Zaubern mit Normalteilern

Ehrhard Behrends

Im Buch *Magia por principios* meines spanischen Kollegen Pedro Alegría wird ohne Erklärung des Hintergrunds ein Zaubertrick vorgestellt [1, Seite 29], der gleich beschrieben werden soll. Er wird dort Juan Tamariz zugeschrieben („Oído a Juan Tamariz en una emisión radiofónica".) Ich habe ihn – mit einer Begründung, warum er funktioniert – in mein Buch zum Thema „Mathematik und Zaubern" [2] in Abschnitt 2.9 übernommen. Er geht so:

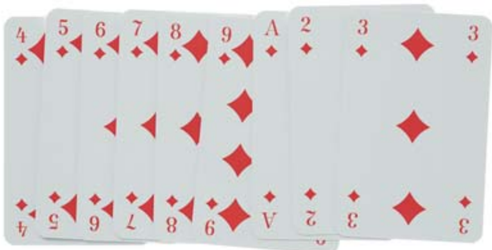
– Der Zauberer präsentiert neun Karten mit der Bildseite nach oben. Sie sollen sich in einer wiedererkennbaren Reihenfolge befinden. Man könnte zum Beispiel die Karokarten von Ass bis 9 nehmen:

Neun Karten, dem Kartenwert nach geordnet

  Die Karten werden zu einem Stapel zusammengeschoben und umgedreht.

– Danach werden die Karten durcheinandergebracht. Dreimal passiert folgendes: Der Zauberer teilt die Karten zu zwei Stapeln aus (links, rechts usw.); die Stapel werden übereinandergelegt, dabei entscheidet der Zuschauer, welcher Stapel nach oben kommt; der Zuschauer hebt noch einmal ab.

– Trotz der vielen Zufallsentscheidungen (dreimal: Welcher Stapel kommt nach oben? Wo wird abgehoben?) sind die Karten in der gleichen zyklischen Reihenfolge wie vorher. Diese könnte – von unten gesehen – etwa so aussehen:



Das Ergebnis

Alegría empfiehlt, sich bei der letzten Aufnahme des Stapels heimlich die unterste Karte anzusehen und entsprechend viele Karten mit einem Zauberspruch einzeln nach oben zu legen. In unserem Beispiel müssten drei Karten wandern. Wenn man dann den Stapel umdreht, ist die ursprüngliche Ordnung wiederhergestellt: „Orden en el universo!".

In dem vorliegenden Artikel soll der elementare algebraische Hintergrund beschrieben werden. Das wird Anlass zu vielen Variationen des Tricks geben.

Eine Erinnerung und eine Beobachtung

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe. Der *Normalisator* $N(U)$ *von* U ist die Menge aller $x \in G$, für die $\{x \circ u \mid u \in U\} = \{v \circ x \mid v \in U\}$ gilt. $N(U)$ ist die größte Untergruppe von G, die U umfasst und in der U ein Normalteiler ist.

Für $x \in N(U)$ und $u \in U$ gibt es also ein $v \in U$ sodass $v \circ x = x \circ u$. Es folgt, dass in Produkten aus Elementen aus U und $N(U)$ die Faktoren aus U quasi „durchgereicht" werden können. Genauer heißt das: Sind $x_1, \ldots, x_m$ in $N(U)$ und $u_0, \ldots, u_m$ in U, so ist

$$u_m \circ x_m \circ u_{m-1} \circ x_{m-1} \circ \cdots \circ u_1 \circ x_1 \circ u_0 = x_m \circ \cdots \circ x_1 \circ u$$

für ein geeignetes $u \in U$. Insbesondere liegt mit $x_m \circ \cdots \circ x_1$ auch $u_m \circ x_m \circ u_{m-1} \circ x_{m-1} \circ \cdots \circ u_1 \circ x_1 \circ u_0$ in U.

Eine besondere Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n

Wir fixieren ein $n \in \mathbb{N}$, später sollen Tricks mit n Karten durchgeführt werden. Es wird für die folgenden Untersuchungen bequem sein, die Elemente der symmetrischen Gruppe S_n als bijektive Abbildungen $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ aufzufassen. Dabei ist $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ die Menge der Reste modulo n, die mit den Kompositionen „$+$" und „$\cdot$" modulo n zu einem kommutativen Ring wird. Mit $s_r : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ werden wir, für $r \in \mathbb{Z}_n$, den „zyklischen Shift" $k \mapsto k + r \bmod n$ bezeichnen. Unter S wollen wir die kommutative Untergruppe der S_n verstehen, die aus allen s_r besteht.

