Sinustafel wiederentdeckt – Bürgis „Kunstweg“ entschlüsselt

Dieter Launert

Jost Bürgi (1552–1632)

Es ist schon seit Langem bekannt, dass der schweizerische Mathematiker und Instrumentenmacher Jost Bürgi (1552–1632) eine neue Methode gefunden hatte, um Sinuswerte auf algebraischem Wege schnell und sicher zu berechnen. Über die Einzelheiten gab es jedoch keine Information. Jetzt hat Menso Folkerts in Breslau (Wrocław) eine Handschrift entdeckt, in der Bürgi selbst dieses Verfahren beschreibt und eine von ihm damit errechnete Sinustafel liefert. Es unterscheidet sich grundsätzlich von dem bis ins 16. Jahrhundert üblichen Vorgehen, das auf die Sehnenberechnungen des Ptolemäus in der griechischen Antike zurückgeht. Bürgis Methode benutzt nur Additionen und Halbierungen und ist daher elementar, und seine Näherungsrechnung konvergiert schnell.[1]

Bereits in der griechischen Antike war die Methode entwickelt worden, Sehnen zu berechnen, wobei die Beziehung zwischen dem Zentrumswinkel α in einem Kreis und dem Kreisbogen *arc* α, der zugehörigen Sehne *crd* α und dem Radius verwendet wurde. In der voll entwickelten Form gipfelte dieses System in der astronomischen Arbeit *Almagest* von Ptolemäus (1. Hälfte des 2. Jh. n. Chr.). Dabei hatte Ptolemäus insbesondere das Problem zu lösen, dass man auf diesem geometrischen Wege wohl die Sehne zu 3° und zu $1\frac{1}{2}^\circ$ berechnen konnte, aber nicht zu 1°, weil dazu eine Winkeldrittelung benötigt wurde. *Crd* 1° musste Ptolemäus interpolieren. Bis ins 16. Jahrhundert dominierten Ptolemäus' Methode und seine Sehnentafeln die trigonometrischen Berechnungen und die theoretische Astronometrie. Auch die Erneuerung der Astronomie durch die Wiener astronomische Schule des 15. Jahrhunderts – Johannes von Gmunden, Georg Peurbach und Johannes Regiomontanus – basierte auf Ptolemäus' Arbeit.

Einen völlig neuen, algebraischen Weg verwendet Jost Bürgi in seiner von Menso Folkerts aufgefundenen Handschrift *Fundamentum Astronomiae*. Bürgi war 1579 als Uhr- und Instrumentenmacher in den Dienst des Landgrafen Wilhelm IV. (1532–1592) von Hessen-Kassel getreten, wo er auch an den astronomischen Beobachtungen teilnahm. Von 1605 bis 1631 wurde er nach Prag an den Hof Kaiser Rudolphs II. berufen[2].

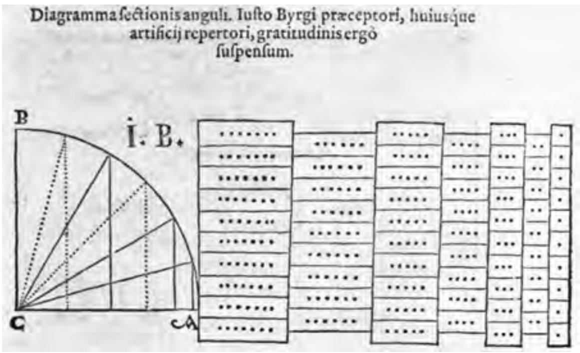
1586/87 hielt sich der spätere kaiserliche Mathematiker Nicolaus Reimers Ursus (1551–1600) bei Jost Bürgi in Kassel auf. Die beiden wurden enge Freunde. Sie hatten gleiche Interessen: Mathematik und Astronomie sowie den gleichen Bildungsweg. Beide haben kaum eine Schulbildung, haben nie eine Lateinschule oder eine Universität besucht, sondern sich ihr Wissen autodidaktisch angeeignet. Und hier in Kassel entsteht in Zusammenarbeit mit Ursus Bürgis *Fundamentum Astronomiae*. Dass Ursus daran mitarbeitete und dass er den Inhalt also genau kannte, erschließt sich aus den vielen, auch längeren lateinischen und griechischen Passagen. Dieses Werk, in schöner Handschrift, widmet Bürgi Kaiser Rudolph II.; er überreicht es ihm bei seinem Besuch in Prag im Juli 1592.

