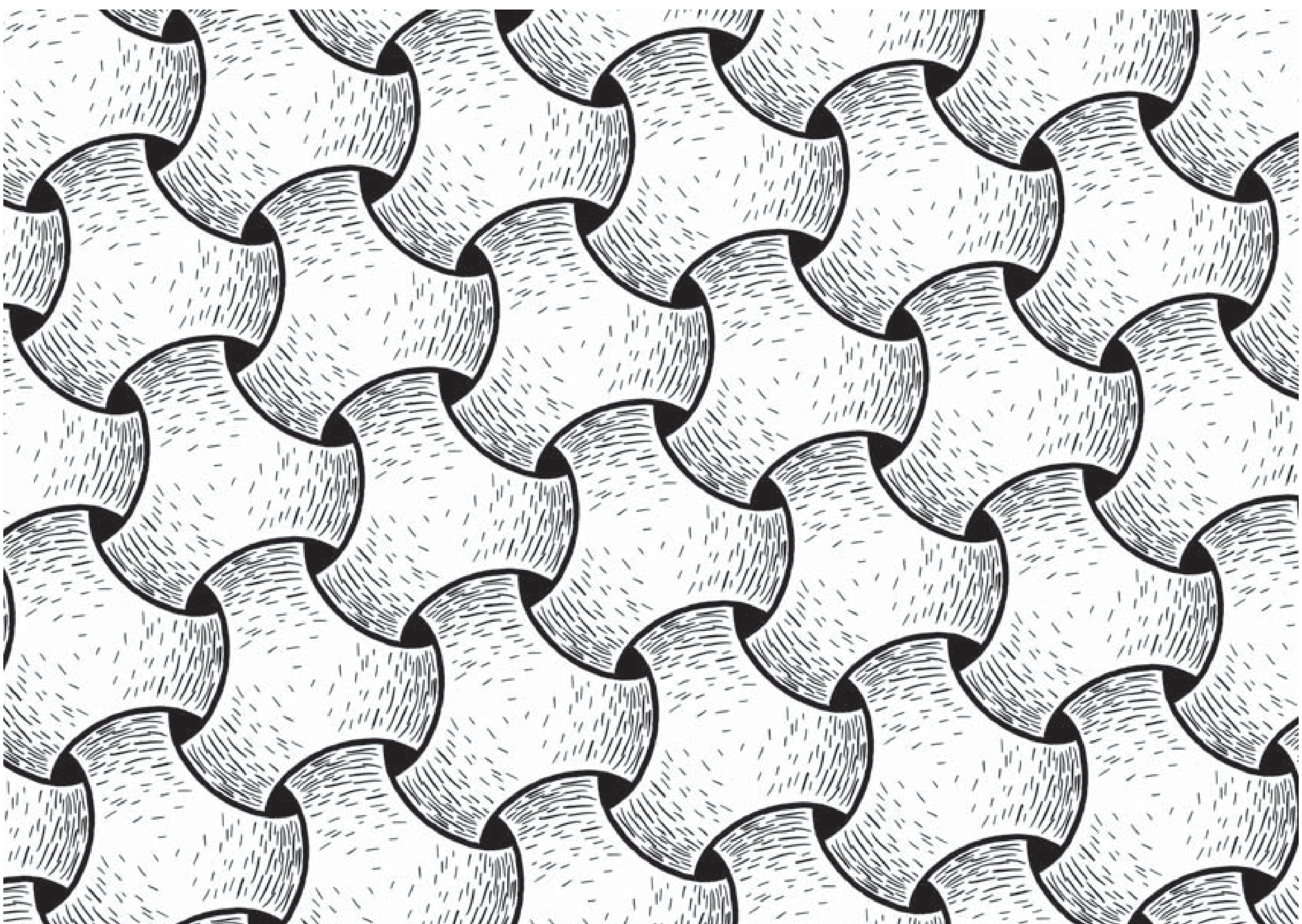
iOrnament – Aus dem mathematischen Maschinenraum

Jürgen Richter-Gebert

Das Symmetriezeichenprogramm *iOrnament* bildet eine Brücke zwischen Mathematik und Kunst. Die folgenden Seiten geben einen Einblick in seine Grundlagen, Hintergründe und mathematischen Aspekte, ergänzt durch Anregungen zur mathematiknahen Exploration von Symmetrien, Knoten oder Verformungen mithilfe der App und ihrer Schwester *iOrnament Crafter*. Viele dieser Anregungen bieten sich auch für Workshops mit Schülerinnen und Schülern oder Studierenden der Anfangssemester an.

