

# „Wir rechnen mit der Zukunft“\*

## Eine kleine Reise durch die Versicherungsmathematik

Rainer Berntzen

### I Versicherung und Mathematik

Eine Betätigung in der Wirtschaft führt für Mathematiker nicht zwangsläufig dazu, dass man mit der Mathematik selber nicht mehr viel am Hut hat. So galten zwar für Paul Erdős alle Mathematiker, die sich nicht mehr in der Forschung mit Mathematik beschäftigten, sondern anderweitig Ihren Lebensunterhalt verdienten, als verstorben (vgl. [1] für eine lesenswerte Biografie über Erdős). Aber gerade auch unter diesen „Verstorbenen“ gibt es eine lebendige Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen aus dem täglichen Leben.

Eine – vielleicht sogar die größte – homogene (ich verzichte hier lieber auf den Versuch einer exakten Definition) Gruppe bilden dabei die Versicherungsmathematiker, oder wie sie seit über 20 Jahren heißen: Aktuare. In ihrer 1993 gegründeten berufsständischen Vereinigung DAV (Deutsche Aktuar-Vereinigung – vgl. [2]) sind mittlerweile über 4500 Mitglieder organisiert, mit stark steigender Tendenz. Aufgrund der Vielzahl rechtlicher Änderungen – auch getrieben durch die Kapitalmarktkrisen der letzten Jahre oder bald eher Jahrzehnte – stiegen und steigen die Anforderungen sowohl quantitativ als auch qualitativ, und das betrifft insbesondere auch die mathematische Seite.

Es soll nun hier versucht werden, den Lesern der Mitteilungen Interessantes aus der Welt der Versicherungsmathematik nahezubringen. Dazu wollen wir eine kleine Reise durch verschiedene Aspekte aus der Praxis unternehmen, wobei die Auswahl der Stationen naturgemäß rein subjektiv ist, und keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Man bekommt ja auch im Urlaub nicht alles Sehenswerte vor Ort zu Gesicht; es sei denn vielleicht, man fährt in die Einöde. Außerdem wird die Darstellung in diesem Rahmen notwendigerweise an der Oberfläche bleiben müssen.

Auf unserem hoffentlich unterhaltsamen Trip werden wir dabei auf numerische Ausgleichsverfahren, statistische Testverfahren, Markov-Ketten, Differentialgleichungen und schließlich auf Copulas treffen. Diese und andere, nicht nur mathematische, Themen sind deshalb auch Bestandteile der Ausbildung zum Aktuar der Deutschen Aktuar-Vereinigung – frei nach dem Motto: „Nach dem Studium ist vor dem Studium“.

Aber was ist denn eigentlich nun genau ein Aktuar? Eine Umschreibung dafür findet man z. B. auf der Seite der Deutschen Aktuar-Vereinigung ([3]):

*Aktuare sind Experten, die mit mathematischen Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik finanzielle Unsicherheiten in den Bereichen Versicherung, Bausparen, Kapitalanlage und Altersversorgung bewerten. Ein Aktuar muss nicht nur unsichere zukünftige Geldflüsse über eine sehr lange Laufzeit betrachten, sondern auch immer das rechtliche, wirtschaftliche und unternehmensinterne Umfeld der Anbieter von Versicherungs- und Finanzprodukten berücksichtigen. Mit ihrer Fachkenntnis arbeiten Aktuare im Wesentlichen für Versicherungen, betriebliche und berufsständische Einrichtungen der Altersvorsorge, Banken, Investmentgesellschaften, Bausparkassen und Beratungsunternehmen, aber auch für Verbände, Behörden, Ministerien oder als selbstständige Sachverständige.*

Man kann jedoch auf YouTube auch eine etwas andere, amerikanische Art der Beschreibung „genießen“ (vgl. beispielsweise [4]). Aber nun genug der Vorrede!

### 2 Die Stationen der kleinen Reise

#### 2.1 Numerische Ausgleichsverfahren

Die erste Station führt uns zu einem klassischen Aspekt in der Versicherungsbranche: den (einjährigen) Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten, die man z. B. für die Kalkulation einer Lebens- oder Rentenversicherung benötigt. Grundlage für solche Sterbetafeln bilden dabei regelmäßig die in der Vergangenheit beobachteten Sterbenshäufigkeiten. Da diese notwendigerweise schwanken – es handelt es sich ja beim Zeitpunkt des Todes letztendlich um ein zufälliges Ereignis – werden sie meist durch numerische Verfahren geglättet. Zur Auswahl stehen dabei mechanische und analytische Verfahren (vgl. allgemein z. B. [5]).

