Billard und ebene Flächen

Diana Davis

Billard, die Zick-Zack-Bewegungen eines Balls auf einem Tisch, ist ein reichhaltiges Feld gegenwärtiger mathematischer Forschung. In diesem Artikel diskutieren wir Fragen und Antworten zum Thema Billard, und zu dem damit verwandten Thema ebener Flächen.

1 Los geht's!

Wo auch immer Sie gerade sitzen und diesen Artikel lesen: Um Sie herum stoßen ständig Sauerstoff-Atome und andere Gasteilchen zusammen und prallen voneinander und von den Raumwänden ab. Die genaue Bewegung der einzelnen Teilchen nachzuvollziehen, ist vielleicht interessant, aber sehr kompliziert. Mathematiker neigen dazu, das Problem zuerst soweit wie möglich zu vereinfachen, um dann zunächst das vereinfachte System zu verstehen. In unserem Fall könnten wir das System dahingehend verändern, dass wir nur ein einziges Teilchen in seiner Bewegung durch den Raum studieren und alle anderen Teilchen außer Acht lassen, sodass es keine Kollisionen oder andere Interaktionen zwischen verschiedenen Molekülen mehr gibt. Wir könnten es sogar noch weiter auf zwei statt drei Dimensionen vereinfachen, indem wir ein Teilchen auf einer Oberfläche studieren, gleich einem Ball auf einem Billardtisch. Wie sich herausstellen wird, ist schon dieser Fall interessant genug.

Betrachten wir den einfachsten Fall, in dem der Billardtisch quadratisch ist. Wir nehmen an, dass wir uns den Ball (oder das Teilchen) als einen einzigen Punkt vorstellen können, der sich reibungslos bewegt (also nie zur Ruhe kommt), und dass er beim Auftreffen auf die Bande des Tisches im gleichen Winkel reflektiert wird, in dem er darauf zugelaufen ist (genau wie in der Wirklichkeit).

Ist es möglich, den Ball so anzustoßen, dass sich sein Pfad über den Tisch wiederholt? Ja: Wenn wir ihn vertikal oder horizontal in Bewegung setzen, wird er zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten an parallelen Rändern des Tisches hin- und herlaufen, siehe Abbildung 1(a). Wir sagen dann, dass diese *Trajektorie* (Pfad) *periodisch* mit *Periode* 2 ist (der Ball springt zweimal vom Rand des Tisches zurück, bevor er seine Bahn wiederholt). Andere Beispiele für periodische Trajektorien, mit Periode 4 bzw. 6, sind in den Abbildungen 1(b)–1(c) dargestellt.

Kann man den Ball so anstoßen, dass sich seine Trajektorie *niemals* wiederholt? Sich das Bild einer solchen *nicht-periodischen* Trajektorie vorzustellen, ist deutlich schwieriger, da sich die Trajektorie ja nie wiederholt. Tatsächlich wird die Trajektorie den Tisch Stück für Stück einnehmen, bis das Bild zu einem gänzlich schwarzen Quadrat geworden ist (Abbildung 1(d)). Wenn wir uns jedoch nicht auf den Tisch beschränken, sondern den Tisch *aufklappen*, dann gelingt es, das Bild einer solchen Trajektorie zu zeichnen.

Betrachten wir dazu die einfache Trajektorie, die in Abbildung 2(a) dargestellt ist. In dem Moment, in dem der Ball den oberen Rand des Tisches erreicht, *klappen* wir den Tisch nach oben *auf*, indem wir eine Kopie des Tisches an den oberen Rand anfügen. Der Ball kann nun in dieser Kopie weiter geradeaus laufen, anstatt nach unten umgelenkt zu werden (Abbildung 2(b)).[1] Wenn der Ball nun als nächstes den rechten Rand des Tisches erreicht, machen wir das gleiche noch einmal: Wir klappen den Tisch nach rechts auf, indem wir dort eine weitere Kopie anfügen, in der der Ball geradeaus weiterlaufen kann (Abbildung 2(c)). Diesen Vorgang können wir beliebig oft wiederholen: Wir erstellen jedes Mal eine weitere Kopie, wenn die Trajektorie eine Kante des Tisches erreicht. Auf diese Art können wir die Trajektorie auf dem quadratischen Tisch durch eine gerade Linie auf Millimeter-Papier darstellen.