1 Ebene Symmetriegruppen

Ein Ornament im Sinne dieses Artikels ist ein unendlich ausgedehntes Bild, das Symmetrien aufweist. Es kann als eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{F}$ aufgefasst werden, wobei $\mathbf{F}$ ein passend ausgewählter *Farbraum* ist, beispielsweise $\{0, 1\}$ für Schwarzweißbilder, $[0, 1]$ für Grauwertbilder oder $[0, 1]^3$ für Bilder mit RGB-Kanälen. Die Symmetrien lassen sich



Mit iOrnament gezeichnetes Fächenornament der Symmetriegruppe **P31m**

DOI 10.1515/dmvm-2017-0026

als eine Menge $\mathbf{S}$ von Isometrien der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ausdrücken, die das Bild wieder in sich selbst überführen. Es gilt also $f(x) = f(S(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und $S \in \mathbf{S}$. Die Vielfalt möglicher Isometrien der euklidischen Ebene ist recht überschaubar: Es sind die *Spiegelungen*, die *Rotationen*, die *Gleitspiegelungen* und die *Verschiebungen*.

Es sei nun f ein Ornament und $\mathbf{S} := \{S|f(x) = f(S(x)); \forall x \in \mathbb{R}^2\}$ die Menge aller zu dem Ornament gehörigen Isometrien. Diese Menge $\mathbf{S}$ bildet eine Gruppe, die *Symmetriegruppe* des Ornaments. Zunächst unterliegt die Menge $\mathbf{S}$ nicht allzu vielen Einschränkungen, sie kann aus lediglich der Identität bestehen, sie kann endlich sein, abzählbar oder sogar überabzählbar. Beschränkt man sich auf *diskrete* Symmetriegruppen (dies sind solche, bei denen die Bahn (Orbit) eines Punktes keine Häufungspunkte aufweist), so dünnt sich die Situation massiv aus. Es bleiben nur die *Rosettenornamente*, die *Bandornamente* und die *ebenen Flächenornamente* übrig. Diese drei Klassen unterschieden sich durch die Anzahl unabhängiger Verschiebesymmetrien. Ein *Rosettenornament* besitzt keine Verschiebesymmetrien, ein *Bandornament* hat Verschiebungen in nur eine Richtung, und ein *Flächenornament* weist zwei unabhängige Richtungen der Verschiebesymmetrie auf. Als Konsequenz enthält jedes *Flächenornament* einen beschränkten Fundamentalbereich (eine *Kachel*), sodass durch wiederholtes Aneinanderlegen der Kachel das gesamte Ornament entsteht.

In gewisser Weise ist ein Flächenornament ein Zwitterwesen zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit: Während es einerseits nur in seiner unendlichen Ausdehnung vollständig ist, spielt sich dennoch der Bereich künstlerischer Freiheit nur in einem sehr begrenzten Bereich ab. Gerade deshalb hat sich der Grafiker M. C. Escher mit Flächenornamenten beschäftigt: Er versuchte Zeit seines Lebens, das Unendliche mit grafischen Methoden fassbar zu machen. Dabei ist die strukturelle Vielfalt von Flächenornamenten beschränkt. Ein klassisches Klassifizierungsresultat aus dem 19. Jahrhundert besagt nämlich, dass es bis auf Gruppen-Isomorphie genau 17 Gruppen gibt, die einem Flächenornament zugrunde liegen können. Diese werden in unserem Sprachraum *kristallografische Gruppen* genannt (weil sie auch in der Kristallchemie eine große Rolle spielen), und heißen im englischsprachigen Raum sehr treffend *wallpaper groups*, also „Tapetengruppen". Der künstlerischen Gestaltungsfreiheit, also dem Inhalt, der wiederholt wird, sind hingegen keine Grenzen gesetzt.

iOrnament [3] gibt einem nun die Möglichkeit, auf dem iPad Flächenornamente zu malen. Hierzu zeichnet man einfach mit dem Stift oder dem Finger Linien und Figuren. Die gezeichneten Striche werden nach den Regeln einer ausgewählten Symmetriegruppe vervielfältigt. Durch das Zeichnen eines Strichs entsteht ein komplettes Flächenornament. Das Programm hat den Anspruch, ein möglichst großes Spektrum künstlerischer Gestaltungsmöglichkeiten für ebene Flächenornamente bereitzustellen.

2 Hyperbolische und sphärische Symmetrien

iOrnament bietet neben der Bereitstellung von Flächenornamenten auch weitreichende Möglichkeiten, darüber hinausgehende Symmetriegruppen zu erkunden. Eine zur euklidischen Ornamenttheorie analoge Welt lässt sich nämlich auch in Ebenen konstanter positiver Krümmung (Kugeloberfläche) bzw. konstant negativer Krümmung (hyperbolische Ebene) entwickeln.