*Mechanisches Verfahren: Whittaker–Henderson*

Beim Verfahren nach Whittaker–Henderson (vgl. z. B. [6]) erfolgt die Ausgleichung der beobachteten (rohen) einjährigen Sterblichkeiten in den ganzzahligen Altern  $\{x_0, \dots, x_0 + n\}$  (d. h. im Altersbereich  $[x_0; x_0 + n + 1]$ ) durch Minimierung der Funktion

$$(\ddot{q} - q)^T W (\ddot{q} - q) + g (K\ddot{q})^T K\ddot{q}$$

mit

- einer Diagonalmatrix  $W$ , die die Gewichtung für die einzelnen Alter darstellt. Hier kann man z. B. anhand der reinen Bestandszahlen oder der Versicherungssumme gewichten;
- den Vektoren  $q$  bzw.  $\tilde{q}$  der beobachteten bzw. ausgeglichenen Sterblichkeiten;
- der Matrix  $K$  der  $s$ -ten Differenzen, d.h. mit Einträgen  $K_{i,j} = 0$  für  $j < i$ ,  $K_{i,j} = (-1)^{(j-i)} \binom{s}{j-i}$  für  $i \leq j \leq i + s$  und  $K_{i,j} = 0$  für  $j > i + s$  mit vorgegebenem  $s$  (meist  $s = 2$  oder  $s = 3$ ),
- dem Glätteparameter  $g \in [0; 1]$ .

Die Lösung ergibt sich dann als

$$\tilde{q} = (W + gK^T K)^{-1} Wq.$$

Wie bei allen mechanischen Verfahren führt dies letztendlich zu einer Mittelung der beobachteten Häufigkeiten, bei deren Gewichtung die Entfernung zur betrachteten Stelle einfließt.

Zur Verdeutlichung der Effekte sind in Abbildung 1 die ursprünglich als „echt“ angesetzten Wahrscheinlichkeiten (grün), die tatsächlich beobachteten Häufigkeiten (blau) sowie die ausgeglichenen Werte (rot) grafisch abgetragen. Dabei wurde insgesamt eine Bestandsgröße von 100 000 Personen im Altersbereich von 60 bis 80 Jahren unterstellt. Anstelle der erwarteten 1889 Todesfälle sind dabei zufällig 1919 „tatsächlich“ aufgetreten. Bei Berücksichtigung der ausgeglichenen Werte ergäbe sich als Erwartungswert für die Anzahl der Todesfälle ebenfalls 1919 aufgrund der gewählten Gewichtung.

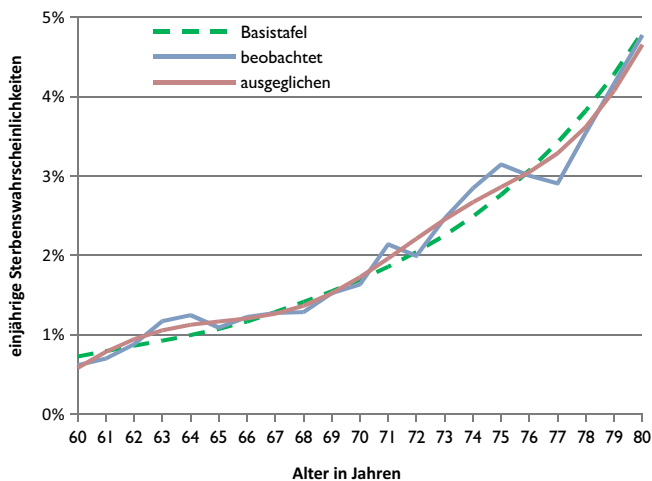


Abbildung 1. Ausgleichung nach Whittaker–Henderson: Beispiel mit Bestandsgewichtung und Glättungsparameter  $g = 0,5$  und  $s = 3$ . (grün gestrichelt: auf Basis einer Sterbetafel der DAV; blau: mit dem Excel-Zufallsgenerator erzeugt; rot: gewichtet anhand der Bestandsgrößen)

### Analytisches Verfahren: Splines

Bei analytischen Verfahren greift man auf parametrisierte Funktionen zurück, die die Werte im betrachteten Intervall annähern sollen. Bei der Verwendung von kubischen

Splines werden dabei zweimal differenzierbare Funktionen verwendet, die auf jedem Altersintervall  $[x_0 + k, x_0 + k + 1]$  ein Polynom 3. Grades darstellen (vgl. [7]). Für diese müssen dann natürlich in den Übergangspunkten die Funktionswerte sowie die ersten beiden Ableitungen übereinstimmen. Unter Verwendung von Gewichten  $w_i$  analog zum Verfahren von Whittaker-Henderson erfolgt hier eine Minimierung des Krümmungsgrades

$$\int_{x_0}^{x_0+n} (f''(x))^2 dx$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^n w_i (f(x) - q_{x_0+i})^2 \leq A$$