Fundamentum Astronomiae

Gründtfeste oder gründtlich Einleitung

Titelblatt des Fundamentum Astronomiae

DOI 10.1515/dmvm-2016-0036



Nicolaus Reimers Ursus, Fundamentum Astronomicum*, 1588*

Ein Jahr später, 1588 in Straßburg, veröffentlicht Nicolaus Reimers Ursus sein *Fundamentum Astronomicum*, das im Titel und im Inhalt mit Bürgis Schrift große Ähnlichkeit hat, das aber in der Anordnung und in der methodischen Aufarbeitung eigenständig ist. In diesem Büchlein im Oktavformat erregten jedoch eine Abbildung und der dazugehörige Text besonders große Aufmerksamkeit in der damaligen Fachwelt: Das Rätsel um Bürgis „Kunstweg"! Mit dieser Zeichnung stellt Ursus Bürgis völlig neues Rechenverfahren dar, den rechten Winkel in beliebig viele Teile zu teilen. Allerdings sind der Text, den Ursus dazu liefert, und die Zeichnung selbst, absichtlich so rätselhaft dargestellt, dass keiner seiner Zeitgenossen, und auch niemand bis in unser Jahrhundert, das Verfahren verstehen und das Rätsel entschlüsseln konnte. Auch Christoph Clavius (1538–1612), hochgelehrter Jesuit in Rom, war sehr an diesem Rechenverfahren interessiert, aber auch er konnte das Rätsel nicht lösen, und er erhielt trotz seiner Bitte von Ursus keine die Lösung angebende Erklärung. So blieb das Rätsel um Bürgis „Kunstweg" – er selbst nennt ihn „Artificium" – von 1588 bis 2015, also 427 Jahre lang, ungelöst, bis Menso Folkerts in Breslau die oben genannte Handschrift Bürgis auffand und mich bat, diese zu edieren.[3]

In dieser Schrift beweist Bürgi jedoch zuerst die von Paul Wittich nach Kassel gebrachte sogenannte Prosthaphaerese-Gleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot [\sin(90^\circ - \alpha - \beta) - \sin(90^\circ - \alpha + \beta)],$$

mit der er Multiplikationen durch Additionen/Subtraktionen ersetzen kann. Er benutzte diese Formel auf der Sternwarte Kassel zum vereinfachten Rechnen. Die Anwendung der Prosthaphaerese-Methode benötigt jedoch eine Sinustabelle. Und da ihm die Sinustafeln nicht korrekt genug waren, wollte er eigene errechnen.[4] So entstand die hier beschriebene Sinustafel mit Schrittweite $1'$ und später die mit Schrittweite $2''$. Außerdem zeigt Bürgi, dass man alle sphärischen Dreiecke allein mit dem Sinus lösen kann, weswegen er auch keine weiteren trigonometrischen Funktionen benötigt.

Mein Ziel für diesen Artikel ist es, aus Bürgis *Fundamentum Astronomiae* insbesondere die Methode seines „Kunstweges" und die Berechnung seiner Sinustafel darzulegen. Dabei beschränke ich mich auf die konkreten Zahlenbeispiele bei Bürgi und übertrage sie nicht in eine allgemeine Form.

Bürgi beschreibt hier also seinen sogenannten „Kunstweg", das arithmetische Näherungsverfahren zur Teilung des 90°-Winkels in beliebig viele Teile. Mit dem angegebenen Zahlenbeispiel gelang es, sein großes Rätsel zu entziffern. Man setzt von oben nach unten beliebige Zahlen in die rechte Spalte 1, zum Beispiel die Zahlen 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; also außer der Null neun Zahlen, weil man den rechten Winkel dann in neun Teile teilen will.[5] Die Folge der Startzahlen ist zwar beliebig, man kann auch mit einer „unsinnigen" Reihenfolge beginnen, aber mit einer „guten" Startzahlenfolge ergeben sich schneller genauere Werte für die neun Sinuszahlen.

Der Kern der Rätseldarstellung bei Ursus ist die „umgedrehte 5": „Die umgedrehte 5 wird ersetzt durch die Differenz zwischen dem letzten und vorletzten Teil." Ursus fügt später hinzu, dass diese umgedrehte 5 die *linke Hälfte* des *letzten* Buchstabens Ω des griechischen Alphabets darstelle.

„obversum 5" – Hälfte von Ω

Man muss also von der *zuletzt* gesetzten Startzahl (letzter Buchstabe des griechischen Alphabets) die *Hälfte* nehmen und in die Spalte links davor setzen. Damit kann nun das Rechnen beginnen.