Insbesondere kann in vielen Fällen die graphische Aussage eines Ornaments von der euklidischen Ebene in die anderen Räume übertragen werden. Die Theorie ist an dieser Stelle vielfältig und teilweise etwas subtil. Dies soll hier an einem vergleichsweise einfachen Beispiel erläutert werden. Nehmen wir an, es liegt ein Ornament vor, das eine Reflektionsgruppe zur Grundlage hat, zum Beispiel ein Dreieck-Kaleidoskop mit den Eckenwinkeln $90°, 60°, 30°$. In der euklidischen Ebene ist die Winkelsumme eines solchen Dreieck-Kaleidoskops immer $180°$. Um ein geschlossenes Ornament zu erhalten, müssen zudem die einzelnen Winkel ganzzahlige Teiler von $180°$ sein. Ändert man nun die Winkel, sodass die Summe größer als $180°$ wird, dann lässt sich das Dreieck nicht mehr in der Ebene, wohl aber als sphärisches Dreieck auf der Kugel realisieren. Wird die Winkelsumme kleiner als $180°$, so ergeben sich Dreiecke in hyperbolischer Geometrie. Sind die Winkel weiterhin Teiler von $180°$, so ergibt sich in der jeweiligen Geometrie wieder eine Reflektionsgruppe, die zur Grundlage eines Ornaments genommen werden kann.

Auf der Kugel ergeben sich so zum Beispiel die Symmetrien, die den platonischen Körpern zugrunde liegen. Neben diesen endlich vielen Symmetrietypen gibt es auf der Kugel noch zwei unendliche Klassen, die den Band- bzw. Rosettenornamenten entsprechen. In der hyperbolischen Ebene sind die Strukturen am reichhaltigsten. Weil die Winkelsumme in Dreiecken beliebig klein werden kann, ergeben sich Drehzentren mit beliebig hoher Zähligkeit, und eine unendliche und reichhaltige Klasse möglicher Symmetriegruppen. Für eine vollständige Klassifikation sei an dieser Stelle auf [1] verwiesen.

Eine Besonderheit in iOrnament ist, dass der künstlerische Inhalt des Ornaments (also der Inhalt einer wiederholungsfreien Fundamentalzelle) mit minimaler Störung (konform) von einer Geometrie in die andere übertragen werden kann. Um dies zu tun, ist der Riemann'sche Abbildungssatz von fundamentaler Bedeutung. Der besagt, dass jedes von einer Jordankurve umrandete Gebiet konform auf das Innere einer Kreisscheibe abgebildet werden kann. Die Abbildung ist bis auf eine Möbiustransformation (3 Freiheitsgrade) eindeutig. Die Anwendung des Satzes in beide Richtungen ermöglicht es nun, das Innere eines Dreiecks in

Ornamentales Muster auf der Kugel mit Ikosaedersymmetrie, gezeichnet von Agnes Künnecke

