Höhere Invarianten

Uwe Jannsen und Guido Kings

Im April 2014 hat der DFG-Sonderforschungsbereich 1085 „Höhere Invarianten – Wechselwirkungen zwischen Arithmetischer Geometrie und Globaler Analysis“ an der Universität Regensburg seine Arbeit aufgenommen. Was sich hinter dem Begriff „Höhere Invarianten“ verbirgt und worin die Ziele des Sonderforschungsbereiches bestehen, soll in diesem Einführungsartikel an zwei Beispielen näher erläutert werden.

Höhere Invarianten, wie sie in diesem SFB untersucht werden, sind systematische und strukturelle Verfeinerungen klassischer, vor allem kohomologischer, Invarianten, von Vektorbündeln, Zykeln, d. h. Linearkombinationen von Untermannigfaltigkeiten, oder Kohomologie- und Homotopieklassen. Wir denken hier an primäre Invarianten wie Chernklassen, Zykelklassen in der Kohomologie oder in Chowgruppen, aber auch an Spektren in der Topologie.

Diese primären Invarianten werden seit langem studiert und haben sich bei der Lösung vieler Probleme bewährt. Obwohl viele Fragen über diese primären Invarianten ungelöst sind, gibt es wichtige Fälle, in denen diese Invarianten für eine systematische Untersuchung nicht fein genug sind oder keine Aussage treffen. Zum Beispiel können die Chernklassen eines Vektorbündels verschwinden, ohne dass das Vektorbündel trivial ist, oder die Zykelabbildung in die Kohomologie kann verschwinden, ohne dass der Zykel rational äquivalent zu Null ist. In diesen Fällen braucht man systematische Verfeinerungen der primären Invarianten, um die Vektorbündel oder Zykel weiter zu studieren. Hierzu gehören sekundäre charakteristische Klassen oder die Abel-Jacobi-Abbildung, die einfache Beispiele für die in diesem SFB untersuchten höheren Invarianten sind. Auch diese beiden höheren Invarianten sind selbst bereits klassisch und können weiter verfeinert werden, aber für eine erste Übersicht bilden sie einen hervorragenden Ausgangspunkt und daher wollen wir uns in diesem Artikel auf sie konzentrieren.

1 Sekundäre charakteristische Klassen

1.1 Charakteristische Klassen von Vektorbündeln

Sei V ein komplexes Vektorbündel auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Hier kann man an das (komplexe) Tangentialbündel denken, aber Vektorbündel ergeben sich oft auch durch Betrachtung geometrischer Probleme.

Lokal ist ein Vektorbündel V immer isomorph zum trivialen Bündel $U \times \mathbb{C}^r$, aber im allgemeinen gilt dies nicht global, d. h. das Vektorbündel ist nicht von der Gestalt $X \times \mathbb{C}^r$. Betrachtet man zum Beispiel das (unendlich breite) Möbiusband als Vektorbündel über dem Einheitskreis S^1 (siehe Abbildung 1), so würde eine globale Trivialisierung einem nicht-verschwindenden Schnitt entsprechen, den es aber nicht gibt. Wie kann man feststellen, ob ein vorgegebenes Bündel global trivial ist?

Warum das überhaupt eine interessante Frage ist, lässt sich am Beispiel einer Riemannschen Fläche X erläutern. Es ist von fundamentaler Bedeutung für die Geometrie der Fläche, die meromorphen Funktionen auf X mit vorgegebenen Null- und Polstellen zu kennen.

Sei $D = \sum_{P \in X} n_P(P)$ ein Divisor auf X, also eine endliche formale Linearkombination von Punkten mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Betrachtet man für $U \subset X$ offen die meromorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ deren Verschwindungs- bzw. Polordnung durch $\operatorname{ord}_P f \geq -n_P$ gegeben ist, so wird dadurch ein *Geradenbündel* $L(D)$ (ein Vektorbündel vom Rang 1) definiert. Das Bündel $L(D)$ besitzt genau dann eine globale holomorphe Trivialisierung, wenn D der Divisor einer globalen meromorphen Funktion ist.