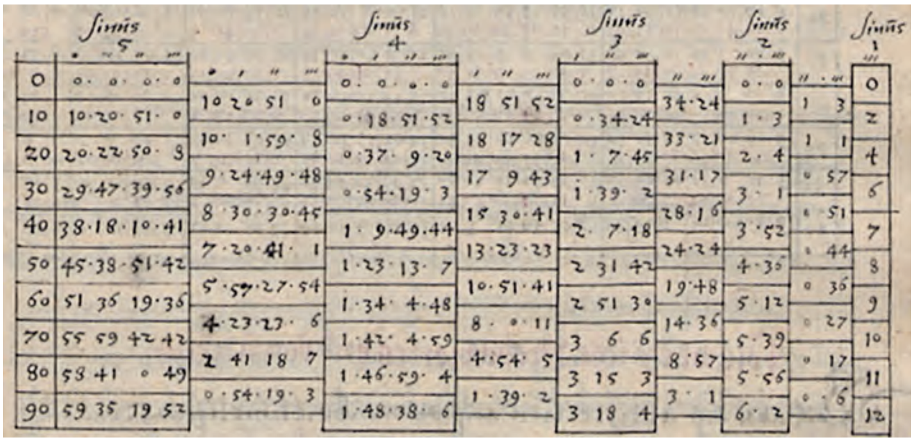
Die Entzifferung des Rätselsatzes bei Ursus liefert den Algorithmus:

- Die Spalten werden von rechts nach links gezählt! Und schrittweise werden von unten nach oben die Summen eingetragen. In die oberste Zeile der Spalte 2 kommt eine Null. Dann werden wieder, jetzt von oben nach unten, die Summen berechnet. Damit sind die ersten Näherungswerte für die Sinuswerte, bei Bürgi für 10°, 20°, . . . , 80°, 90° bestimmbar.
- Für den zweiten Näherungswert der Sinuswerte, der in Spalte 3 erscheint, wird das Verfahren wiederholt. Damit kann man nun mit den Werten der Spalte 3 die zweiten Näherungen der neun Sinuswerte berechnen. Bürgi rechnet allerdings im Hexagesimalsystem (60er-System), was die Rechnung für uns etwas unanschaulicher macht.

Die Zahlen in diesen Spalten stellen noch nicht direkt die gesuchten Sinuswerte dar, man muss die Zahlen noch „auf den Radius beziehen", der sich, jeweils unterschiedlich, in der letzten Zeile bei 90° ergibt. Die eigentlichen Sinuswerte muss man also errechnen durch Division der Zahl in einer Sinuszeile durch die Zahl in der 90°-Zeile. So erhält man zum Beispiel für $\sin\,10^\circ$ den in Spalte 5 errechneten Wert $2.235.060 : 12.871.192 = 0,173.648.25$

	Spalte 5		Spalte 4		Spalte 3		Spalte 2		Spalte 1
0	0	2,235,060	0	67,912	0	2,064	0	63	0
10	2,235,060	2,167,148	67,912	65,848	2,064	2,001	63	61	2
20	4,402,208	2,033,388	133,760	61,783	4,065	1,877	124	57	4
30	6,435,596	1,837,845	195,543	55,841	5,942	1,696	181	51	6
40	8,273,441	1,586,461	251,384	48,203	7,638	1,464	232	44	7
50	9,859,902	1,286,874	299,587	39,101	9,102	1,188	276	36	8
60	11,146,776	948,186	338,688	28,811	10,290	876	312	27	9
70	12,094,962	580,687	367,499	28,811	11,166	537	339	17	10
80	12,675,649	195,543	385,144	5,942	11,703	181	356	6	11
90	12,871,192		391,086		11,884		362		12

Bürgis Tabelle zur Winkelteilung in neun Teile, in Dezimalzahlen gerechnet.
Spalte 5 liefert sin 10° = 2.235.060 : 12.871.192 = 0, 173.648.25 statt 0,173.648.18