Lemma

(i) *Sind $a, b \in \mathbb{Z}_n$, sodass a und n relativ prim sind, so liegt die durch $k \mapsto ak + b \bmod n$ definierte Abbildung $\phi_{a,b}$ in $N(S)$.*

(ii) *Alle Elemente von $N(S)$ haben diese Form.*

(iii) *$N(S)/S$ ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$; diese Gruppe besteht aus allen a, die zu n teilerfremd sind.*

Beweis. (i) Da a und n teilerfremd sind, ist a in $\mathbb{Z}_n$ invertierbar, und folglich ist $\phi_{a,b}$ bijektiv. Man beachte noch die Relation $\phi_{a,b} \circ s_r = s_{ar} \circ \phi_{a,b}$.

 DOI 10.1515/dmvm-2015-0087

(ii) Sei $\phi \in N(S)$. Insbesondere gibt es ein a, sodass $\phi \circ s_1 = s_a \circ \phi$. Das bedeutet, dass $\phi(k+1) = \phi(k)+a$ für alle k gilt. Mit $b := \phi(0)$ folgt dann durch Induktion die Gleichung $\phi(k) = ak + b$ für alle k. Man beachte noch, dass a wegen der Injektivität von ϕ invertierbar sein muss. Damit ist $\phi = \phi_{a,b}$ gezeigt.

(iii) Die Abbildung, die $a \in \mathbb{Z}_n^*$ die zu $\phi_{a,0}$ gehörige Klasse in $N(S)/S$ zuordnet, ist ein Isomorphismus.

□

Der Zusammenhang zur Kartenzauberei

Nun sei ein aus n Karten bestehendes Kartenspiel gegeben. Sie sollen bildunten auf einem Stapel liegen, wir denken sie uns mit $0, 1, \ldots, n-1$ von oben nach unten durchnummeriert. Jeder Mischvorgang entspricht dann einem Element ϕ aus der S_n. Für unsere Zwecke sind drei Arten, den Stapel durcheinanderzubringen, von Interesse:

– *Abheben:* Was bedeutet es, l Karten abzuheben (wobei $0 \leq l \leq n-1$)? Man nimmt die obersten l Karten des Stapels ab, legt sie daneben und platziert die restlichen Karten oben drauf: Das wird durch die Abbildung s_{n-l} modelliert.
– *Die Operationen R_c:* Sei $c \in \mathbb{N}$. Wir nehmen den Stapel (immer bildunten) in die Hand und geben zunächst einzeln c Karten aus: von links nach rechts jeweils eine Karte. Dann wieder von links nach rechts je eine auf die schon liegenden, und das geht immer so weiter, bis alle Karten ausgegeben sind. (Wenn c kein Teiler von n ist, wird das nicht aufgehen, einige der neu entstandenen linken Stapel haben eine Karte mehr.)
Danach werden die Karten wieder aufgenommen, und zwar *von rechts nach links* (das ist wichtig!): zunächst der rechte Stapel, obendrauf der nächste usw. Nach ganz oben kommt also der am weitesten links liegende Stapel.
– *Die Operationen L_c:* Die Karten werden wie eben ausgegeben: jeweils einzeln c Karten, links beginnend, darauf die nächsten usw. Diesmal werden die neuen Stapel aber *von links nach rechts* aufgenommen.

Grundlage für die weiteren Untersuchungen ist dann der

Satz:

(i) *Sei c ein Teiler von $n-1$, und $a := (n-1)/c$. Dann sind n und a teilerfremd, und R_c entspricht der Permutation $\phi_{a,a}$. Insbesondere führt im Fall $c = 1$ die Operation R_1 zu $\phi_{-1,-1}$, der Stapel wird dabei einfach invertiert. (Negative Zahlen sind im Ring $\mathbb{Z}_n$ zu interpretieren: $-d = n - d$ für alle d.).*

(ii) *Ist c ein Teiler von $n+1$, so sind n und $a := (n+1)/c$ teilerfremd, und L_c ist gleichwertig zur Permutation $\phi_{-a,-1}$. Der Spezialfall $c = 1$ führt auf $a = n+1$, dann stimmt L_1 mit $\phi_{-(n+1),-1} = \phi_{-1,-1}$ überein.*

Der sehr elementare Beweis soll hier nicht geführt werden.

Wir fassen zusammen:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_n$ die Menge der echten Teiler von $n-1$ und $\mathcal{B}_n$ die Menge der echten Teiler von $n+1$. Wir beschränken uns auf echte Teiler, um Operationen des Typs $R_1, R_{n-1}, L_1, L_{n+1}$ zu vermeiden.