Die charakteristischen Klassen von V sind kohomologische Invarianten, deren Verschwinden eine notwendige Bedingung für die globale Trivialität V ist.

Wir wollen kurz darauf eingehen, wie man die charakteristischen Klassen definieren kann. Man wählt zunächst einen *Zusammenhang* auf V

$$\nabla : E^0(X, V) \to E^1(X, V),$$

also eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung von C^∞-Schnitten von V in die C^∞-1-Formen mit Werten in V, die die Leibniz-Regel erfüllt.

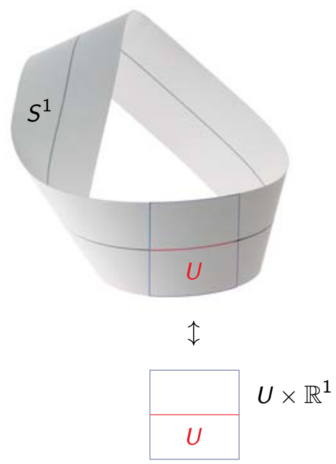

Abbildung 1. *Das unendlich breite Möbiusband ist ein flaches Vektorbündel über S^1*

 DOI 10.1515/dmvm-2015-0083

Eine fundamentale Invariante von ∇ ist die *Krümmung* R. Dies ist eine $\mathrm{End}(V)$-wertige 2-Form. Für ein Geradenbündel ist R einfach eine globale 2-Form auf X. Die zugehörige Klasse

$$\mathrm{ch}_1(L) := [R] \in H^2_{\mathrm{dR}}(X) := \frac{\text{geschlossene 2-Formen}}{\text{exakte 2-Formen}}$$

in der de Rham-Kohomologie ist die *erste charakteristische Klasse* von L. In analoger Weise definiert man eine k-te charakteristische Klasse von V

$$\mathrm{ch}_k(V) \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(X)$$

und zeigt, dass sie nicht von ∇ abhängt.

Für die oben definierten Geradenbündel $L(D)$ auf einer Riemannschen Fläche X hat die erste charakteristische Klasse eine einfache Bedeutung. Man hat einen Isomorphismus $H^2_{\mathrm{dR}}(X) \cong \mathbb{C}$ (Integration über die Fundamentalklasse) und damit gilt bis auf Normalisierung

$$\mathrm{ch}_1\left(L(D)\right) = \deg D := \sum_{P \in X} n_P,$$

d. h. man erhält den *Grad* des Divisors D.

Das Verschwinden der $\mathrm{ch}_k(V)$ ist eine notwendige Bedingung für die Trivialität des Bündels, die aber im Allgemeinen nicht hinreichend ist. Im Falle eines Geradenbündels L ist jedoch die C^∞-Isomorphieklasse von L bereits durch $\mathrm{ch}_1(L)$ eindeutig bestimmt.

Auf einer Riemannschen Fläche besitzen also die Geradenbündel $L(D)$ mit $\deg D = 0$ einen globalen C^∞-Schnitt, aber nicht notwendig einen globalen holomorphen Schnitt. Die (holomorphen) Isomorphieklassen holomorpher Geradenbündel mit $\mathrm{ch}_1(L) = 0$ werden durch die Jacobische Varietät $J(X)$ von X parametrisiert. Diese ist der Wertebereich der Abel-Jacobi-Abbildung (siehe unten).

1.2 Sekundäre charakteristische Klassen flacher Bündel

Wenn die Krümmung R eines Zusammenhangs ∇ auf V verschwindet, nennt man (V, ∇) *flach* und es ist $\mathrm{ch}_k(V, \nabla) = 0$. Es ist eine interessante Frage, ob man auch in diesem Fall aussagekräftige kohomologische Invarianten für (V, ∇) definieren kann. Eine positive Antwort hierauf liefern die sekundären charakteristischen Klassen.