	Sinus 5		Sinus 4		Sinus 3		Sinus 2		Sinus 1
0	0·0·0·0	10 20 51 0	0·0·0·0	18 51 52	0·0·0	34·24	0·0	1 3	0
10	10·20·51·0	10·1·59·8	0·18·51·52	18 17 28	0·34·24	33·21	1·3	1 1	2
20	20·22·50·8	9·24·49·48	0·37·9·20	17 9 43	1·7·45	31·17	2·4	0 57	4
30	29·47·39·56	8·30·30·45	0·54·19·3	15 30·41	1·39·2	28·16	3·1	0·51	6
40	38·18·10·41	7·20·41·1	1·9·49·44	13·23·23	2·7·18	24·24	3·52	0·44	7
50	45·38·51·42	5·57·27·54	1·23·13·7	10·51·41	2 31 42	19·48	4·35	0 36	8
60	51 35 19·36	4·23·27·6	1·34·4·48	8·0·11	2 51 30	14·36	5·12	0 27	9
70	55 59 42 42	2 41 18 7	1·42·4·59	4·54·5	3 6 6	8·57	5·39	0 17	10
80	58 41 0 49	0·54·19·3	1·46·59·4	1·39·2	3 15 3	3·1	5·56	0·6	11
90	59 35 19 52		1·48·38·6		3 18 4		6·2		12

Bürgis Tabelle zur Winkelteilung in neun Teile, Original im Hexagesimalsystem gerechnet, Blatt 36r

statt $0,173.648.18$. Bürgi hat diese Werte für seine fertige Sinustabelle bis zu Spalte 8 weitergerechnet und erhält dann $\sin\ 10^\circ = 79.676.988.639 : 458.841.489.998 = 0,173.648.177.80$ statt $0,173.648.177.67$; auf neun Stellen genau.

Bürgis Rechenverfahren erkennt Andreas Thom in Dresden als wiederholte Multiplikation einer festen Matrix M mit den Spaltenvektoren, zuerst mit dem Startvektor $S1$, dann mit den errechneten Sinusvektoren $S2, S3, \ldots$ Und er beweist allgemein in moderner Form, dass dieses Verfahren immer funktioniert, unabhängig von der Wahl der Startzahlen. Bei wiederholter Anwendung der Matrix M ergibt sich eine Folge von Vektoren, die zu eben den Sinuswerten konvergiert.[6] Eine moderne Darstellung von Bürgis Algorithmus findet man bei Denis Roegel 2016.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \frac{2}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \frac{4}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & \frac{6}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & \frac{7}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \frac{8}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 124 \\ 181 \\ 232 \\ 276 \\ 312 \\ 339 \\ 356 \\ 362 \end{pmatrix}$$

Matrix M · Startvektor

Zusammengefasst: Für seine Sinustabelle berechnet Bürgi zuerst mit dem „Kunstweg" alle Sinuswerte der ganzen Grade, also von $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 89^\circ, 90^\circ$. Er teilt somit den rechten Winkel in 90 Teile und hat damit das Gerüst für die Sinustabelle. Die Werte für die einzelnen Minuten dazwischen findet er durch eine Interpolation, wobei nun das sogenannte Differenzenverfahren zum Zuge kommt, die zweite geniale Neuerung in dieser Arbeit Bürgis, nach dem eigentlichen „Kunstweg". Bürgi hatte nämlich erkannt, dass die zweiten Differenzen der Sinuswerte gut proportional zu einer festen, *dd* genannten, Differenz sind, und dies umso besser, je näher die Sinuswerte beieinander liegen, was bei einer Schrittweite von $1'$ zutrifft.

Eine Tabelle dieser Differenzen im Hexagesimalsystem bis zur 3. Differenz errechnet Denis Roegel in *Some remarks on Bürgi's interpolation*, 2016. Dort zeigt er, dass die dritten Differenzen, also $dd = 1^{IV}\ 8^{V}\ 54^{VI}(10^{VII}\ 11^{VIII})$ ist. Bürgi beginnt mit dem Wert für $\sin 1^\circ = 1^0 2^I\ 49^{II}\ 43^{III}\ 11^{IV}$, den er mit Hilfe seines „Kunstweges" errechnet hat. Hierbei ist zu beachten, dass Bürgi die 60er-Stellenwerte wie folgt benutzt: 1^0 bedeutet $1 : 60^1; 2^I = 2 : 60^2; 49^{II} = 49 : 603; 43^{III} = 43 : 60^4; 11^{IV} = 11 : 60^5$ (auch wenn sonst meist 1^0 ein Ganzes bedeutet). Somit ist bei Bürgi $\sin 1^\circ = 0,017.452.406.12$.