mit vorgegebenem  $A$ . Mithilfe der Euler-Lagrange-Differentialgleichung lässt sich das Minimum als Lösung eines linearen Gleichungssystems darstellen. Dabei ergeben sich für die  $4n$  Parameter zur Bestimmung der  $n$  kubischen Splines aus den o. g. Übergangsbedingungen bereits  $3(n - 1)$  Bedingungen sowie aus dem Lagrange-Ansatz weitere  $n + 1$  Bedingungen für die 2. Ableitungen bzw. deren Differenzen in den beiden End- bzw. den  $n - 1$  Übergangspunkten. Als „fehlende“ Bedingungen können schließlich die ersten oder zweiten Ableitungen in den Endpunkten vorgegeben werden. (Setzt man die 2. Ableitungen in den Randpunkten auf 0, so spricht man von natürlichen Splines.) Der Rest ist dann nur noch ein Logarithmus, wie heute anscheinend neuhochdeutsch alle mathematischen Verfahren heißen, die über den Dreisatz oder die Zinseszinsrechnung hinausgehen (vgl. auch [8]).

## 2.2 Statistische Testverfahren

Hat man erst einmal biometrische Rechnungsgrundlagen erstellt (oder von woanders übernommen, z. B. weil der betrachtete Bestand zu klein ist), so stellt sich regelmäßig die Frage nach der Überprüfung der Angemessenheit – ein Fall für Testverfahren. In der Praxis finden sich dabei häufig zwei grundlegende Testgruppen: Zähltests und Tests anhand von Verteilungen (für eine ausführliche Darstellung zur mathematischen Statistik sei z. B. auf [9] verwiesen). Dazu seien  $(D_1, \dots, D_n)$  die Anzahl der tatsächlichen Todesfälle ( $D$  wie „dead“) in den Altern  $(x_1, \dots, x_n)$  sowie  $(E_1, \dots, E_n)$  die rechnermäßig erwartete Anzahl ( $E$  wie „expected“).

### Zähltests

Bei den Zähltests wird das Verhalten der Vorzeichen der Differenzen zwischen Anzahl der beobachteten und Anzahl der erwarteten biometrischen Ereignisse (hier: Tod) auf Plausibilität untersucht:

- *Vorzeichentest*: Hier erfolgt die Plausibilisierung anhand der Anzahl der positiven Vorzeichen. Die Teststatistik

ist gegeben durch

$$T = \sum_{i=1}^n 1_{\{D_i > E_i\}}.$$

- *Iterationstest*: Hier erfolgt die Plausibilisierung anhand der Anzahl der Vorzeichenwechsel. Die Teststatistik ist gegeben durch

$$T = \sum_{i=2}^n 1_{\{\text{Sign}(D_i - E_i) \neq \text{Sign}(D_{i-1} - E_{i-1})\}}.$$

Als Verteilung liegt hier dann die Binomialverteilung  $B(n; \frac{1}{2})$  bzw.  $B(n-1; \frac{1}{2})$  zugrunde, wobei  $n$  die Anzahl der betrachteten Alter (bzw. Altersgruppen) darstellt. Der Vorzeichentest prüft, ob die Über- bzw. Unterschreitungen sich zahlenmäßig eher die Waage halten, während der Iterationstest überprüft, ob sich „fehlende“ Vorzeichenwechsel „clustern“ und sich deshalb größere Altersbereiche mit Über- und Unterschätzung abwechseln. Beide Testverfahren beschränken sich somit auf die Untersuchung der reinen Anzahl, sodass die Größe der Über- bzw. Unterschreitung hier vollkommen unberücksichtigt bleibt.

#### Tests anhand von Verteilungen

Als Verteilungstest sind die beiden folgenden Verfahren weit verbreitet:

- *Poisson-Test*: Hier erfolgt die Prüfung anhand der Anzahlen über den gesamten Bestand. Die Teststatistik ist gegeben durch

$$T = \sum_{i=1}^n D_i.$$

- $\chi^2$ -*Test*: Hier erfolgt die Prüfung anhand der Summe der normierten quadratischen Abweichungen zwischen Erwartung und Realität je Altersklasse. Die Teststatistik ist gegeben durch

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{(D_i - E_i)^2}{n_i q_i (1 - q_i)}$$

mit  $n_i$ , dem mittleren Bestand, sowie  $q_i$ , der erwarteten Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter  $x_i$ .

Beim  $\chi^2$ -Test wird die jeweilige Richtung der Abweichung ebenso vernachlässigt wie geringe Abweichungen, auch wenn diese hauptsächlich in eine Richtung gehen. Beim Poisson-Test erfolgt die Beurteilung anhand der insgesamt beobachteten Sterbefälle. Er vernachlässigt somit sowohl die Höhe der einzelnen Abweichungen nach oben und unten, sofern sie sich weitgehend aufheben, als auch ihre Lage.