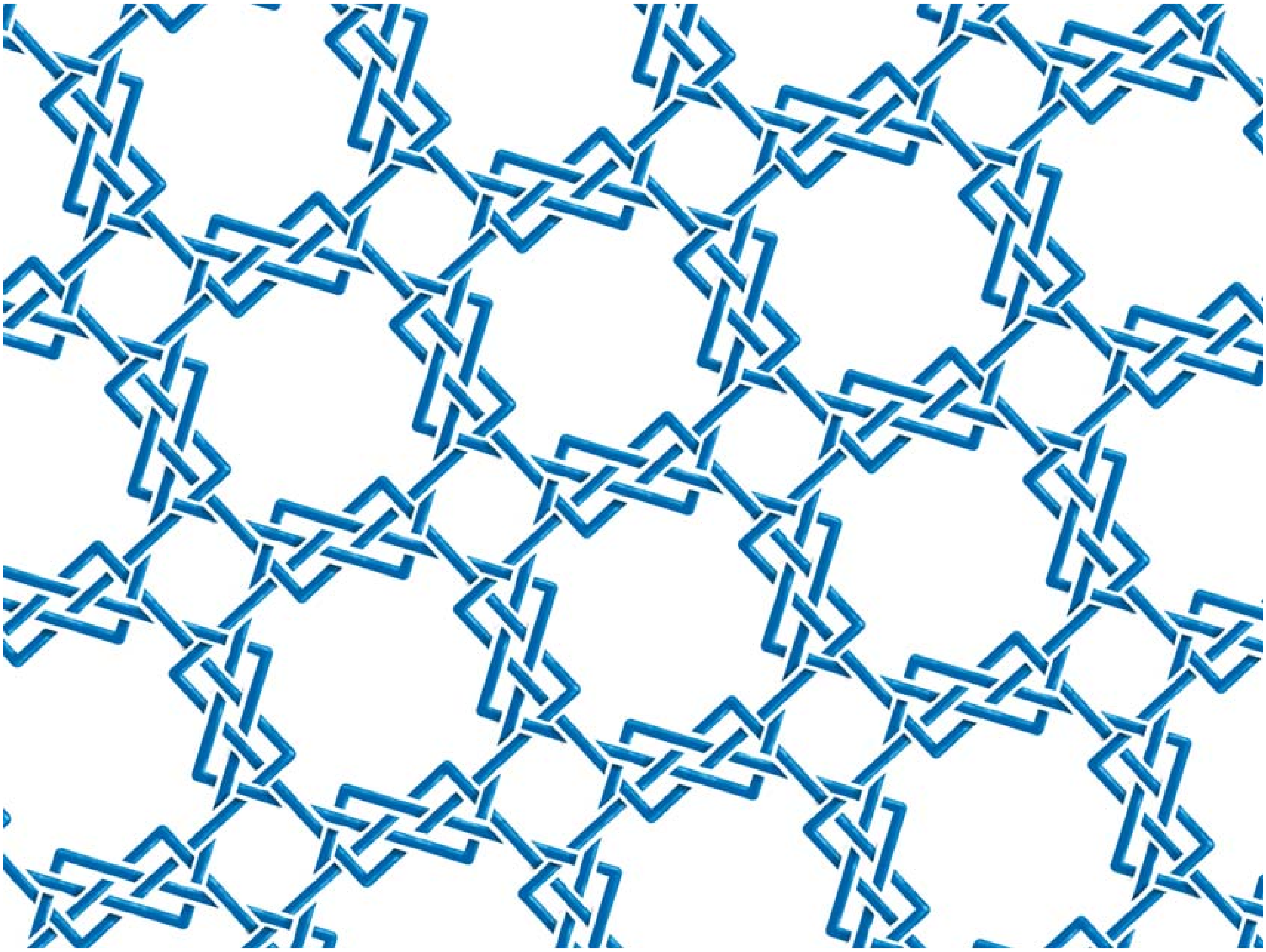
Escherartige Unterteilung in der hyperbolischen Ebene

euklidischer Geometrie – mitsamt seinem künstlerischen Inhalt – auf ein entsprechendes Dreieck in hyperbolischer Geometrie abzubilden. Die Freiheiten der Möbiustransformation steuern gerade so viel Spielraum bei, dass man die Ecken der Dreiecke aufeinander abbilden kann. Liegt die Kombinatorik der Symmetriegruppe erst einmal fest, ist also die konforme Übertragung des Ornamentes im Wesentlichen eindeutig [2]. Konkret werden in iOrnament solche Deformationen mit Mitteln der diskreten Differentialgeometrie berechnet.

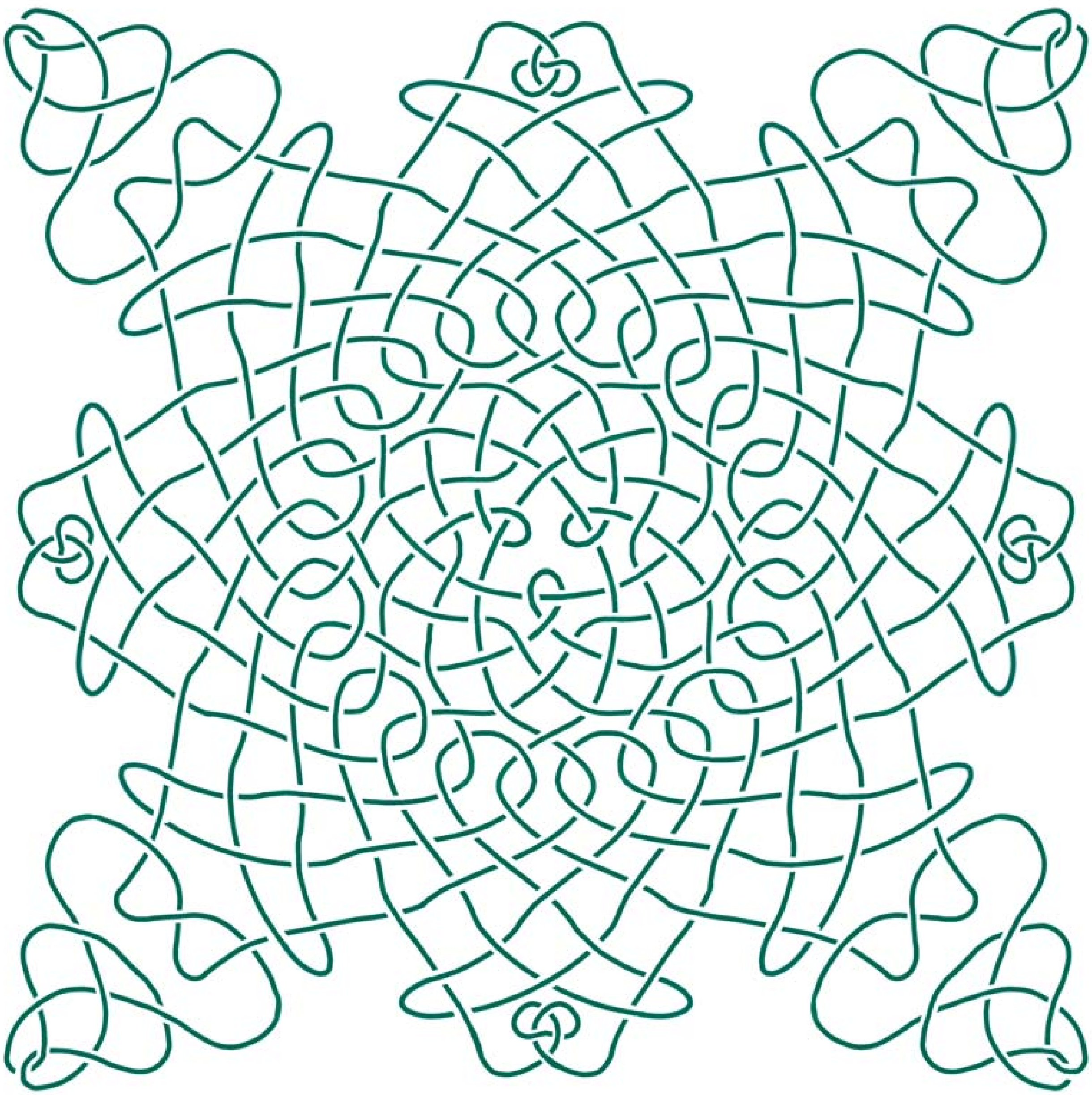
In iOrnament ist es möglich, während des Zeichnens von einem zu einem anderen Symmetrietyp mit gleicher Fundamentalzellenform zu wechseln. Daraus ergeben sich einige interessante mathematische Optionen zum Gestalten von Ornamenten.