Zur Interpolation der Minutenwerte dazwischen benötigt Bürgi nun $\sin 1'$. Dafür ist $\sin 1^\circ : 60 = 1^I\ 2^{II}\ 49^{III}\ 43^{IV}\ 11^{V}$ = **0,000.290.873.435** eine

	Sinus	Differenzen	Differenz der Differenzen	i · dd
$0'$	0,000.000.000.000.000	0,000.290.888.204.563	0,000.000.000.024.613	1 · 0,000.000.000.024.613
$1'$	0,000.290.888.204.563	0,000.290.888.179.950	0,000.000.000.049.225	2 · 0,000.000.000.024.613
$2'$	0,000.581.776.384.513	0,000.290.888.130.725	0,000.000.000.073.847	3 · 0,000.000.000.024.616
$3'$	0.000.872.664.515.238	0,000.290.888.056.878	0,000.000.000.098.452	4 · 0,000.000.000.024.613
$4'$	0.001.163.552.572.116	0,000.290.887.958.426	0,000.000.000.123.064	5 · 0,000.000.000.024.613
$5'$	0,001.454.440.530.542	0,000.290.887.835.362		
$6'$	0,001.745.328.365.904			

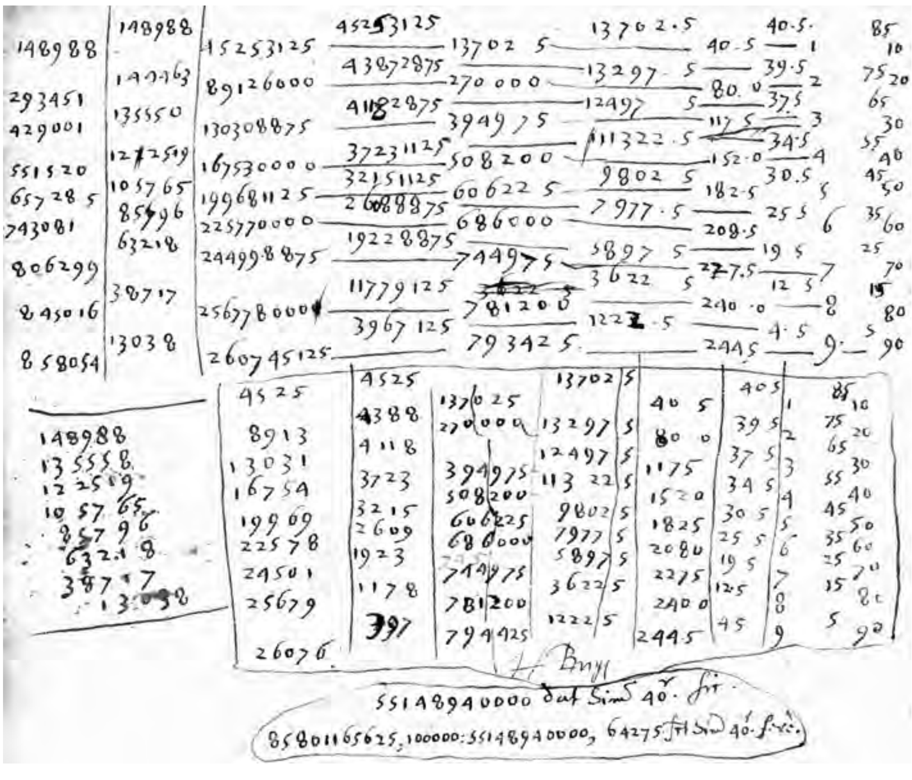
Bürgi findet: Die zweiten Differenzen der Sinuswerte sind proportional zu $dd = 0,000.000.000.024.613$

erste Näherung, die Bürgi durch zwei Zusätze, Additamenta genannt, verbessert; Denis Roegel ermittelt die Korrekturen Bürgis zu $1^{IV}\ 8^{V}\ 54^{VI} 10^{VII}\ 11^{VIII} =$ **0,000.000.014.768.27**. Somit ergibt sich als verbesserter Wert für $\sin 1' = 0,000.290.873.435 + 0,000.000.014.768 =$ **0,000.290.888.203**.