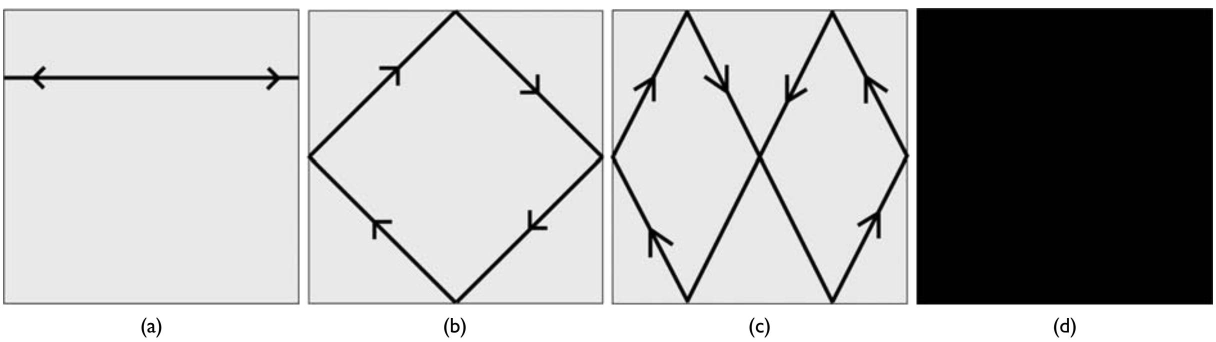


Abbildung 1. *Unterschiedliche Pfade auf einem quadratischen Billardtisch*

DOI 10.1515/dmvm-2015-0059

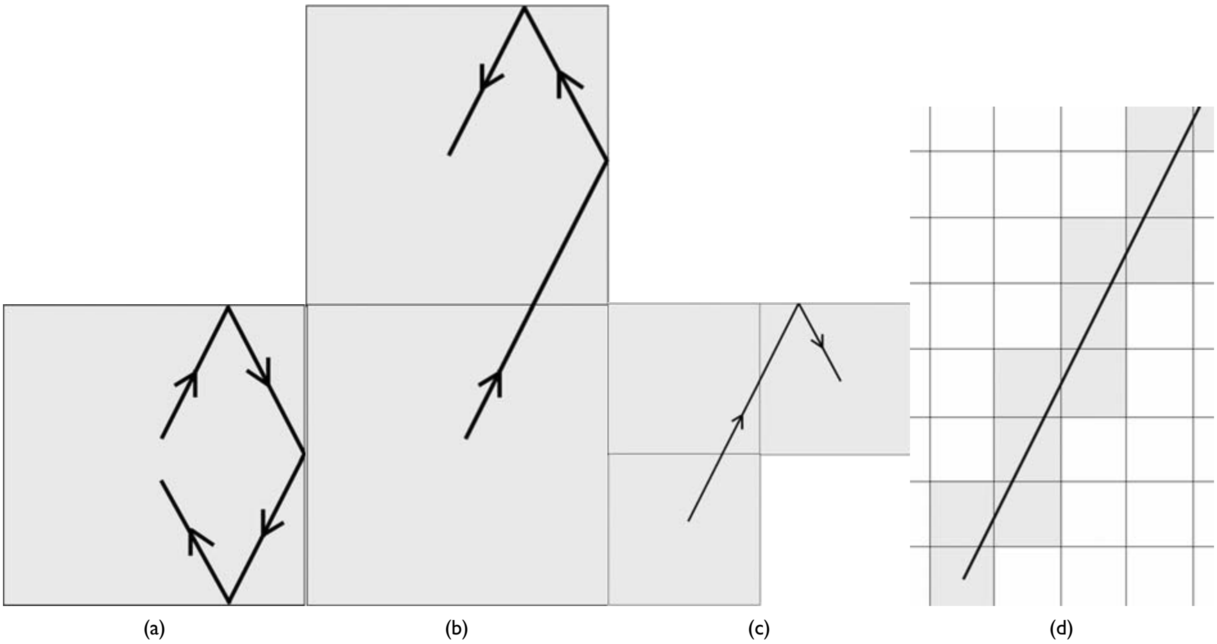


Abbildung 2. *Aufklappen des Billardtisches*

Mithilfe dieser Darstellung können wir mühelos ein Beispiel für eine nicht-periodische Trajektorie finden. Nehmen wir dazu an, dass wir eine Linie mit *irrationaler* Steigung zeichnen. Diese wird niemals zwei verschiedene horizontale (oder vertikale) Kanten im gleichen Punkt schneiden, denn täte sie das, dann wäre die Steigung zwischen den entsprechenden Punkten gleich dem Verhältnis zweier ganzer Zahlen. Wir haben aber eine irrationale Steigung gewählt, also kann das nicht passieren. Stoßen wir den Ball also mit *irgendeiner* irrationalen Steigung an, so wird seine Trajektorie auf dem Tisch nicht-periodisch sein. Auf die gleiche Weise kann man zeigen, dass die Trajektorie des Balls periodisch sein wird, wenn wir ihn mit *rationaler* Steigung anspielen.

2 Ungewöhnliche Billardtische

Hier sind einige grundsätzliche Fragen, die man zu dynamischen Systemen aufwerfen kann: Weist das System periodisches Verhalten auf? Gibt es nicht-periodisches Verhalten? Wir haben gesehen, dass beide Fälle bereits für den einfachsten Fall, den des quadratischen Tisches, auftreten können. Verzerrt man den Tisch in vertikaler oder horizontaler Richtung, so bleiben die Regeln des Systems unverändert. Folglich