Beispielsweise ist es möglich, von der Symmetriegruppe **P4m** (erzeugt von einer 4-zähligen bzw. einer 2-zähligen Rotation und einer Spiegelung durch die Verbindungsachse) zur Gruppe **P4** zu wechseln (dies ist die entsprechende Gruppe ohne Spiegelung) und dadurch Symmetrien der **P4m** gezielt aufzubrechen. Besonders reizvoll ist es, in der ersten Gruppe eine einzelne Strecke zu zeichnen, deren Anfangs- und Endpunkt unter der Symmetriegruppe zusammenfallen (somit entsteht ein symmetrisches Muster geschlossener Linienzüge), und diese dann spiegelungsfrei durch Wegradieren in der **P4** zu Webe- bzw. Flechtmustern umzugestalten. Ähnliche Effekte kann man in vielen islamischen Sternmustern beobachten.

Eine zweite Anwendung dieser Symmetriebruchtechnik ergibt sich bei Rosettensymmetrien. Hier kann man Ornamente verschlungener Linien schaffen, die in unterschiedlichen Regionen (Abstand von Mittelpunkt) unterschiedliche Zähligkeiten aufweisen. Reizvolle geschlossene Linienzüge lassen sich erreichen, wenn man dafür sorgt, dass aneinander angrenzende Regionen sich durch einen Primfaktor in der Zähligkeit voneinander unterscheiden. Das auf der folgenden Seite gezeigte Ornament hat eine Abfolge $4 \rightarrow 8 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3$. Die Linienzüge wurden wiederum mit der Symmetriebruchtechnik in Flechtwerke umgewandelt. Das Muster weist somit global überhaupt keine Symmetrien auf, obwohl lokal sehr symmetrische Elemente in den Vordergrund treten. Vergleichbare Techniken wurden von Albrecht Dürer für die Erstellung seiner berühmten Knotenbilder verwendet.



Flechtwerk. Es wird hier nur eine Linie symmetrisch wiederholt und zum Flechtwerk aufgebrochen.