Gewisse $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{A}_n$ und $a_1^*, \ldots, a_l^* \in \mathcal{B}_n$ seien ausgewählt, und a sei das Produkt $a_1 \cdots a_r \cdot (-a_1^*) \cdots (-a_l^*)$ im Ring $\mathbb{Z}_n$. Wähle c_i (bzw. c_j^*), sodass $c_i a_i = n-1$ (bzw. $c_i^* a_i^* = n+1$). Führt man dann an einem aus n Karten bestehenden Kartenstapel die Operationen $R_{c_1}, \ldots, R_{c_r}$ und $L_{c_1^*}, \ldots, L_{c_l^*}$ in beliebiger Reihenfolge durch, wobei man vorher, zwischendurch und hinterher von einem Zuschauer abheben lassen kann, so befindet sich der Kartenstapel danach in der Permutation $\phi_{a,r}$ mit einem in der Regel unbekannten r. (Das könnte man auch so ausdrücken, dass der Zauberer den aktuellen Zustand des Spiels nicht kennt, aber genau weiß, in welcher Nebenklasse module S er sich befindet.)

Besonders interessant sind dabei die Spezialfälle $a = 1$ und $a = -1$. Die Karten sind dann in der gleichen bzw. in der gespiegelten zyklischen Reihenfolge. Falls man im zweiten Fall die Spiegelung „wegmischen" möchte, kann man die Reihenfolge einfach invertieren, indem man abschließend die Karten einzeln zu einem neuen Stapel herunterzählt.

Nun kann auch der Originaltrick leicht verstanden werden. Hier wurde mit $n = 9$ und $a_1 = a_2 = a_3 = 4$ gearbeitet. Wirklich ist $4 \cdot 4 \cdot 4 = 1 \bmod 9$, und deswegen wurden drei Operationen R_2 durchgeführt. In diesem Fall gibt es noch eine weitere scheinbar zufällige Komponente: Welcher Stapel soll nach oben? Das ist völlig egal, da die eine Version (linker Stapel nach oben) aus der anderen (rechter Stapel nach oben) durch Abheben – also einem Element von S – hervorgeht.

Varianten des Originaltricks

Mithilfe der vorstehend beschriebenen Ergebnisse lassen sich nun beliebig viele Varianten des Originaltricks erzeugen. Man fixiert eine Zahl n und geht dann so vor:

– Bestimme $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}_n$. (Achtung: Beide Mengen können leer sein, nämlich dann, wenn $n-1$ und $n+1$ Primzahlen sind.)
– Suche Produkte $a_1 \cdots a_r \cdot (-a_1^*) \cdots (-a_l^*)$, die 1 oder -1 modulo n sind, wobei $a_i \in \mathcal{A}_n$ und $a_j^* \in \mathcal{B}_n$. Solche Produkte gibt es außer im Fall $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n = \emptyset$ immer, es gibt dann sogar unendlich viele Beispiele.

Jede dieser Produktdarstellungen gibt dann Anlass zu einem Zaubertrick. Hier sind einige konkrete Vorschläge:

1. $n = 9$. Es gilt $\mathcal{A}_9 = \{2, 4\}$ und $\mathcal{B}_9 = \{2, 5\}$. Wie schon erwähnt, führt das Produkt $4 \cdot 4 \cdot 4 = 1 \bmod 9$ (also dreimal R_2 mit beliebigem Abheben zwischendurch) zum Originaltrick. Wegen $(-2)(-5) = 1 \bmod 9$ hat die Kombination von L_5 und L_2 das gleiche Ergebnis. Bei dem Produkt $2 \cdot (-5) = -1 \bmod 9$ würde man nach R_4 und

L_2 den Stapel allerdings in invertierter zyklischer Reihenfolge vorfinden. Man beachte, dass die Zahl 2 zu unterschiedlichen Aktionen führt, je nachdem, ob sie als Element von $\mathcal{A}_9$ oder $\mathcal{B}_9$ aufgefasst wird.

2. $n = 11$. Es gilt $\mathcal{A}_{11} = \{2, 5\}$ und $\mathcal{B}_{11} = \{2, 3, 4, 6\}$. Geeignete Produkte sind zum Beispiel $(-3) \cdot (-4) = 1 \bmod 11$ (also L_4 und L_3 ausführen, am Ende entsteht die gleiche zyklische Reihenfolge) oder $(-4) \cdot (-2) \cdot (-4) = 1 \bmod 11$ (auch L_3, L_6, L_3 führen zu diesem Ergebnis).

3. Wenn man sich nicht viele Gedanken machen will, kann man sich irgendeine ungerade Kartenanzahl n aussuchen und $n-1$ auf nichttriviale Weise als Produkt schreiben: $n-1 = c \cdot c' = -1 \bmod n$. Dann werden $R_{c'}$ und R_c (egal, in welcher Reihenfolge, und mit beliebig vielen Abhebeaktionen dazwischen) zum zyklisch invertierten Stapel führen.
Entsprechend kann man auch $n+1$ nichttrivial als $d \cdot d'$ schreiben. Da dann $(-d) \cdot (-d') = 1 \bmod n$ gilt, reproduziert die Hintereinanderausführung von L_d und $L_{d'}$ das Original (eventuell bis auf einen Abhebevorgang).