gelten dieselben Resultate auch für alle rechteckigen Tische. Jetzt sind wir vielleicht bereit, unser System komplizierter zu machen. Dieselben Fragen können wir uns auch für jede andere beliebige Tischform stellen – beispielsweise für einen dreieckigen Tisch, einen fünfeckigen Tisch oder einen Tisch, der aus mehreren zusammengeklebten Rechtecken besteht. Abbildung 3 zeigt eine Trajektorie mit vielen Bandenkontakten auf einem fünfeckigen Tisch. (Können Sie sich vorstellen, wie eine Trajektorie auf einem kreisförmigen Tisch aussehen würde?)

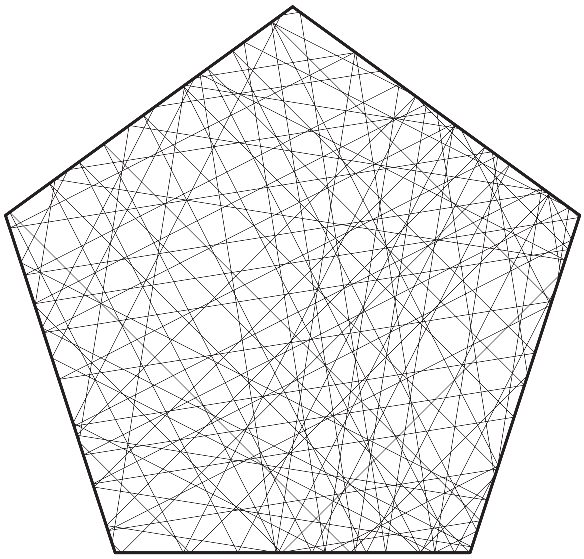


Abbildung 3. *Eine Trajektorie auf einem fünfeckigen Tisch*

Wir haben bereits gesehen, dass im Fall des quadratischen Tisches jede Trajektorie entweder periodisch ist (und wir ihr Bild zeichnen können) oder dass ihr Pfad schließlich den gesamten Tisch abdeckt (das Bild wird schwarz). Trifft das immer zu? Überraschenderweise lautet die Antwort: Nein! Es gibt Tische, auf denen eine Trajektorie einen Teil des Tisches komplett abdecken kann, aber einen anderen Teil nie erreicht: Eine Illustration dieses Phänomens ist in Abbildung 4 dargestellt, sie wurde von Curtis McMullen konstruiert. Die Trajektorie bleibt in dem Rechteck und einem Teil des Quadrats „stecken", die zwei Ecken des Quadrats kann sie nie erreichen. Ließen wir den Ball weiterlaufen, so würde die schattierte Region komplett schwarz eingefärbt, die Ecken jedoch blieben weiß.

