiert wird dieser Kalender vom MATHEON (Berlin), seit dem Jahr 2010 in Zusammenarbeit mit 3TU.AMI (Niederlande). Vom 1. bis zum 24. Dezember geht jeden Tag ein Kalendertürchen auf, hinter dem sich ein knackiges mathematisches Rätsel verbirgt. Die Aufgaben machen Spaß, und außerdem gibt es schöne Preise zu gewinnen. Am 10. Dezember 2014 war die folgende Aufgabe (hier leicht gekürzt) hinter dem Kalendertürchen:

Niemand weiß, auf welch finsteren Wegen der Grinch ein fast echtes Gemälde von Pablo Picasso in seinen Besitz gebracht hat. Auf jeden Fall bietet er es nun zum Verkauf an und sechs Wichtel sind daran interessiert. Wichtel Atto bietet für das Bild 9610 Euro. Für Bilbo ist es 6727 Euro wert, für Chico 4805 Euro, für Dondo 3968 Euro, und für Espo 3100 Euro. Der knausrige Femto will nur 279 Euro dafür hergeben.

Der Grinch entschließt sich, eine Lotterie zu veranstalten. Jeder Wichtel kann beliebig viele Lose oder Losteile zum Stückpreis von 1 Euro kaufen, und der Picasso wird dann unter allen gekauften Losen verlost. Die sechs Wichtel kaufen sich also ihre Lose. Erstaunlicherweise maximiert die resultierende Losverteilung für jeden einzelnen Wichtel den erwarteten persönlichen Gewinn: Kein einziger Wichtel könnte seine Gewinnerwartung dadurch verbessern, dass er ein Hundertstel-Los oder Millionstel-Los mehr oder auch nur ein Milliardstel-Los weniger kauft. Der erwartete persönliche Gewinn wird durch die folgende Formel festgelegt:

$$\textit{Wert} \times \frac{\textit{Anzahl eigener Lose}}{\textit{Anzahl aller Lose}} - \textit{Lospreis}$$

In dieser Formel gibt der Bruch *die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wichtel die Lotterie gewinnt. Der* Wert *des Bildes ist der Euro-Wert, den der Wichtel dem Bilde zumisst. Der*

DOI 10.1515/dmvm-2015-0053

Verlosung von einem fast echten Picasso (Illustration: Michael Gralmann)

Lospreis *ist die Gesamtsumme, die der Wichtel für seine Lose bezahlt.*

Welche der folgenden Aussagen trifft auf diese Losverteilung zu?

1. Atto kauft 5107 Lose; der Grinch nimmt €9270 ein.
2. Atto kauft 2100 Lose; der Grinch nimmt €6510 ein.
3. Bilbo kauft 1596 Lose; der Grinch nimmt €4123 ein.
4. Bilbo kauft 1288 Lose; der Grinch nimmt €4991 ein.
5. Chico kauft 650 Lose; der Grinch nimmt €4030 ein.
6. Chico kauft 420 Lose; der Grinch nimmt €4340 ein.
7. Dondo kauft 744 Lose; der Grinch nimmt €2976 ein.
8. Dondo kauft kein Los; der Grinch nimmt €4740 ein.
9. Espo kauft 496 Lose; der Grinch nimmt €2480 ein.
10. Der knausrige Femto kauft 2 Lose; der Grinch nimmt €2480 ein.

4 Die Lösung der zweiten Aufgabe

Wir nummerieren die Wichtel in alphabetischer Reihenfolge von 0 bis 5 durch. Der i-te Wichtel ($0 \leq i \leq 5$) misst dem Bild einen Wert von w_i Euro zu und hat sich x_i Lose gekauft. Die Wertbemessungen w_i sind dann absteigend geordnet: $w_0 > w_1 > \cdots > w_5$. Die Gesamtzahl aller vorhandenen Lose beträgt $L = x_0 + x_1 + \cdots + x_5$. Wir führen außerdem noch $R_i = L - x_i$ als Anzahl aller Lose ein, die *nicht* vom i-ten Wichtel gekauft wurden. Die Gewinnerwartung des i-ten Wichtels beträgt dann

$$E(x_i) \;=\; w_i \cdot \frac{x_i}{R_i + x_i} - x_i. \qquad (3)$$

In dieser Formel sind w_i (der Wert des Bildes) und R_i (die Gesamtzahl der Lose der anderen Wichtel) fest vorgegeben, und nur die Variable x_i kann durch den i-ten Wichtel verändert werden. Die ersten beiden Ableitungen der Funktion E lauten:

$$E'(x_i) = w_i \cdot \frac{R_i}{(R_i + x_i)^2} - 1 \qquad (4)$$

$$E''(x_i) = -2w_i \cdot \frac{R_i}{(R_i + x_i)^3} \tag{5}$$

Da die zweite Ableitung E'' in (5) für alle $x_i \geq 0$ strikt negativ ist, ist die Gewinnerwartung E in diesem Bereich strikt konkav. Daraus folgern wir: Entweder (i) E fällt auf den nicht-negativen reellen Zahlen streng monoton, oder (ii) es gibt ein eindeutiges Maximum in einem Punkt $x^* > 0$, der die Gleichung $E'(x^*) = 0$ erfüllt. Im Fall (i) kauft sich der Wichtel gar keine Lose. Im Fall (ii) kauft der Wichtel $x_i = x^*$ Lose. Wir setzen die Ableitung in (4) gleich 0 und erhalten

$$x_i \;=\; (w_i - L) \cdot \frac{L}{w_i}. \tag{6}$$

Alles in allem ergibt das: Falls $w_i \leq L$, so kauft der i-te Wichtel keine Lose. Falls $w_i > L$, so kauft der i-te Wichtel genau $x_i = (w_i - L)\, L / w_i$ Lose.