Aufgrund der unterschiedlichen Vor- und Nachteile werden die o.g. Testverfahren auch häufiger miteinander kombiniert und um eine grafische Aufbereitung ergänzt, um so zu einer Gesamteinschätzung zu gelangen.

## 2.3 Markov-Ketten

In der betrieblichen Altersversorgung werden, anders als in der privaten Lebensversicherung, die verschiedenen Anspruchskomponenten auf Alters-, Berufsunfähigkeits- und Hinterbliebenenrente in einer „Kompakt“-Sicht zusammengefasst. Für die Übergänge zwischen den unterschiedlichen Zuständen (Anwärter, Erwerbsunfähigkeitsrentner, Altersrentner oder Witwe/Witwer) werden dabei altersabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet, die sich aus einer entsprechenden Sterbetafel (im Bereich der betrieblichen Altersversorgung die Richttafeln RT05G von K. Heubeck, vgl. [10]) ergeben; d. h. man hat im Grunde eine nicht-homogene Markov-Kette (siehe hierzu z. B. [11]).

Sind  $\sigma = 1, \dots, n$  die unterschiedlichen Zustände (mit 1 als Ausgangszustand des Versicherten und  $n$  dem abschließenden Zustand – i. d. R. Tod ohne weitere Ansprüche), so stellt sich die Markov-Kette auf dem Zustandsraum  $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\}$  dar als Folge von  $n \times n$ -Matrizen  $U_x$  mit Einträgen  $U_x(i, j) = P(Z_{x+1} = j | Z_x = i)$ . Dabei ist  $Z_x$  die Zufallsvariable, die den Zustand  $\sigma$  zum Zeitpunkt (Alter)  $x$  beschreibt. Weil diese Zufallsvariable vom Alter abhängt, ist die zugehörige Markov-Kette nicht homogen. (Eine ähnliche Vorgehensweise gibt es z. B. bei Rating, wo für die Übergänge zwischen den unterschiedlichen Rating-Klassen ebenfalls Wahrscheinlichkeiten angesetzt werden, aus denen sich eine – dann allerdings homogene – Markov-Kette ergibt.) In der betrieblichen Altersversorgung wird nun regelmäßig noch unterstellt, dass die Übergänge nur in eine Richtung verlaufen, d. h.  $U_x(i, j) = 0$  für  $j < i$ , d. h. man hat es mit einer Dreiecksmatrix zu tun. Während diese Annahme bei Übergängen aus dem Zustand Tod offensichtlich erscheint – die aus der Bibel namentlich bekannten Gegenbeispiele unterlagen ja weder zeitlich noch örtlich dem deutschen Betriebsrentengesetz (vgl. [12]) – so ist die Vernachlässigung von Reaktivierungen von Erwerbsunfähigkeitsrentnern als Vereinfachung anzusehen.

Seit dem 21. 12. 2012 (dem Tag des Weltuntergangs – die Maya waren also anscheinend doch sehr vorausschauend) darf aufgrund eines Urteils des Europäischen Gerichtshof (vgl. [13]) in der privaten Versicherungswirtschaft – und damit vermutlich mit einer entsprechenden Begründung auch in der betrieblichen Altersversorgung – bei der Kalkulation nicht mehr nach dem Geschlecht unterschieden werden. Da jedoch die Sterbetafeln geschlechtsspezifisch vorliegen, müssen diese gemischt werden, wobei ein geeignetes Mischungsverhältnis zu wählen ist. Beobachtet man nun ein anfängliches Mischungsverhältnis von 50 : 50 zwischen Männern und Frauen zu einem Alter  $u_0$  im Zustand 1, so verschiebt sich dieses jedoch durch die unterschiedlichen biometrischen Wahrscheinlichkeiten. Um diese Entwicklung, und damit die Mischung der Sterbetafeln, adäquat abzubilden, sucht man eine geschlechtsun-

abhängige Markov-Kette  $U^{(0)}$ , sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (U^{(1)}, U^{(2)}) & \xrightarrow{U_m} & U^{(0)} \\ \downarrow (\lambda, \lambda) & & \downarrow \lambda \\ (I^{(1)}, I^{(2)}) & \xrightarrow{\mathcal{L}_m} & I^{(0)}, \end{array}$$

Dabei ist  $\lambda(U^{(j)})$  die Folge der deterministischen Bestandszusammensetzung  $I_u^{(j)} \in \mathbb{R}^n$  mit  $(I_{u_0}^{(j)})_\sigma = \delta_{\sigma,1}$  (Ausgangszustand im Alter  $u_0$ ) und  $I_{x+1}^{(j)} = U_x^{(j)} \cdot I_x^{(j)}$  auf Basis der Markov-Kette  $U^{(j)} = (U_u^{(j)})_u$  sowie  $I^{(j)} = \mathcal{L}_m(I^{(1)}, I^{(2)}) = m \cdot I^{(1)} + (1 - m) \cdot I^{(2)}$ , die Mischung der geschlechtsspezifischen Bestände.