Das wirft folgende Frage auf: Welche Tischformen besitzen die Eigenschaft, dass jede nicht-periodische Trajek-

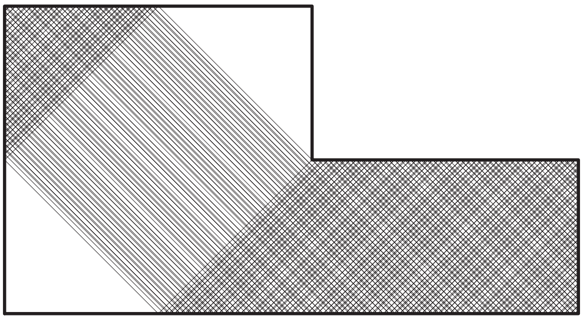


Abbildung 4. *Eine nicht-periodische Trajektorie, die niemals die weißen Ecken erreicht*

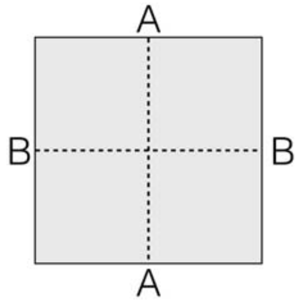


Abbildung 5. *Identifizierung der Kanten eines Quadrates*

torie den ganzen Tisch abdeckt? Wie sich zeigt, ist das für die meisten Tische nicht der Fall, sondern lediglich für solche mit ausgeprägter Symmetrie. Dazu zählen Polygone, Tische aus mehreren zusammengeklebten Quadraten, und einige einfache Dreiecke. Gegenwärtig wird weiter daran gearbeitet, mehr Beispiele für Tischformen mit dieser Eigenschaft zu finden, aber bislang sind nur diese wenigen Beispiele bekannt [1, 5, 6].

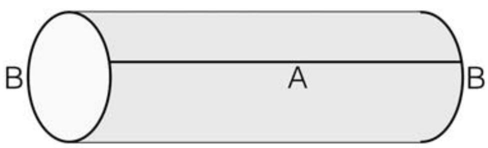
3 Billard auf einem Donut

Gehen wir noch einmal zu dem aufgeklappten Billardtisch zurück. Wir haben den oberen Rand des Tisches aufgeklappt und damit eine Kopie des Tisches erzeugt, in der der Ball weiter geradeaus laufen kann. Dadurch verhält sich der Rand, von dem der Ball abgeprallt wäre, nicht mehr wie eine Wand. Deshalb stellen wir ihn in Abbildung 5 als gestrichelte Linie dar. Der neue obere Rand ist nur eine Kopie des unteren Randes, deshalb bezeichnen wir beide mit A, um uns an die Identität der beiden zu erinnern. Genauso haben wir den rechten Rand des Tisches aufgeklappt und eine weitere Kopie des bereits aufgeklappten Tisches erzeugt, wodurch wir nun vier Kopien des Originaltisches haben. Der neue rechte Rand ist eine Kopie des linken Randes, also bezeichnen wir beide mit B. Erreicht die Trajektorie nun den oberen Rand A, erscheint sie einfach von Neuem an der gleichen Stelle des unteren Randes A und läuft weiter. Genauso erscheint sie einfach von Neuem am linken Rand B, wenn sie den rechten Rand B getroffen hat. Diesen Prozess bezeichnet man als *Identifikation* des oberen und des unteren bzw. des linken und des rechten Randes.

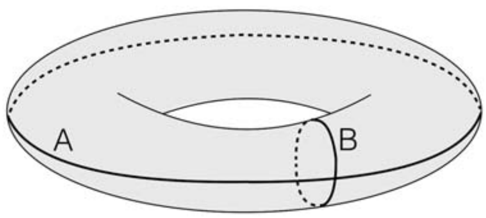
Diese Idee des „Wiedererscheinens" aus der linken Wand, nachdem man die rechte Wand erreicht hat, könnte Ihnen aus Videospielen wie „Pac-Man" , „Snake" oder „Portal" geläufig sein. Was Ihnen dabei entgangen sein mag, ist die Tatsache, dass Sie sich in Folge der Identifikationen nicht mehr auf einer flachen Ebene befinden, sondern auf einer ganz anderen ebenen Fläche! In Wirklichkeit ist diese Fläche die Oberfläche eines Bagels oder Donuts, die von Mathematikern als *Torus* bezeichnet wird.