4. Hier ist noch ein Beispiel mit $n = 13$: Man präsentiert 13 Karten eines Bridgespiels, die alle die gleiche Kartenfarbe haben, in geordneter Reihenfolge, etwa die Herzkarten 2, 3, …, Ass. Wir wählen die Darstellung $2 \cdot (-2) \cdot 3 = 1 \bmod 13$, dann wird durch R_6, L_7, R_4 die Startkonstellation (wenigstens zyklisch) reproduziert, wobei zwischendurch beliebig oft abgehoben werden darf.

Es sollte nicht verschwiegen werden, dass es eher vorteilhaft ist, sich einige Gedanken zur Präsentation zu machen. Da ist die eigene Kreativität gefordert. Als Thema bietet sich natürlich „Die wiederhergestellte Ordnung“ oder etwas Ähnliches an. Um zu demonstrieren, dass die Mischvorgänge zusammen mit den Zuschauer-Abhebeaktionen den Stapel wirklich ins Chaos führen, kann man ihn zwischendurch (auf jeden Fall vor der letzten R_a- oder L_{a^*}-Aktion) aufblättern und bildseitig dem Publikum zeigen. Er wird bei flüchtigem Hinsehen wirklich sehr durcheinandergebracht aussehen.

Für das Finale gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann durch geeignetes Abheben (etwa nach einem heimlichen Blick auf die unterste Karte) die – eventuell gespiegelte – Originalreihenfolge wiederherstellen. Auch könnte die zu Beginn oberste Karte auf der Rückseite unauffällig gekennzeichnet sein: An der Stelle muss dann noch einmal abgehoben werden.

Das kann man vermeiden, indem man die Karten von oben nach unten einzeln aufdeckt und in einen Kreis auslegt. Da die Karten ja zu sehen sind, kann man es so einrichten, dass das Ass am Ende oben liegt, alles also völlig chaosfrei aussieht. Man muss nur wissen, ob man im oder gegen den Uhrzeigersinn ausgeben soll. Das wird davon abhängen, ob das gewählte Produkt $+1$ oder -1 modulo n war. (Man sieht es aber auch beim Aufdecken an der zweiten Karte.)

Abschließend noch eine Variante, bei der es nicht um das Wiederherstellen der Ordnung geht. Ein Zuschauer bekommt n beliebige Karten eines Kartenspiels, die beliebig (bildunten) gemischt werden dürfen. Er betrachtet die oberste Karte, zeigt sie dem Publikum und legt sie wieder auf den Stapel; der Zauberer darf sie allerdings nicht sehen. Der hat sich inzwischen heimlich die unterste Karte (die „Zaubererkarte“) angesehen. Wichtig ist nur, zu wissen, dass die Zuschauerkarte die nächste hinter der Zaubererkarte in der zyklischen Ordnung ist.

Nun das Übliche: mehrfach abheben, R_a- und L_a-Aktionen. Letztere sind natürlich so gewählt, dass die zyklische Reihenfolge die gleiche oder die gespiegelte ist wie am Anfang. Mal angenommen, der Zauberer hat als unterste Karte den ♥B gesehen und es ist – nachdem der Stapel umgedreht und aufgefächert wurde – das folgende Blatt entstanden:

Das sieht man nach den Mischaktionen.

Dann muss, wenn die zyklische Reihenfolge die gleiche war wie vorher, die Zuschauerkarte die ♣9 gewesen sein, bei gespiegelter zyklischer Reihenfolge dagegen die ♥10. Es gibt viele Möglichkeiten, dieses Wissen zum Abschluss des Tricks auszuspielen.

Ich wünsche viel Spaß beim Zaubern mit dem Originaltrick oder einer Variante. Dabei könnte es hilfreich sein, einige Male vorher ohne Publikum zu üben, um den Stressanteil bei der eigentlichen Vorführung zu minimieren.

Literatur

[1] Pedro Alegría, *Magia por Principios* (Selbstverlag).
[2] Ehrhard Behrends, *Der mathematische Zauberstab*. Rowohlt Verlag, 2015, etwa 220 Seiten.

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, Mathematisches Institut, FU Berlin, Arnimallee 6, 14195 Berlin. behrends@math.fu-berlin.de

Ehrhard Behrends ist Professor für Mathematik i. R. an der Freien Universität. Seine Fachgebiete sind Funktionalanalysis und Stochastik. Von 1998 bis 2008 war er Schriftführer der DMV, in dieser Zeit hat er auch die populäre Internetseite mathematik.de aufgebaut. Zwischen 2009 und 2015 war er Vorsitzender des Komitees *raising public awareness* der Europäischen Mathematikergesellschaft EMS. In ihrem Auftrag hat er die Seite www.mathematics-in-europe.eu entwickelt. Seit Januar 2015 ist er Mitglied im Magischen Zirkel von Deutschland (MZvD).