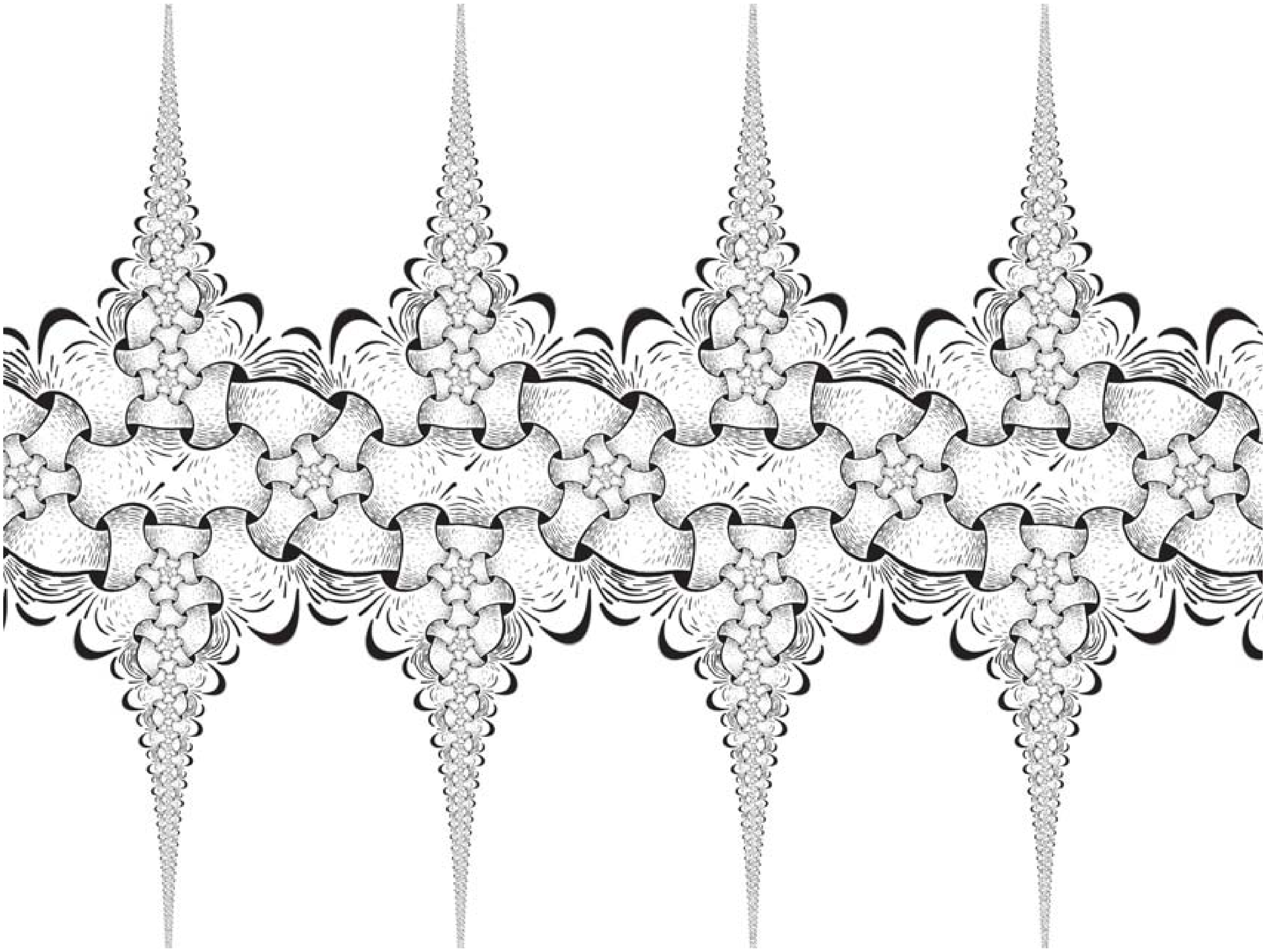


Knoten à la Dürer, basierend auf der Sequenz $4 \to 8 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3$. Man beachte, dass die Symmetrie im Inneren 3-zählig und außen 4-zählig ist. Kleine Herausforderung: Aus wie vielen verschiedenen Seilen besteht dieser Knoten?

4 iOrnament Crafter

In enger Interaktion mit iOrnament steht eine weitere App, der *iOrnament Crafter* [4]. Dieser gestattet es, auf Ornamenten ein Postprocessing durchzuführen, diese konform zu verformen, Bastelbögen für platonische Körper zu erstellen, Kaleidoskope zu simulieren und vieles mehr. Hier verdient der Berechnungsprozess einer Verformung besondere Beachtung. Der iOrnament Crafter macht dabei stark von Möglichkeiten der Grafikkarte Gebrauch. Während in iOrnament der Zeichenprozess vorwärtsgerichtet ist (von der Eingabe ausgehend), ist er im iOrnament Crafter rückwärtsgerichtet (von den einzufärbenden Pixeln ausgehend).