Es ist hilfreich, sich den Grund dafür zu vergegenwärtigen. Klebt man beide Kopien des Randes A zusammen, so erhält man einen Zylinder, dessen beiden Enden jeweils gleich dem Rand B sind (Abbildung 6). Wenn Sie den Zylinder nun umbiegen, um beide Kopien des Randes B auch zusammenzukleben, dann erhalten Sie die Torusfläche (dabei müssen Sie den Zylinder ordentlich strecken und stauchen, aber keine Sorge, Sie dürfen sich ihn als sehr elastisch vorstellen).

Auf dieselbe Art können wir viele andere Flächen erzeugen (siehe Abbildung 7). Wenn wir beispielsweise alle parallelen Kanten eines regelmäßigen Achtecks identifizieren, so erhalten wir eine andere Fläche, nämlich einen Torus mit zwei Löchern [4]. Genauso können wir zwei Fünfecke nehmen, eines um 180 Grad drehen, und alle fünf Paare paralleler Kanten identifizieren.[2] Es stellt sich heraus, dass die entstandene Fläche ebenfalls der Torus mit zwei Löchern ist.

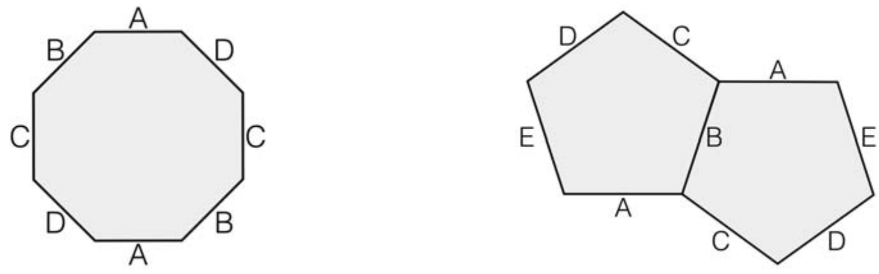


(a)



(b)

Abbildung 6. *Zusammenkleben des Torus*



(a) (b)

Abbildung 7. *Ein Achteck oder zwei Fünfecke kann man zum Torus mit zwei Löchern zusammenkleben.*

Können Sie sich vorstellen, auf welche Weise man die identifizierten Kanten des Achtecks aufrollen und zusammenkleben muss, so wie wir es mit dem Quadrat gemacht haben? Es ist viel schwieriger – das Achteck muss ordentlich gequetscht werden, wenn man seine Ecken aneinander fügt. Dennoch kann man es schaffen; in *Algebraic Topology* von Allen Hatcher findet sich eine sehr gute Darstellung [3, S. 5].

4 Verdrehung der Oberfläche

Meine Forschung über das Doppelfünfeck und andere verwandte Flächen befasst sich mit dem folgenden Problem: Angenommen, wir haben eine Trajektorie auf einer Fläche. Nun zerschneiden wir die Fläche, verdrehen sie, und setzen sie derart wieder zusammen, dass die zerschnittenen Ränder erneut zusammengeklebt werden. Was geschieht dadurch mit der Trajektorie?

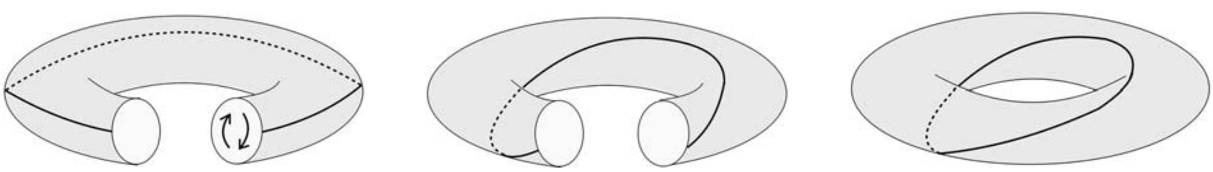
Auf dem Torus bedeutet das, die Fläche einmal aufzuschlitzen, sie ein-, zwei-, drei- oder mehrmals zu verdrehen (in Abbildung 8 wird sie einmal verdreht), und dann die Enden wieder zusammenzukleben. Wenn wir mit einer sehr einfachen Trajektorie beginnen (einem Äquator des Torus), dann führt das Verdrehen dazu, dass die Trajektorie um das Loch in der Mitte herumläuft.