Als Ausgangspunkt betrachten wir die Änderung von $\mathrm{ch}_k(V, \nabla_0)$, wenn man ∇_0 durch einen anderen Zusammenhang ∇_1 ersetzt. Die fundamentale *Transgressionsformel* beschreibt den Unterschied durch eine explizite exakte Form

$$\mathrm{ch}_k(V, \nabla_1) - \mathrm{ch}_k(V, \nabla_0) = d \int_0^1 \mathrm{tr}(\omega k R_t^{k-1}) dt. \quad (1)$$

Hierbei ist $\omega := \nabla_1 - \nabla_0$ und R_t die Krümmung von $\nabla_t := \nabla_0 + t\omega$. Dies zeigt auch die Unabhängigkeit der Kohomologieklasse $\mathrm{ch}_k(V)$ vom Zusammenhang ∇.

Für einen geeigneten Zusammenhang ∇_1 (man wählt den adjungierten Zusammenhang zu ∇_0 bezüglich einer Metrik h) verschwindet die linke Seite der Transgressionsformel (1) und die Form

$$\widehat{\mathrm{ch}}_{2k-1}(V, \nabla_1, \nabla_0) := \int_0^1 \mathrm{tr}(\omega k R_t^{k-1}) dt$$

ist geschlossen. Die $2k-1$-te *sekundäre charakteristische Klasse* ist die Kohomologieklasse

$$\widehat{\mathrm{ch}}_{2k-1}(V) := [\widehat{\mathrm{ch}}_{2k-1}(V, \nabla_1, \nabla_0)] \in H^{2k-1}_{\mathrm{dR}}(X).$$

Die Transgressionsformel (1) liefert also in struktureller Weise eine Verfeinerung des Cherncharakters und damit eine höhere Invariante im Sinne des SFB.

1.3 Anwendung sekundärer Klassen in der Indextheorie

In der Indextheorie ist man an topologischen Invarianten interessiert, die durch das Spektrums eines geeigneten geometrischen Operators beschrieben werden. Ein klassisches Beispiel ist der Index eines elliptischen Differentialoperators im Zusammenhang mit dem Atiyah-Singer-Index-Theorem.

Bismut hat für Familien von Mannigfaltigkeiten einen analogen Indexsatz bewiesen. Sehr grob wird dabei für eine Familie $\pi : M \to B$ der Push-Forward $\pi_! : K^0(M) \to K^0(B)$ topologisch und analytisch ausgerechnet. Betrachtet man das Ergebnis in der de Rham-Kohomologie, so erhält man eine Transgressionsformel, die den Unterschied durch eine exakte Form, die η-Invariante (bzw. -Form), beschreibt.

Für die sekundären Klassen haben Bismut und Lott auch einen solchen Indexsatz für Familien bewiesen. Hierbei betrachtet man einerseits das Faserintegral der sekundären Klassen und andererseits die sekundären Klassen der höheren direkten Bilder des flachen Bündels.

In diesem Fall führt die Transgressionsformel zu den höheren analytischen Torsionsformen, die die Ray-Singer-Torsion verallgemeinern. Diese kann zum Beispiel Linsenräume unterscheiden, die homotopie-äquivalent, aber nicht homöomorph sind.

1.4 Anwendung sekundärer Klassen in der Arithmetik

Für einen Zahlkörper F mit Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_F$ sind die höheren algebraischen K-Gruppen $K_i(\mathcal{O}_F)$ fundamentale Invarianten. Zum Beispiel ist $K_0(\mathcal{O}_F)$ isomorph zur direkten Summe von $\mathbb{Z}$ und der Idealklassengruppe und $K_1(\mathcal{O}_F)$ ist isomorph zur Gruppe der Einheiten $\mathcal{O}_F^\times$. Die Einheiten studiert man mittels des *Dirichlet-Regulators*

$$\mathrm{reg} : \mathcal{O}_F^\times \to \mathbb{R}^{r_1 + r_2},$$

wobei r_1 bzw. r_2 die Zahl der reellen, bzw. komplex-konjugierten Einbettungen von F ist. Es ist ein fundamentales Resultat von Dirichlet, dass das Bild von reg ein Gitter in einem 1-kodimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ ist.