Betrachten wir zunächst eine spiralartige Verzerrung eines auf einem Quadratraster basierenden Ornaments. Hierzu wird das Ornament gedanklich in die komplexe Ebene eingebettet und bildet dort eine doppelt periodische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbf{F}$. Wir stellen uns in Gedanken ein Ornament auf den Kacheln eines Quadratgitters mit Kantenlänge 2π vor. Wollte man das Quadratgitter in ein Polarkoordinatengitter deformieren, so würde man darauf (vorwärts) eine Exponentialfunktion anwenden. Will man aber umgekehrt herausfinden, welche Stelle im ursprünglichen Gitter zu einem Punkt im Polarkoordinatenbild (dem Bildschirm) ge-



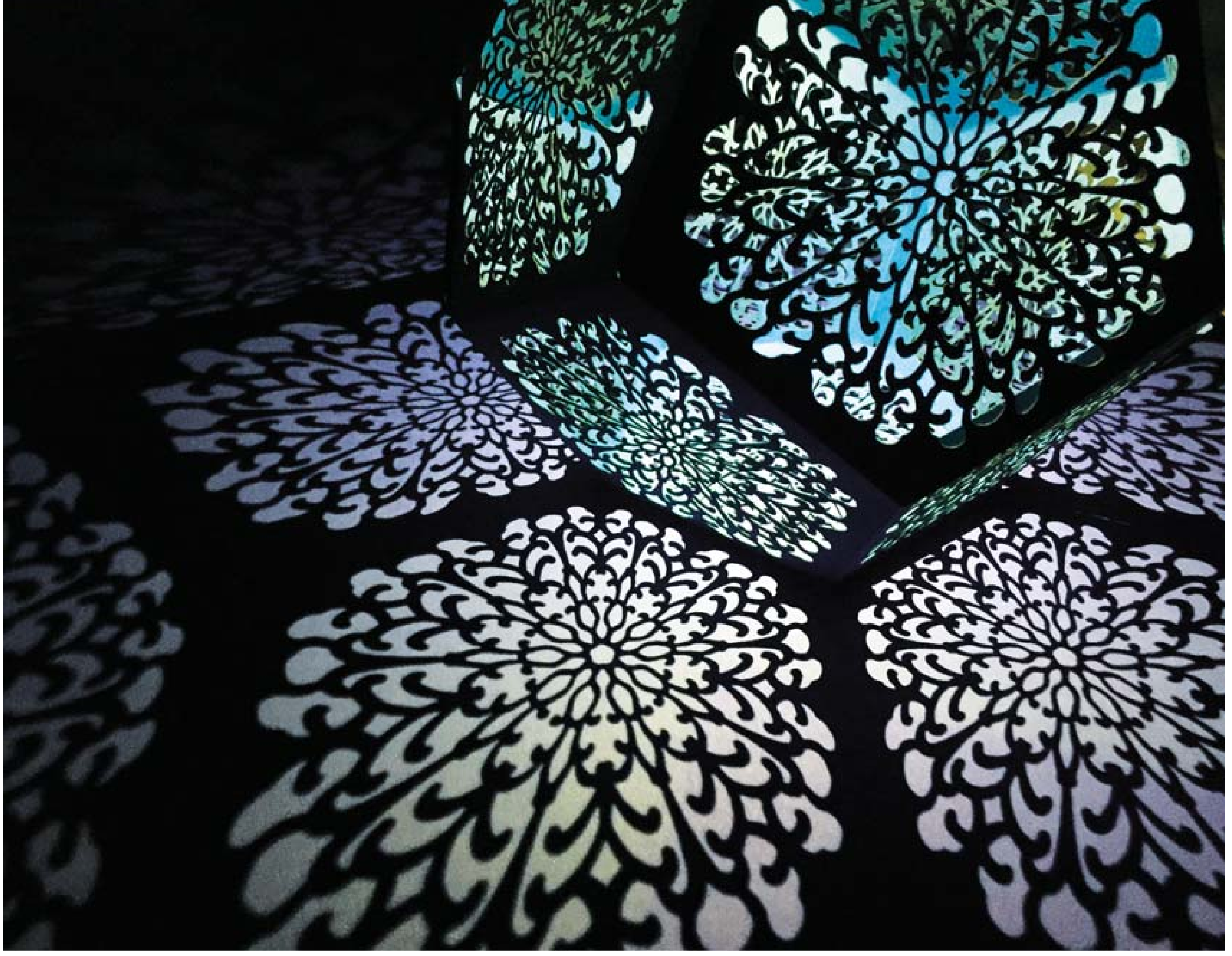
Konforme Deformation eines mit iOrnament gezeichneten Musters