An diesem Punkt können wir bereits die richtige Antwort unter den zehn Multiple-Choice-Antworten identifizieren. Jede der Antworten #1 bis #10 spezifiziert einen konkreten Wert für die Gesamtzahl L aller vorhandenen Lose. Wir testen die angebenen Werte der Reihe nach durch, und bestimmen mit Hilfe von (6) die entsprechenden Loszahlen x_i für $0 \leq i \leq 5$ mit $w_i > L$. Nur in Antwort #6 addieren sich die Loszahlen zur korrekten Summe L auf: Atto kauft $x_0 = 2380$ Lose, Bilbo $x_1 = 1540$, Chico $x_2 = 420$, und die anderen drei Wichtel kaufen nichts.

Die Kalenderaufgabe haben wir also gelöst. Dennoch bleiben viele offene Fragen: Wie löst man das denn ohne die Zusatzinformationen in den Multiple-Choice-Antworten? Wie sieht die Situation für andere Wichtelgruppen mit anderen Wertbemessungen w_i aus? Gibt es immer eine Losverteilung mit dieser Gleichgewichtseigenschaft? Kann es vielleicht zwei oder mehr verschiedene Losverteilungen mit dieser Gleichgewichtseigenschaft geben?

5 Die vollständige Lösung der zweiten Aufgabe

Wir wollen nun die allgemeine Situation mit $m \geq 2$ Wichteln mit reellen Wertbemessungen $w_0 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_{m-1} > 0$ betrachten. Wir werden zeigen, dass es eine einzige (eindeutige) Losverteilung gibt, die für alle Wichtel gleichzeitig den erwarteten persönlichen Gewinn maximiert; eine derartige Losverteilung werden wir im folgenden *perfekt* nennen.

Aus der obigen Diskussion wissen wir folgendes: Es gibt zwei Typen von Wichteln: Käufer und Nicht-Käufer. Die Käufer sind die Wichtel $0, 1, 2, \ldots, n$ mit hohen Werten w_i und die Nicht-Käufer sind die übrigen Wichtel $n+1, \ldots, m-1$ mit kleinen Werten w_i. Die Anzahl x_i der vom i-ten Käufer erworbenen Lose ist durch (6) festgelegt. Wir addieren die Gleichungen (6) über alle Käufer $i = 0, 1, \ldots, n$ auf und erhalten

$$L \;=\; \sum_{i=0}^{n} x_i \;=\; (n+1)L - L^2 \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{w_i}. \tag{7}$$

Mit (7) können wir nun die Gesamtzahl aller Lose in Abhängigkeit von n ausdrücken:

$$L \;=\; L(n) \;=\; \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{w_i}} \tag{8}$$

Damit der n-te Wichtel auch wirklich Käufer ist und damit der $(n+1)$-te Wichtel auch wirklich Nicht-Käufer ist, muss die Zahl $L(n)$ außerdem folgendes erfüllen:

$$w_{n+1} \;\leq\; L(n) \;<\; w_n. \tag{9}$$

Den Grenzfall $n = m - 1$ können wir dadurch erledigen, dass wir einen zusätzlichen Wichtel einführen, dessen Wertbemessung w_m sehr nahe bei 0 liegt (oder eine Folge von zusätzlichen Wichteln, deren Wertbemessungen gegen 0 gehen).

Wir fassen zusammen: Eine perfekte Losverteilung mit genau n Käufern existiert dann und nur dann, wenn n und $L(n)$ den Bedingungen (8) und (9) genügen. Wir setzen $a_i = 1/w_i$ und sehen, dass eine perfekte Losverteilung mit genau n Käufern dann und nur dann existiert, wenn n der folgenden Ungleichung genügt:

$$a_n \;<\; \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \;\leq\; a_{n+1}. \tag{10}$$

Wir sind bei der reellen Variante unserer ersten Aufgabe angekommen. Auch diese zweite Fliege kann mit der alten Klappe erschlagen werden. Wir folgern, dass es eine eindeutige Zahl n von Käufern gibt, die (1) und somit (10) und (9) erfüllt. Ergo gibt es für jede Wichtelgruppe genau eine perfekte Losverteilung.

Weiterführende Links

Alle Aufgaben der Internationalen Mathematik-Olympiaden findet man auf http://www.imo-official.org/problems.aspx, die Aufgaben des Mathematischen Adventskalenders auf www.mathekalender.de/index.php.

Prof. Dr. Gerhard J. Woeginger, TU Eindhoven, P.O. Box 513,
5600 MB Eindhoven, Niederlande
gwoegi@win.tue.nl

Gerhard Woeginger studierte, promovierte und habilitierte an der TU Graz (Österreich). 2001 wurde er Professor für Diskrete Mathematik an der Universität Twente (Niederlande), und seit 2004 ist er Professor für Kombinatorische Optimierung an der TU Eindhoven (Niederlande). Seine Forschungsinteressen liegen in der Algorithmischen Mathematik und insbesondere im Schnittgebiet mit der Theoretischen Informatik.