Mittels der sekundären charakteristischen Klassen kann man den Dirichlet-Regulator weitreichend verallgemeinern. Man erhält damit den *Borel-Regulator*

$$K_{2k-1}(\mathscr{O}_F) \to \begin{cases} \mathbb{R}^{r_1+r_2} & k \text{ ungerade} \\ \mathbb{R}^{r_2} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

auf der höheren algebraischen K-Theorie von $\mathscr{O}_F$. Borel hat gezeigt, dass für $k \geq 1$ das Bild von $K_{2k-1}(\mathscr{O}_F)$ unter dem Borel-Regulator ein Gitter ist, dessen Volumen sich durch spezielle Werte der Dedekind-Zeta-Funktion $\zeta_F(s)$ ausdrücken lässt.

Beilinson hat später, aufbauend auf Arbeiten von Bloch, eine Verallgemeinerung des Borel-Regulators für beliebige Varietäten über Zahlkörpern definiert und vermutet, dass sich dieser Regulator immer durch die Zeta-Funktion der Varietät ausdrücken lässt.

1.5 Ausblick

Im SFB werden sekundäre Klassen gemeinsam aus der global-analytischen und arithmetischen Perspektive studiert. Leitende Fragestellungen sind hier die Suche nach einem ganz allgemeinen Familien-Index-Theorem (Transfer-Index-Theorem), das sich sowohl auf arithmetische Schemata wie auch auf differenzierbare Mannigfaltigen anwenden lässt, sowie die Aufklärung des mysteriösen Zusammenhangs zwischen der höheren analytischen Torsion und speziellen Werten von Zetafunktionen.

2 Chowgruppen und Zykelabbildungen

In der algebraischen Geometrie spielen höhere Invarianten auf Gruppen von algebraischen Zykeln und sogenannte motivische Kohomologiegruppen eine große Rolle. Diese Gruppen bilden wichtige Invarianten, aber es gibt viele ungelöste Fragen über ihre Struktur. Höhere Invarainten sind eine Methode, einige dieser Fragen zu lösen.

2.1 Die Abel-Jacobi-Abbbildung für komplexe Kurven

Eine projektive komplexe Kurve C kann man als eine kompakte Riemannsche Fläche beschreiben, also eine geschlossene glatte Fläche mit g „Henkeln", wobei g das Geschlecht der Fläche ist.

Die Homologiegruppe $H_1(C, \mathbb{Z})$ der geschlossenen 1-Zykel ist isomorph zu $\mathbb{Z}^{2g}$, hat also $2g$ erzeugende $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$. Andererseits gibt es g linear unabhängige globale holomorphe Differentialformen $\omega_1, \dots, \omega_g$.

Hieraus erhält man $2g$ komplexwertige Vektoren

$$\Omega_j = \Big(\int_{\gamma_j} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_j} \omega_g \Big) \in \mathbb{C}^g$$

durch Integrieren der Formen ω_i über die geschlossenen Wege γ_j. Die Ω_j erzeugen ein vollständiges $\mathbb{Z}$-Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\Omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\Omega_{2g} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ in $\mathbb{C}^g \cong \mathbb{R}^{2g}$. Die sogenannte Jacobische Varietät

$$J(C) = \mathbb{C}^g / \Lambda$$

ist ein komplexer kompakter Torus, und man erhält mit einem festen Aufpunkt p_0 die Abel-Jacobi-Abbildung

$$\begin{array}{rccl} u: & C & \to & J(C) = \mathbb{C}^g/\Lambda \\ & p & \mapsto & \Big(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \dots, \int_{p_0}^{p} \omega_g \Big) \mod \Lambda\,. \end{array}$$

Diese ist injektiv und liefert viel Information über C.

Insbesondere zeigte Abel: Bildet man Gruppen $Z_0(C)$ der algebraischen Nullzykel auf C, also die Menge aller formalen Linearkombination $z = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $p_i \in C$, so ist die induzierte Zykel-Abbildung

$$\begin{array}{rccc} cl_0: & Z_0(C) & \to & J(C)\,. \\ & \sum_{i=1}^{r} a_i p_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{r} a_i\, u(p_i) \end{array}$$

surjektiv, und für einen Nullzykel z wie oben gilt genau dann $c_0(z) = 0$, wenn es eine meromorphe Funktion f auf C gibt mit Divisor $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i$, d. h. p_i ist eine Nullstelle der Ordnung a_i für $a_i \geq 0$ und eine Polstelle der Ordnung $-a_i$ für $a_i < 0$. Man sagt hierzu auch, dass der Nullzykel linear äquivalent zu null ist ($z \sim 0$).