hört, dann muss man die Umkehrfunktion $\log(z)$ anwenden. Bei dieser Funktion und der oben gewählten Kachelbreite von 2π würde eine Kachel genau zu einem Kreisring konform deformiert werden. Betrachten wir stattdessen $\log(z^6)$, so würden jeweils sechs Kacheln einen Ring bilden. Allgemein erhält man durch $\log(z^{a+ib})$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ spiralartige Anordnungen der Kacheln. Kombiniert man nun die konforme Verzerrung mit der Farbfunktion des Bildes, so ergibt sich mit $f(\log(z^{a+ib}))$ die Funktion zum Einfärben des Bildes. Soll ein Pixel an der Position z eingefärbt werden, so gibt zunächst die innere Funktion an, zu welcher Position der Punkt im Uprungsornament gehört. Die Funktion f liest dann die zugehörige Farbe aus. Die Art der Darstellung ist analog zu den in [5] vorgestellten Phasenportraits komplexer Funktionen. Ersetzt man in dieser Formel z durch eine holomorphe Funktion $\phi(z)$, so können sehr komplexe (und ästhetische) Deformationen erzeugt werden. Durch das pixelorientierte Vorgehen lässt sich die Berechnung parallelisieren und auf der Grafikkarte stark beschleunigen. Das obige Bild zeigt das Ergebnis der Verzerrungsfunktion $\log(\tan(\sin(z))^{a+ib})$ angewandt auf das Ornament auf Seite 75. Die Art der Darstellung bietet übrigens einen sehr visuellen Zugang zur komplexen Funktionentheorie.

5 Bastelworkshops mit dem Crafter

Der *iOrnament Crafter* entstand ursprünglich aus der Idee heraus, aus den in iOrnament erstellten Zeichnungen dreidimensionale Modelle in der *echten Welt* zu erzeugen. Hierbei sollte bewusst auf Hightech-Prozesse wie 3D-Druck verzichtet werden. Die gesamte Produktionskette vom Zeichnen zum fertigen 3D-Modell sollte im Prinzip, wenn Tablets vorhanden sind, in Schülerworkshops ausführbar sein. Diese App ist das Werkzeug, mit dem aus ornamentalen Mustern Bastelbögen für 3D-Körper hergestellt werden.

Bei der Erzeugung ornamentaler platonischer Körper werden, ähnlich wie bei den Kugelsymmetrien in iOrnament, durch Veränderung der Zähligkeit der Drehzentren aus ebenen Ornamenten solche auf einem geschlossenen Körper positiver Krümmung erzeugt. iOrnament Crafter bietet



Laser-Cutter und Hinterleuchtung: eine Highend-Arbeit mit Ornament und platonischen Körpern

an dieser Stelle alle mathematisch sinnvollen Möglichkeiten zur Auswahl an. Nach der Wahl des Musters können Bastelbögen direkt ausgedruckt werden. Die bisherige Erfahrung hat gezeigt, dass die Möglichkeit, einen greifbaren Gegenstand selbst zu gestalten, in Schülerworkshops eine große Motivation für die Beschäftigung mit platonischen Körpern und Symmetriegruppen darstellen kann.

Neben der Erzeugung platonischer Körper gibt es auch die Möglichkeit, sogenannte Kaleidozykel herzustellen: ringförmige Ketten aus sechs, entlang der Kanten verbundenen Tetraedern. Bei passender Wahl der Geometrie bilden diese Modelle, die im Zusammenbau etwas anspruchsvoller sind, kinematische Modelle, mit denen man eine kontinuierliche, unendliche Drehbewegung vollführen kann, bei der das ornamentale Muster in immer neuen Zusammenhängen auftritt. In Schülerworkshops bieten sich hier noch weitere Ausflüge in die Theorie geschlossener kinematischer Ketten an.

Literatur

[1] John Horton Conway, Heidi Burgiel, Chaim Goodman-Strauss, *The Symmetry of Things*, A K Peters, CRC Press, Wellesley MA, 2008.

[2] Martin von Gagern & Jürgen Richter-Gebert, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*. Electronic Journal of Combinatorics (special issue for Anders Björner's 60th birthday), 16 (2) (2010) R12, 19 pp, tinyurl.com/ya8w2xxb.

[3] Jürgen Richter-Gebert, *iOrnament*, Apple App Store, 2012–2017, https://itunes.apple.com/app/id534529876?mt=8.

[4] Jürgen Richter-Gebert, *iOrnament Crafter*, Apple App Store, 2017, https://itunes.apple.com/app/id1183533412?mt=8.

[5] Elias Wegert, *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*, Birkhäuser, Basel 2012.

Jürgen Richter-Gebert beschäftigt sich seit seiner Promotion 1992 mit mathematischen und didaktischen Aspekten der computergestützten Mathematikvisualisierung. Er entwickelte unter anderem das multimediale interaktionsfähige Geometrieprogramm Cinderella *zur Bearbeitung projektiver, euklidischer und nichteuklidischer Geometrien. Seit 2010 beschäftigt er sich vermehrt mit interaktiven Installationen für Ausstellungen und mit der Entwicklung von touch-basierten Apps.*

Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Technische Universität München, 85747 Garching
richter@ma.tum.de