Die so erhaltene Unisex-Markov-Kette muss anschließend wieder in eine Sterbetafel umgesetzt werden. Dabei ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, dass dies i. d. R. nicht bzw. nicht exakt möglich ist, insbesondere, wie in der betrieblichen Altersversorgung üblich, bei einer Einbeziehung von Hinterbliebenen über einen kollektiven Ansatz, d. h. ohne Berücksichtigung, ob und mit welchem Geburtsdatum ein Ehepartner vorhanden ist. Doch auch hier lässt sich eine adäquate Näherungslösung finden (vgl. [14]).

Als Ergebnis zeigt sich wie erwartet, dass sich einerseits das Mischungsverhältnis aufgrund der unterschiedlichen Lebenserwartungen hin zu den Frauen verschiebt; man nennt dies auch natürliche Entmischung. Andererseits baut sich im Hinterbliebenenbestand der Männeranteil zunächst erst auf, nimmt später dann langsam wieder ab, jedoch insgesamt auf einem deutlich niedrigeren Niveau als im Versichertenbestand selber (vgl. Abbildung 2). Da jedoch die angesetzten Sterbenswahrscheinlichkeiten in den einzelnen Altern auch noch im Zeitablauf abnehmen, sind die Entwicklungen der Mischungsverhältnisse zusätzlich auch noch vom Geburtsjahrgang abhängig – ganz zu schweigen vom anfänglichen Mischungsverhältnis.

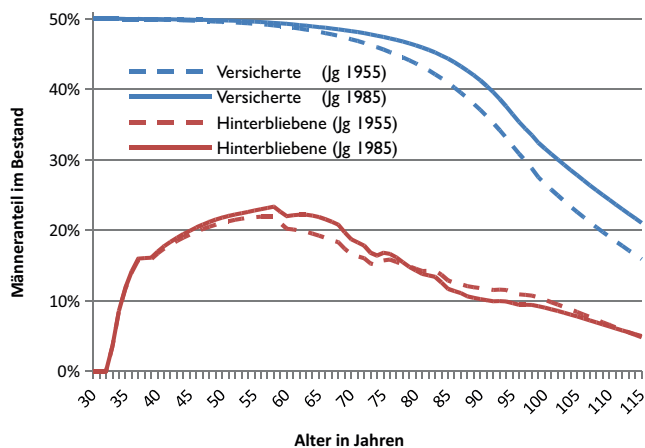


Abbildung 2. Entwicklung der Mischungsverhältnisse: Anfängliches Mischungsverhältnis 50:50 im Startalter 30, Jahrgang 1955 (gestrichelt) bzw. 1985 (Basis: Richttafeln RT 05 G)

## 2.4 Differentialgleichungen

Nachdem wir uns bisher eher mit der Mathematik eines Versicherungsunternehmens auf der Passivseite der Bilanz beschäftigt haben – den versicherungstechnischen Verpflichtungen und insbesondere ihren biometrischen Rechnungsgrundlagen – ist es an der Zeit, einen Abstecher auf die Aktivseite, d. h. zu den Kapitalanlagen, zu unternehmen. In Zeiten von Niedrig- und Niedrigst-Zinsen rückt dabei zwangsläufig u. a. die Modellierung möglicher künftiger Zinsentwicklungen mittels Differentialgleichungen in den Vordergrund. Im Zusammenhang mit Kapitalmarktszenarien und ihren Auswirkungen befasst man sich dabei im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen u. a. mit sogenannten Ein-Faktor- und Heath-Jarrow-Morton-Modellen. (Für eine detailliertere Übersicht über Zinsmodelle sei z. B. auf [15] verwiesen.)

### Ein-Faktor-Modelle

Das Grundprinzip der Ein-Faktor-Modelle ist der Versuch, die Short rate  $r(t)$ , d. h. den „zeitstetigen“ Zins im Zeitpunkt  $t$ , mittels einer einzelnen Brownschen Bewegung  $W(t)$  in der Form  $dr(t) = a(t, r(t)) dt + b(t, r(t)) dW(t)$  zu modellieren. Als Spezialfälle finden dabei u. a. die folgenden Modelle Anwendung:

- **Vasicek:**  
 $dr(t) = a [b - r(t)] dt + \sigma dW_t$   
mit „mean reversion“ zum Langfristniveau  $b$  ;
- **Cox-Ingersoll-Ross:**  
 $dr(t) = a [b - r(t)] dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW_t$   
mit der Folge positiver  $\chi^2$ -verteilter Zinsen;
- **Black-Kasinski:**  
 $dr(t) = r(t) [b(t) - a \ln(r(t))] dt + \sigma r(t) dW_t$   
als positive, lognormal-verteilte Zinsen;
- **Hull-White:**  
 $dr(t) = a [b(t) - r(t)] dt + \sigma(t) dW_t.$

Von diesen Modellen kann jedoch allein das Hull-White-Modell die aktuelle Zinsstruktur, d. h. die Zinshöhen in Abhängigkeit der Laufzeiten, abbilden.