Insgesamt erhält man so den Abel-Jacobi-Isomorphismus

$$CH_0(X) = Z_0(X)/\sim \xrightarrow{\cong} J(C) \qquad (2)$$

mit der sogenannten Chowgruppe der Nullzykel $CH_0(X)$.

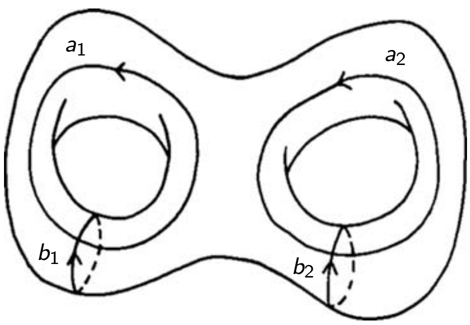

Abbildung 2. *Riemannsche Fläche vom Geschlecht 2 mit 4 erzeugenden 1-Zykeln (NIST Digital Library of Mathematical Functions. http://dlmf.nist.gov, Release 1.0.10, 2015-08-07. Mit freundlicher Genehmigung.)*

2.2 *Die Abel-Jacobi-Abbildung für höher-dimensionale Varietäten*

Für eine d-dimensionale projektive komplexe Mannigfaltigkeit X, die durch algebraische Gleichungen in den Variablen des komplexen projektiven Raums gegeben ist, kann man wieder die Chowgruppe der Nullzykel $CH_0(X)$ betrachten, wobei ein Zykel rational äquivalent zu null ist, wenn er Summe von Divisoren von meromorphen Funktionen auf irgendwelchen Kurven C_i auf X ist. Durch ähnliche Konstruktionen erhält man nun eine kanonische surjektive Abel-Jacobi-Abbildung

$$CH_0(X)^0 \longrightarrow H^{2d-1}(X,\mathbb{C})/(H^{2d-1}(X,\mathbb{Z}) + Fil^d)$$

von der Chowgruppe der Nullzykel vom Grad null in die sogenannte Griffiths-Jacobische $\mathrm{Griff}^d(X)$, die mithilfe der Hodge-Filtrierung Fil^i gebildet wird. Für $d = 1$ identifiziert sich dies mit dem obigen Abel-Jacobi-Isomorphismus.

Allerdings zeigten Untersuchungen von Mumford Ende der 60er Jahre, dass der Kern dieser Abbildung im Allgemeinen riesig ist, und Untersuchungen von Bloch und Beilinson führten zu der Vermutung, dass $CH_0(X)^0$ nicht nur durch die obige Kohomologiegruppe beschrieben werden kann, sondern dass es eine kanonische Filtrierung $F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset \ldots F^{2d}$ auf der Chowgruppe gibt, deren sukzessive Quotienten F^r/F^{r+1} von den Kohomologiegruppen $H^{2d-r}(X,\mathbb{C})$ für $r \leq 2d$ abhängen (mit $F^0/F^1 = H^{2d}(X,\mathbb{Z})$ und $F^1/F^2 = \mathrm{Griff}^d(X)$). Allgemeiner soll dies für Chowgruppen $CH^j(X)$ von algebraischen Zykeln der Kodimension j modulo rationaler Äquivalenz gelten, wo d durch j ersetzt wird.

Eine solche Filtrierung wurde bisher noch nicht gefunden, aber es gibt mehrere Ergebnisse, die diese Vermutung in Teilaspekten bestätigen.