Schon für dieses einfachste Beispiel ist es schwierig, sich die Trajektorie auf der Torusfläche vorzustellen. In Abbildung 9 hingegen sehen wir, dass sie sich viel leichter auf das Quadrat zeichnen lässt; das trifft für die Originaltrajektorie in Abbildung 9(a) zu als auch auf die verdrehte in Abbildung 9(b). Im Fall komplizierterer Flächen und komplizierterer Trajektorien (siehe Abbildung 9(c)) lassen sich die Verdrehung und ihre Folgen viel leichter auf den Polygonen studieren als auf den drei-dimensionalen Darstellungen der Flächen.

Wir benötigen noch eine geeignete Art, um auf eine Trajektorie auf einer Fläche Bezug zu nehmen. Als sehr bequem erweist es sich, einfach die Folge der Kanten-Bezeichnungen aufzuschreiben, welche die Trajektorie kreuzt: Die Trajektorie in Abbildung 9(a) würde als … *BBB* … oder kurz $\overline{B}$ bezeichnet, die Trajektorie in Abbildung 9(b) wäre … *ABABAB* … oder $\overline{AB}$, und die aus Abbildung 9(c) wäre $\overline{EBECDC}$. Man spricht von den *Schnittsequenzen* der Trajektorien.

Man kann sich nun die folgende Frage stellen: Können wir entscheiden, ob eine gegebene Folge von *A*s und *B*s die Schnittsequenz einer Trajektorie auf dem quadratischen Torus ist? Können Sie sich eine Folge von *A*s und *B*s überlegen, die keiner Schnittsequenz auf dem quadratischen Torus entspricht?[3]

Die Schnittsequenzen aus *A*s und *B*s auf dem quadratischen Torus sind interessant und von großer mathematischer Schönheit. Es lässt sich ein Bezug zwischen ihnen und Kettenbrüchen herstellen: Man kann die Schnittsequenz einer Trajektorie nutzen, um die Kettenbruchdarstellung der Steigung der Trajektorie zu bestimmen. Selbst im Fall einer irrationalen Steigung gibt es einen Algorithmus, mit dem man immer bessere Näherungen der Steigung aus der Schnittsequenz gewinnen kann. Finden Sie heraus, wie sie die Anzahl der *A*s und *B*s in einer Wiederholung der Schnittsequenz einer periodischen Trajektorie nutzen können, um die (rationale) Steigung der Trajektorie zu ermitteln?[4]



(a) (b) (c)

Abbildung 8. *Der Torus wird durchgeschnitten, verdreht, und wieder zusammengeklebt.*

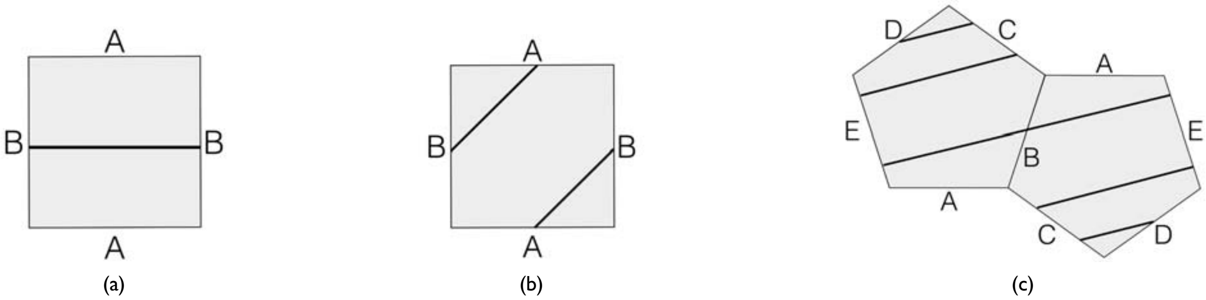


Abbildung 9. *Die Verdrehung der Trajektorie auf einem Qudrat (a)–(b) und eine Trajektorie auf zwei Fünfecken (c)*