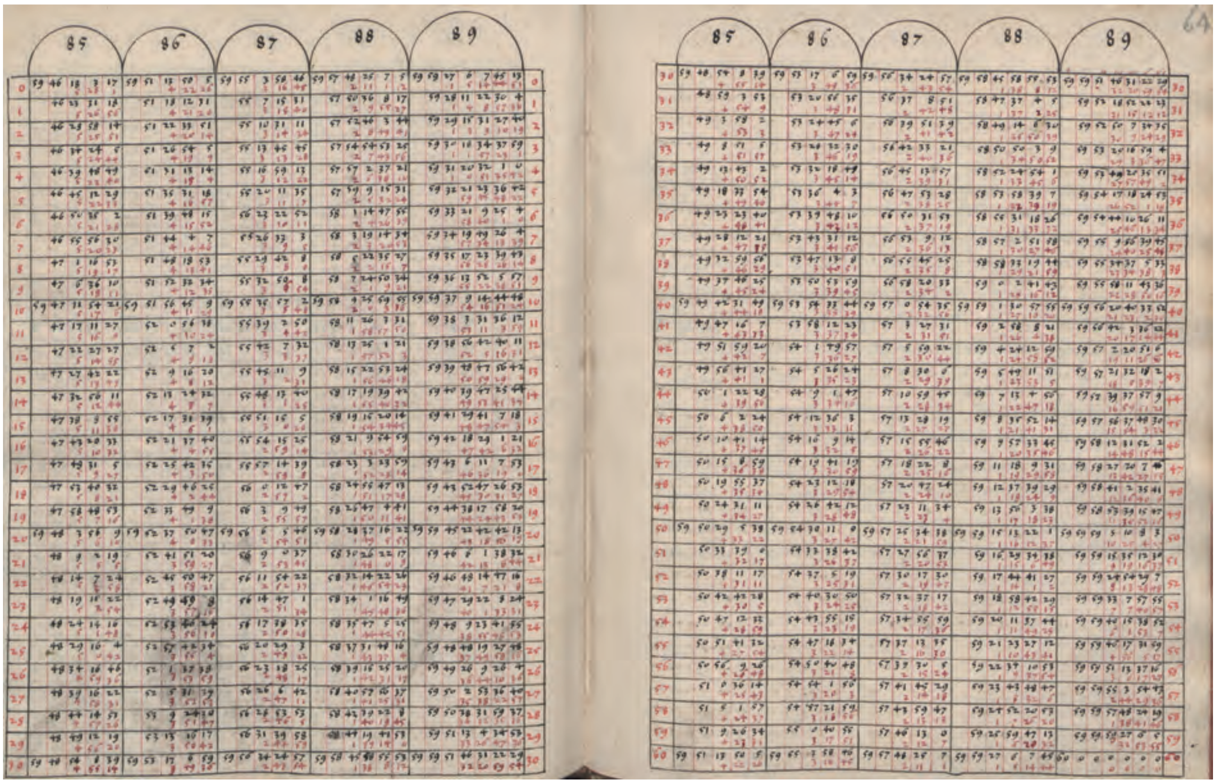
Das erste Additamentum nennt Bürgi zu $30 : 4 \cdot dd = 8^{IV}\ 35^{V}\ 42^{VI}\ 18^{VII}\ 20^{VIII} \approx 8^{IV}\ 36^{V} = 0,000.000.011.05$. Das zweite Additamentum nennt Bürgi zu $(1{+}30) : 3 \cdot \sum k_{(1-29)} \cdot 2 \cdot dd = 2^{IV}\ 51^{V}\ 42^{VI}\ 38^{VII} \approx 2^{IV}\ 52^{V} = 0,000.000.003.69$, wobei die hochgestellten korrekten 60er-Stellenwerte nicht mit der angegebenen Rechnung übereinstimmen. Beide Additamenta zusammen sind dann $11^{IV}\ 28^{V}$, und zur Näherung $\sin 1^\circ : 60 = 1^{I}\ 2^{II}\ 49^{III}\ 43^{IV}\ 11^{V}$ addiert, erhält Bürgi gerundet $1^{I}\ 2^{II}\ 49^{III}\ 55^{IV}$ als verbesserte Näherung für $\sin 1'$. Dieser Wert findet sich in Bürgis fertiger Sinustafel. Der von Bürgi ungerundet angegebene Wert $1^{I}\ 2^{II}\ 49^{III}\ 54^{IV}\ 39^{V}$ ergibt den genauen Wert von $0,000.290.888.2$.

Roegel interpretiert Bürgis Rechnung so, dass er dessen Korrekturen zu $(30 : 4 \cdot 60 + 8990 : 60) \cdot dd$ erkennt, auf einem eigenen Weg findet Roegel $(59 : 2 + 34220 : 60) \cdot dd$, also denselben Wert. Mit seinem $dd = 1^{IV}\ 8^{V}\ 54^{VI}\ 10^{VII}\ 11^{VIII}$ ergeben sich die Gesamtkorrekturzusätze als $0,000.000.014.768$ und damit das verbesserte $\sin 1' = 0,000.290.888.2$. Somit kann Bürgi nun die übrigen Minutenwerte unter Verwendung der Tetraederzahlen wie folgt finden[7]: $\sin i' = i \cdot \sin 1' - (i-1) \cdot i \cdot (i+1) : 6 \cdot dd$.