Als konkrete Approximation werden Zykelabbildungen in verschiedene Kohomologietheorien betrachtet, die in natürlicher Weise eine solche Filtrierung besitzen. Ein Beispiel ist für Varietäten X über einem beliebigen Körper k die stetige ℓ-adische Kohomologie $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$ über dem Grundkörper k, wobei ℓ eine in k invertierbare Primzahl ist, und die Zykelabbildung

$$CH^j(X) \longrightarrow H^{2j}(X,\mathbb{Q}_\ell(2j)\,.$$

Die sogenannte Hochschild-Serre-Spektralsequenz liefert eine absteigende Filtrierung F^r auf $H^{2j}(X,\mathbb{Q}_\ell(2j)$ und Isomorphismen

$$F^r/F^{r+1} \cong H^r\left(G_k, H^{2j-r}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))\right),$$

wobei $\overline{X}$ der Basiswechsel von X zum algebraischer Abschluss von k ist und $G_k = Gal(\overline{k}/k)$ die absolute Galoisgruppe von k, sodass dieser Term in ersichtlicher Weise nur von der Kohomologie $H^{2j-r}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))$ abhängt, die hier das Analogon der Kohomologie $H^{2j-r}(X,\mathbb{C})$ über den komplexen Zahlen ist. Die optimistische Hoffnung ist, dass für endlich erzeugte Körper, also zum Beispiel endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_p(T)$ für eine Primzahl p, das Urbild der Filtrierung F auf der ℓ-adischen Kohomologie die gesuchte Filtrierung auf den Chowgruppen ist.

2.3 *Ausblick*

Diese Methode ist ein typisches Beispiel für höhere Invarianten. Wie über den komplexen Zahlen liefert die erste Zykelabbildung nach $H^{2j}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell)$ nur Information über einen Teil der Chowgruppe, und man braucht weitere Invarianten, die immer existieren, wenn die vorige gleich null ist, um die gesamte Chowgruppe zu studieren. Tatsächlich werden Zykelabbildungen wie oben in mehreren Projekten des SFB angewandt und studiert, wobei ganz verschiedene verallgemeinerte Kohomologiegruppen eine Rolle spielen. Beispiele sind die p-adische Kohomologie oder die K-Theorie.

3 Zusammenfassung

Höhere Invarianten im Sinne des SFB treten sowohl in der Arithmetik als auch in der globalen Analysis in den verschiedensten Gestalten auf. Weitere Beispiele finden sich in der Arakelov-Theorie, die Zykel mit Metriken versieht und dadurch höhere Invarianten definiert, oder in der Homotopie-Theorie in der Spektren zu strukturierten Ring-Spektren verfeinert werden. Diese verschiedenen Methoden, höhere Invarianten zu gewinnen, besitzen viele Gemeinsamkeiten, die im SFB herausgearbeitet werden sollen. Wir hoffen, dadurch neue höhere Invarianten zu entwickeln und neue überraschende Resultate zu erzielen.

Prof. Dr. Uwe Jannsen, Fakultät für Mathematik, Univ. Regensburg, 93040 Regensburg. uwe.jannsen@mathematik.uni-regensburg.de

Prof. Dr. Guido Kings, Fakultät für Mathematik, Univ. Regensburg, 93040 Regensburg. guido.kings@mathematik.uni-regensburg.de

Uwe Jannsen studierte Mathematik und Physik in Hamburg. Promotion 1980, Habilitation 1988. 1989–1991 Forschungsprofessur am MPI für Mathematik in Bonn, 1991–1999 Lehrstuhl an der U Köln, seitdem an der U Regensburg. Arbeitsgebiet: Arithmetische Geometrie; besondere Interessen: Theorie der Motive, Galoisgruppen, Höherdimensionale Klassenkörpertheorie, etale Kohomologie und die Auflösung von Singularitäten. Seit 2009 ist Uwe Jannsen ordentliches Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, seit 2011 der Academia Europaea.

Guido Kings hat seit 2001 einen Lehrstuhl für Mathematik in Regensburg, sein Arbeitsgebiet ist die Arithmetische Geometrie, insbesondere spezielle Werte von L-Funktionen, 2002 ICM Beitrag mit A. Huber. Er war 2005–2011 Sprecher der DFG-Forschergruppe „Algebraische Zykel und L-Funktionen“, war 2012 Mitglied der „Inaugural class of Fellows of the AMS“ und ist seit 2014 Sprecher des SFB „Höhere Invarianten“.