### Heath-Jarrow-Morton-Modelle

Das Heath-Jarrow-Morton-Modell modelliert die zeitliche Entwicklung der Forward-Zinskurve  $f(t; T)$  anhand der aktuellen Zinsstrukturkurve mit Hilfe von  $d$  Brownschen Bewegungen  $W(1), \dots, W(d)$  durch

$$df(t; T) = \mu_f(t, T) dt + \sum_{i=1}^d \sigma_f^{(i)}(t, T) dW(i).$$

Dadurch kann man ein stetiges und zinsstrukturkonformes Modell erhalten, dessen Dynamik durch die anfängliche Zinsstruktur und die Volatilitätsstrukturen (Schwankungen) festgelegt sind.

### Auswahlkriterien

Die für die Auswahl des Zinsmodells entscheidenden Kriterien sind u. a.

- das Vorhandensein negativer Zinsen (früher eher ein K.O.-Kriterium, angesichts der Realitäten heute schon fast ein Pluspunkt ),
- die Annahme des Vorhandenseins einer Langfristrendite (*ultimate forward rate* – eigentlich etwas für jemanden mit einer Glaskugel) in Verbindung mit einer *mean Reversion*,
- die Anpassungsmöglichkeit (Kalibrierung) an die vorhandene Zinsstrukturkurve,
- die Berechenbarkeit des Modells.

Eine generelle Anmerkung: Modelle im Allgemeinen sollen die Realität möglichst adäquat abbilden. Einerseits muss es aufgrund der Komplexität der Wirklichkeit dabei zwangsläufig zu Vereinfachungen kommen, andererseits beinhalten die Modelle, bzw. ihre Input-Größen, immer auch Aussagen und Annahmen über die Zukunft, die kritisch zu hinterfragen sind. Um mit George Box zu reden: „All models are wrong, but some are useful“, bzw. mit einem Zitat, dass manchmal Niels Bohr zugesprochen wird: „Prediction is very difficult, especially if it's about the future“.

### 2.5 Copulas

Das abschließende Thema dreht sich um Abhängigkeiten, die beim Zusammenspiel der verschiedenen zufälligen wertverändernden Ereignisse eines Versicherers eine Rolle spielt. Die im Zuge von Solvency II ab 2016 vorgeschriebene Mindestkapitalausstattung der Versicherer (analog zu Basel II für Banken) orientiert sich, zumindest in ihrer Zielvorstellung, an einer einjährigen 99,5 %-igen Solvenzsicherheit. Im sogenannten Standardmodell werden dabei für die unterschiedlichen Risiken eines Versicherers (biometrische Risiken, Stornorisiko, Kredit(ausfall)risiko, Marktrisiko, ...) jeweils einzeln die benötigten Solvenzmittel errechnet und über einen Kovarianzansatz zu einem Gesamtkapitalbedarf aggregiert. Dadurch wird im Grunde implizit unterstellt, dass es sich um elliptische multivariate Verteilungen handelt, bei denen darüber hinaus die Korrelationen zwischen den Einzelrisiken pauschal vorgegeben sind – kaum geeignet für eine Modellierung der Wirklichkeit, insbesondere da Korrelationen lediglich lineare Abhängigkeiten abbilden.

Für eine vollständige Beschreibung der Abhängigkeit von zwei oder mehr Zufallsvariablen benötigt man das Konzept der Copulas. Eine Copula  $C$  ist dabei, vereinfacht gesagt, die Verteilungsfunktion eines  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors mit uniformen Randverteilungen.