Bürgi gibt hier im *Fundamentum Astronomiae* die Sinuswerte mit einer Schrittweite von $1'$ an, und zwar auf fünf bis sieben Hexagesimalstellen genau; das entspricht etwa acht bis elf Dezimalstellen. Eine solch enorme Rechenleistung wird durch Bürgis geniales Verfahren wesentlich verkürzt, ist aber immer noch sehr bewundernswert, auch wenn Bürgi für seinen „Kunstweg“ nur Additionen und Halbierungen braucht, die wesentlich einfacher und sicherer zu rechnen sind als etwa das Wurzelziehen. Bür-



Henry Briggs rechnet um 1620 Bürgis Kunstweg-Tabelle. Einlageblatt im Fundamentum Astronomicum *von Ursus in Leiden. Unten „H. Briggs“.*



Bürgis Sinustabelle, Ausschnitt Blatt 63v/64r. Für 0° bis 87° auf 5 Stellen, dann auf 6 Stellen, 89°–90° auf 7 Hexagesimalstellen angegeben.

gis Verfahren hat zusätzlich den Vorteil, dass es quasi automatisch Rechenfehler kompensiert, dass es gegen Rechenfehler „immun“ ist.

Das Auffinden von Bürgis Handschrift mit der Sinustafel durch Menso Folkerts in der Universitätsbibliothek Breslau (Wrocław) bedeutete eine Sensation für die Wissenschaftsgeschichte der frühen Neuzeit. Dadurch konnte das Rätsel um Bürgis „Kunstweg“ gelüftet werden, eine völlig neue algebraische Methode. Als eine zweite Sensation möchte ich es bezeichnen, dass ein Zeitgenosse Bürgis dessen „Kunstweg“ entschlüsselt oder gekannt hat.

Auf ein Einlageblatt im Exemplar des *Fundamentum Astronomicum* von Ursus in der Universitätsbibliothek Leiden hat mich Hans van de Velde aufmerksam gemacht. Dort ist Bürgis Kunstweg-Schema durchgerechnet. In der Mitte des Blattes ist der Name „H. Briggs“ eingetragen, womit Henry Briggs (1561–1630) genannt wird, der ja als Miterfinder der Logarithmen gilt. Fritz Staudacher vermutet, dass Henry Briggs Bürgis Verfahren über John Dee (1527–1609) erhalten hatte, der ja 1589 in Kassel weilte und dort Bürgis „Kunstweg“ erfahren haben wird.[8] Der Autor dieser Tabelle erkennt auch, dass die Werte in den Zwischenspalten die Sinuswerte für die Zwischenwinkel $5^\circ, 15^\circ, \ldots 85^\circ$ ergeben.

Bürgis Sinustafel – und diese Arbeit überhaupt – sind leider nie gedruckt worden. Vielleicht hat der Kaiser die Bedeutung der Arbeit nicht erkannt, um sie drucken zu lassen. Allerdings hat Bürgi später noch eine große Sinustabelle errechnet[9], mit einer Schrittweite von $2''$ und einer Genauigkeit von acht Hexagesimalstellen, etwa 13 Dezimalstellen. Diese Sinustafel ist leider nach wie vor verschollen. Benjamin Bramer schreibt dazu:

> *Es hat mein lieber Praeceptor und Schwager Jobst Burgi … vor ungefähr 56 Jahren[10] zum Bericht seines inventierten Triangulier-Instruments … gegenwärtige Figuren schneiden lassen. Es ist aber kein Bericht dabei verfertigt worden, nur dass ich anno 1609, als ich bei ihm mich aufhielt, einige Figuren zum Messen entworfen habe. Weil er aber endlich willens gewesen, diesen Bericht gänzlich verfertigen zu lassen und demselben also auch seine schönen Progress-Tabulen und die Tabulas Sinuum [anzufügen], so er in Grad, Minuten und von 2 zu 2 Sekunden mit unsäglicher Arbeit kalkuliert hatte, so ist er auf vieler [Leute] Anhalten willens gewesen, ihn in Druck kommen zu lassen. … Weil aber die in ganz Deutschland noch anhaltende große Unruhe sich damals in Böhmen entsponnen und einen Anfang genommen habe, ist solches alles liegen geblieben.*