Das Thema meiner Forschung ist es, alle möglichen Schnittsequenzen für das Doppelfünfeck und für verwandte Flächen zu beschreiben: Welche Folgen von *A*s, *B*s, *C*s, *D*s und *E*s beschreiben tatsächliche Trajektorien auf dem Doppelfünfeck? Die oben beschriebenen Verdrehungen der Fläche können dabei behilflich sein, denn wenn wir schon eine Trajektorie auf der Fläche kennen, so können wir durch Verdrehen eine neue gewinnen [2]. John Smillie und Corinna Ulcigrai ist es gelungen, alle möglichen Schnittsequenzen auf dem regelmäßigen Achteck zu beschreiben, und sogar eine Analogie zur Kettenbruchzerlegung für die Richtung der Trajektorie zu finden. Leider ist die Antwort viel schwieriger zu beschreiben als die Resultate für den quadratischen Torus, aber das ist auch nicht überraschend: Die einfachsten Beispiele sind meistens die elegantesten.

Das Studium ebener Flächen[5] ist ein reichhaltiges Feld gegenwärtiger Forschung. Maryam Mirzakhani erhielt kürzlich die Fields-Medaille, die höchste Auszeichnung in der Mathematik, für ihre Forschung über Billard und ebene Flächen. Mirzakhani studiert jedoch nicht nur die Dynamik eines Balls auf einem einzigen Tisch oder einer einzigen Fläche, sondern sogar auf einer ganzen Gruppe von Flächen. Letztlich läuft das auf das Studium des Raumes *aller möglichen* Flächen hinaus. Das Studium solcher Räume, von Billard, ebenen Flächen und anderen verwandten Fragen, bezeichnet man als *Dynamik*. Das ist ein recht neues Feld in der Mathematik, in dem intensiv geforscht wird.

Anmerkungen

1. Am besten stellt man sich einen transparenten Tisch vor, dann muss man sich nicht darum sorgen, ob der Ball jetzt auf der „Oberseite" oder auf der „Unterseite" des Tisches ist.
2. Ich habe ein Video erstellt, in dem Tanz benutzt wird, um meine Forschung über das Doppelfünfeck rigoros zu erklären: vimeo.com/47049144.
3. Lösung: Zum Beispiel irgendeine Sequenz, die sowohl *AA* als auch *BB* enthält.
4. Lösung: Steigung $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Anzahl der As}}{\text{Anzahl der Bs}}$.
5. Flächen wie die, die wir hier betrachtet haben, bezeichnet man oft als eben, da sie dadurch entstehen, dass man Kanten von Polygonen, die Teil der Ebene sind, so zusammenklebt, dass eine Trajektorie immer parallel zu sich selbst ist.

Die Abbildungen 3 und 4 wurden von Curtis McMullen zur Verfügung gestellt.

Literatur

[1] Irene Bouw and Martin Möller. Teichmüller curves, triangle groups, and Lyapunov exponents. *Annals of Mathematics*, 172(1):139–185, 2010.

[2] Diana Davis. Cutting sequences, regular polygons, and the Veech group. *Geometriae Dedicata*, 162(1):231–261, 2013.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[4] John Smillie and Corinna Ulcigrai. Beyond Sturmian sequences: coding linear trajectories in the regular octagon. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 102(2):291–340., 2011.

[5] William Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Inventiones Mathematicae*, 87:553–583, 1989.

[6] Clayton Ward. Calculation of Fuchsian groups associated to billiards in a rational triangle. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 18(4):1019–1042, 1998. http://journals.cambridge.org/article_S0143385798117479.

Dieser Artikel wurde durch das Mathematics Translations in Europe (MaTiE) Projekt von Mathematics in Europe in Kollaboration mit IMAGINARY übersetzt. Der Übersetzer ist Feliks Nüske. Das Projekt hat Unterstützung von der Münchner Rück. Sie können alle übersetzten Artikel auf www.mathematics-in-europe.eu finden.

Diana Davis arbeitet an Problemen in den Bereichen Geometrie, Billard und Dynamik. Sie hat ihren PhD in Mathematik an der Brown University erhalten und arbeitet derzeit als PostDoc an der Northwestern University.