Der Satz von Sklar sagt aus, dass es für jede multivariate Verteilung mit Verteilungsfunktion  $F(x)$  mit Randverteilungen  $(F_1, \dots, F_n)$  eine Copula  $C$  gibt, sodass

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

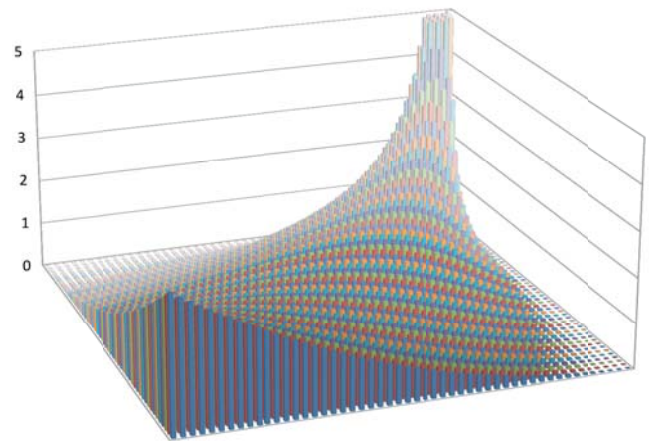


Abbildung 3. Dichte der negativen Binomial-Copula für  $\beta = 2$

d. h. die gemeinsame Verteilungsfunktion lässt sich aufspalten in die Copula, als Modellierung der Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zufallsvariablen, und die univariaten Randverteilungen, als Modellierung der Einzelrisiken.

Für stetige Randverteilungen ist die Copula zudem noch eindeutig bestimmt durch

$$C(x_1, \dots, x_n) = F(F_1^{-1}(x_1), \dots, F_n^{-1}(x_n))$$

mit  $F_i^{-1}$  der Pseudo-Inversen (oder Quantilfunktion) von  $F_i$ .

In Abbildung 3 ist beispielhaft die negative Binomial-Copula für den Parameter  $\beta = 2$  dargestellt.

Während nun das Problem der Bestimmung der Randverteilungen (Wahl der Verteilungsfunktion und Parameterschätzung) noch vergleichsweise überschaubar erscheint, stellt sich die Wahl der richtigen Copula als schwieriger heraus. Als Schätzverfahren auf Basis einer Stichprobe  $(x_1, \dots, x_k)$  werden zwei grundsätzliche Ansätze verfolgt (vgl. z. B. [16]):

- Transformationsverfahren (bei stetiger Verteilung)
  - Schritt 1: Schätze die stetigen Randverteilungen  $F_j; j = 1, \dots, d$  (ggf. inkl. ihrer Parameter).
  - Schritt 2: Transformiere die Stichprobe via  $v_{ij} = F_i(x_j)$  in eine Stichprobe  $(v_1, \dots, v_k)$  für die Copula.
  - Schritt 3: Schätze die Copula auf Basis der transformierten Stichprobe  $(v_1, \dots, v_k)$ .
- Empirische Copula
  - Schritt 1: Transformiere die Stichprobe  $(x_j) = (x_{ij})_{i=1, \dots, d}$  einzeln in die relativen Ränge  $(r_i)$  mit  $r_{ij} \in \{\frac{l}{n+1} : l = 1, \dots, n\}$  paarweise verschieden für jedes  $j$ .
  - Schritt 2: Schätze die Copula auf Basis der so erhaltenen empirischen Rangfolgen  $(r_1, \dots, r_k)$ .

Während die Schätzung der Copula beim Transformationsverfahren von der Güte der Schätzung der Randverteilungen (mit der Gefahr von Modellfehlern) abhängt, liegt bei der empirischen Copula mit den Rangfolgen nur



eine Pseudostichprobe vor, die keine Punkthäufungen aufweist. Für sehr große Stichproben führen beide Verfahren jedoch zu vergleichbaren Ergebnissen. In der Praxis (z. B. unter Solvency II) ist jedoch der „Tail“-Bereich von besonderer Bedeutung, d. h. in dem Bereich seltener und „kritischer“ Ereignisse. Hier zeigt sich in den vergangenen Krisensituationen, dass die Abhängigkeiten in schlechten Zeiten stärker ausgeprägt erscheinen, sodass sich die negativen Auswirkungen hier eher gegenseitig verstärken und so die Krise verschlimmern. Mit empirischen Methoden gelangt man in diesem Bereich aufgrund der i. d. R. stark begrenzten Stichprobe aber schnell an die Grenze der Modellierung, sodass meist die Art der Copula vorgegeben und lediglich eine Parameterschätzung durchgeführt wird.

Für einen Überblick zu Copulas sei hier neben [17] z. B. auf [18] mit einer Darstellung im Kontext von Risikomanagement in Versicherungsunternehmen verwiesen.

### 3 Aktuare von heute und für morgen

In der Versicherungsbranche gibt es vielfältige Aufgaben und Positionen, z. B. in den Bereichen Tarifierung, Controlling, Risikomanagement, Consulting, IT. Dies setzt nicht nur Kenntnisse in Mathematik (u. a. Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, Numerik, Differentialgleichungen) voraus, sondern auch Wissen aus den Bereichen Betriebswirtschaft (u. a. Finanzmathematik, Investmentmanagement, Rechnungslegung), Recht (u. a. Versicherungsrecht, Arbeits- und Steuerrecht) und Informatik (u. a. Programmierung, Datenbanken, Statistik-Programme).