Anmerkungen

1. Siehe hierzu Folkerts, Launert, Thom 2016.
2. Zu Jost Bürgi siehe die umfangreiche Biografie von Fritz Staudacher, *Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser*, NZZ Libro Verlag, Zürich 2015.
3. Dieter Launert, *Bürgis Kunstweg im Fundamentum Astrono-*

miae – Entschlüsselung seines Rätsels, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Nova Kepleriana Neue Folge 141, München 2015.
4. List, Martha / Bialas, Volker; *Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler*, Nova Kepleriana Neue Folge Heft 5, München 1973.
5. Damit wählt Bürgi als erste Näherung, wohl bewusst, $\sin 30^\circ = 6 : 12 = \frac{1}{2}$.
6. Erschienen in: *Historia Mathematica* 43, 2016, S. 133–147, unter Folkerts/Launert/Thom.
7. Bürgi kennt die Summenformel für $\sum k \cdot (k+1) : 2 = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) : 6$ und für die Dreieckszahlen $\sum k = n \cdot (n+1) : 2$.
8. 24.–30. März 1589 (alter Stil), 3.–9. April 1589 (neuer Stil). Siehe Fritz Staudacher 2015
9. Benjamin Bramer, *Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangulier Instruments*, Cassel 1648, Blatt A3r „An den günstigen Leser".
10. Also 1592, als Bürgi in Prag bei Kaiser Rudolph II. war.

Literatur

Bramer, Benjamin; *Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangulier Instruments*, Cassel 1648.
Folkerts, Menso; Eine bisher unbekannte Schrift von Jost Bürgi zur Trigonometrie, in: *Arithmetik, Geometrie und Algebra in der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz 2014.
Folkerts, Launert, Thom; Jost Bürgi's Method for Calculating Sines, http://arXiv.org/abs/1510.03180v2. Cornell University Ithaca New York, vom 18. März 2016. Erschienen in *Historia Mathematica*, Nr. 43, 2016, S. 133–147, unter Folkerts/Launert/Thom.
Launert, Dieter; *Bürgis Kunstweg im Fundamentum Astronomiae – Entschlüsselung seines Rätsels*, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Nova Kepleriana Neue Folge 141, München 2015.
Launert, Dieter; *Astronomischer Grund – Fundamentum Astronomicum (1588) des Nicolaus Reimers Ursus*, Frankfurt am Main 2012.
Launert, Dieter; Nicolaus Reimers (Raimarus Ursus), *Günstling Rantzaus – Brahes Feind*, München 1999.
List, Martha / Bialas, Volker; *Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler*, Nova Kepleriana Neue Folge Heft 5, München 1973.
Roegel, Denis; A note on the complexity of Bürgi's algorithm for the computation of sines, 10. 3. 2016, http://locomat.loria.fr/buergi-sines/roegel2016buergi-complexity.pdf.
Roegel, Denis; A preliminary note on Bürgi's computation of the sine of the first minute, http://locomat.loria.fr/buergi-sines/roegel2016buergi-sine1minute.pdf.
Roegel, Denis; Some remarks on Bürgi's interpolation, http://locomat.loria.fr/buergi-sines/roegel2016buergi-interpolation2.pdf
Roegel, Denis; 9-digit interpolations for Bürgi's hypothetical 2″ sine table, http://locomat.loria.fr/buergi-sines/roegel2016buergi-interpolation2.pdf.
Staudacher, Fritz; *Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser*, NZZ Libro Verlag, Zürich 2015.
Ursus, Nicolaus Raimarus; *Fundamentum Astronomicum*, Straßburg 1588.

Dr. Dieter Launert, Langendamm 24, 25746 Heide
drlaunert@kabelmail.de

Dr. Dieter Launert (Jg. 1940) studierte Mathematik und Physik in Berlin und Astronomie in Hamburg. Von 1968–1985 war er Lehrer in Berlin und Reinbek bei Hamburg, von 1985–2005 Schulleiter eines traditionsreichen Gymnasiums in Schleswig-Holstein, der Meldorfer Gelehrtenschule. 1999 promovierte er in Kiel in Wissenschaftsgeschichte, 2007 erhielt er den Akademiepreis der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Sein Forschunginteresse ist die Geschichte der Mathematik und der Astronomie im 16. und 17. Jahrhundert.