Aus diesem Grund ist die Ausbildung der Deutschen Aktuarvereinigung (als Voraussetzung zur Mitgliedschaft in der DAV) breit gefächert, um den gestiegenen und auch weiter wachsenden Herausforderungen an die Aktuare Rechnung zu tragen [19]. Teile der Ausbildung können dabei bereits an Universitäten absolviert werden, sofern die Inhalte und Anforderungen den entsprechenden Prüfungen entsprechen. Um auch bereits Schüler an versicherungsmathematische Themen heranzuführen, bietet die Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e. V. (DGVFM) mittlerweile auch Materialien für den Schulunterricht an ([20]). Denn eines ist sicher: Der Gesetzgeber und die Rechtsprechung sorgen dafür (und werden wohl weiter dafür sorgen), dass Aktuare zu den am meisten gesuchten Berufsgruppen gehören, oder wie es in der Oktober-Ausgabe der Zeitschrift *The European Actuary* auf dem Titelblatt heißt: „There is a rising demand for actuaries.“

#### Anmerkung

\* Slogan der Deutschen Aktuarvereinigung

### Literatur

- [1] P. Hoffman (1998), *The Man Who Loves Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*, Hyperion Books
- [2] Vgl. die Homepage der Deutschen Aktuar-Vereinigung unter aktuar.de
- [3] Vgl. aktuar.de/aktuar-werden/was-ist-ein-aktuar
- [4] [www.youtube.com/watch?v=dsAOuUgWVVO](http://www.youtube.com/watch?v=dsAOuUgWVVO)
- [5] K. Wolfsdorf, *Versicherungsmathematik/Teil 1. Personenversicherung 1997*, 2., überarb. und erw. Aufl., Teubner, Stuttgart
- [6] T. N. E. Greville, 1981. Moving-Weighted-Average Smoothing Extended to the Extremities of the Data I & II, *Scand. Actuarial Journal* 1981, S. 39–55 und S. 65–81
- [7] C. H. Reinsch, *Smoothing by Spline Functions I & II*, *Numerische Mathematik* 1967, S. 177–183 bzw. 1970/71, S. 451–454
- [8] Vgl. G. M. Ziegler, Um die Ecke – Mathematik im Alltag; hier: *Mathe für die Ehe II*, *Mitteilungen der DMV* 23 (2015), S. 99
- [9] L. Rüschemann, *Mathematische Statistik*, Springer-Lehrbuch Masterclass, 2014
- [10] K. Heubeck, *Textband zu den Richttafeln RT05G*, Köln
- [11] siehe Cologne Open Science unter [opus.bsz-bw.de/fhk](http://opus.bsz-bw.de/fhk)
- [12] Vgl. z. B. Johannes 11, *Matthäus* 28
- [13] Urteil des EuGH vom 1. 3. 2011, Aktenzeichen C-236/09
- [14] R. Berntzen, *Unisex-Tafeln in der betrieblichen Altersversorgung*, *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, Springer Verlag, 2013, DOI: 10.1007/s12297-013-0234-6, <http://tinyurl.com/o4rloqr>
- [15] A. Cairns, *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University Press, 2004
- [16] D. Pfeifer, *Neue Entwicklungen bei der Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Risiken*, Vortrag auf dem 2. Weiterbildungstag der DGVFM, <http://tinyurl.com/ovz6cty>
- [17] C. Cottin, S. Döhler, *Risikoanalyse*, 2. Auflage, Springer-Spektrum;
- [18] M. Kriele, J. Wolf, *Wertorientiertes Risikomanagement in Versicherungsunternehmen*, Springer Verlag, 2012
- [19] Vgl. aktuar.de/aktuar-werden/ausbildung-dav
- [20] Vgl. aktuar.de/aktuar-werden/fuer-die-schule

Dr. Rainer Berntzen, Büro H. Karras, Postfach 1753, 59006 Hamm  
[rainer.berntzen@buero-karras.de](mailto:rainer.berntzen@buero-karras.de)



Rainer Berntzen ist als Aktuar, IVS-Sachverständiger und Certified Enterprise Risk Actuary (CERA) im versicherungs- und wirtschaftsmathematischen Gutachterbüro Karras in Hamm (Westf.) beschäftigt. Tätigkeitsschwerpunkte bilden die versicherungsmathematische Betreuung regulierter Pensionskassen und berufsständischer Versorgungswerke, Erstellung von ALM-Studien und unternehmenseigenen Rechnungsgrundlagen sowie Software-Entwicklung. Berntzen studierte Mathematik an der WWU Münster und promovierte dort im Bereich Funktionalanalysis bei Prof. Dr. G. Maltese. Er ist u. a. Mitglied der DMV, der LMS, der DAV, des IVS, der DGVFM sowie des DVfVW.