Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

> To classify all equations or curves of a given genus, one attempts to construct an object each of whose points represents one such curve. This object is known as a moduli space.
>
> David Reed, *Classification in Mathematics and Biology: Some Recent Trends*, 2001.

Nach dem tragischen Tod Maryam Mirzakhanis erschienen Mitte Juli recht ausführliche Nachrufe in zahlreichen Zeitungen und Zeitschriften. Über das mathematische Werk der Trägerin der Fields-Medaille erfuhr man dort aber nur, dass es für den Uneingeweihten nicht verständlich sei. Im Nachruf des SPIEGEL wurde immerhin noch die asymptotische Berechnung der Anzahl geschlossener Geodäten gegebener Maximallänge auf einer hyperbolischen Fläche kurz angerissen, die jüngeren Arbeiten zur Dynamik auf Modulräumen aber wurden überall als etwas völlig Unerklärbares beschrieben.

Die FAZ etwa schrieb: „Schon die Namen der Arbeitsgebiete dürften den meisten Menschen nichts sagen: Mirzakhani beschäftigte sich mit Modulräumen, mit hyperbolischer Geometrie oder auch der sogenannten Ergodentheorie.“ Bei N24 erfuhr man: „Diese abstrakten geometrischen Welten sind für Laien und sogar für Mathematiker anderer Teildisziplinen schlicht unzugänglich.“ Und BILD übersetzte die Pressemitteilung der Universität Stanford recht frei: „Sie betrieb ihre Studien an gewölbten Flächen bis zu einem Bereich, in den andere kluge Köpfe nie vorgedrungen wären.“ Dabei hatte der SPIEGEL in seiner Jahreschronik 2014 Mirzakhanis Arbeit noch so erklärt:

> Als Doktorarbeit gab ihr McMullen eine Aufgabe, die er für schwierig, aber lösbar hielt: Sie sollte alle geschlossenen, sich nicht kreuzenden Linien zählen, die sich auf der Oberfläche eines beliebigen Körpers (einer Riemannschen Fläche) zeichnen lassen. [...] Mirzakhani hatte erkannt, dass nur ein Umweg sie zum Ziel führen würde. Bei ihrer Beweisführung beschränkte sie sich nicht auf die Riemannschen Flächen, sie wagte sich vielmehr in deren „Modulraum“ vor, ein höchst abstraktes Gebilde, in dem jede Fläche als ein Punkt betrachtet wird. Dabei betrat sie Neuland, weil Modulräume berüchtigt für ihre bizarren, unberechenbaren Eigenschaften sind. Kritzelnd tastete sie sich immer weiter vor in diese unbekannte Welt. Gleichsam am Wegesrand stieß sie auf neue Beweise für Theoreme, über denen andere Mathematiker seit vielen Jahren gebrütet hatten.

Was ist ein Modulraum?

Im Kontext der obigen Zeitungsartikel geht es natürlich immer um die Modulräume Riemannscher Flächen mit ihren „bizarren, unberechenbaren Eigenschaften“. Aber zunächst sollte man wohl ganz allgemein klären: Was ist eigentlich ein Modulraum?

Der Artikel *Modulraum* in der Wikipedia beginnt so:

> In der Mathematik bezeichnet man einen geometrischen Raum, dessen Punkte den verschiedenen mathematischen Objekten eines bestimmten Typs entsprechen, als Modulraum dieser Objekte.

Was soll man sich darunter vorstellen?

Modulräume von Pixeln und Melodien

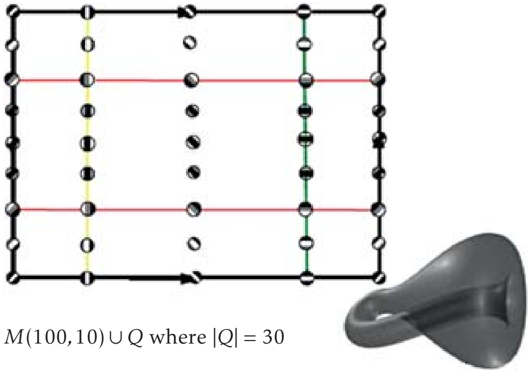
Leichter als die Modulräume Riemannscher Flächen sind zunächst Modulräume einfacherer geometrischer Objekte zu verstehen. Der Modulraum 1-dimensionaler Unterräume des 2-dimensionalen Raums etwa ist die projektive Gerade, topologisch ein Kreis, und der Modulraum 1-dimensionaler Unterräume des 3-dimensionalen Raumes ist die projektive Ebene.

Ein lebensnaheres Beispiel diskutieren Carlsson, Ishkhanov, de Silva und Zomorodian in ihrer Arbeit „On the local behavior of spaces of natural images“, die 2007 im *International Journal of Computer Vision* erschien und im vergangenen Dezember Thema des monatlichen Essays auf der Webseite der *American Mathematical Society* war.

In dieser Arbeit werden die in Naturfotos vorkommenden 3×3-Pixel analysiert. Mathematisch liegen die Helligkeitswerte der 3×3-Pixel in einem 9-dimensionalen Raum. Mit zwei Normierungen kann man annehmen, dass sie in einer 7-dimensionalen Sphäre liegen. Die Autoren griffen auf eine Datenbank mit 4167 Photos zu und erfassten eine Auswahl von vier Millionen der in diesen Fotos vorkommenden 3×3-Pixel.

Ihre Datenanalyse zeigt letztlich, dass die Helligkeitswerte sich um eine in der 7-dimensionalen Sphäre liegende Kleinsche Flasche herum häufen. Sicherlich ein überraschendes Vorkommen der Kleinschen Flasche „in der Natur“.

DOI 10.1515/dmvm-2017-0045



Ein weiteres, elementareres Beispiel aus der „realen Welt“: In einer Arbeit – veröffentlicht in *Musical Times* und populärwissenschaftlich aufbereitet in der Feature Column der *American Mathematical Society* – interpretieren Altschuler und Philipps Musikwerke mittels der Topologie von Flächen.

Für ein 2-dimensionales Koordinatensystem hat man die Zeit und die Tonhöhe: So ergibt jede Melodie einen Graphen in der 2-dimensionalen Ebene. Doch manchmal kommen zusätzliche Besonderheiten ins Spiel, wegen derer man statt der Ebene besser kompliziertere Flächen betrachten sollte.

Die Autoren wenden das auf zwei der Bachschen Kanons (BWV 1087) an. Kanon 3 wird wie alle Bachschen Kanons nach einer Einleitung periodisch, bewegt sich dann also auf einem Zylinder. Kanon 5 hingegen hat die Besonderheit, dass das Notenbild eine Gleitspiegelung aufweist. Man bewegt sich also auf einem Möbiusband. Und wenn man noch die Tonalität berücksichtigt, also die Tatsache, dass das hohe und das tiefe C in gewisser Weise derselbe Ton sind, dann bewegen sich die Musikstücke nicht mehr auf einem Zylinder oder Möbiusband, sondern auf einem Torus oder einer Kleinschen Flasche.

Berechnen kann man damit erst einmal nichts, es dient nur der Visualisierung. Man kann Melodien als Kurven auf einer Fläche interpretieren, mithin als Punkte im Modulraum der Kurven auf einer gegebenen Fläche. Um mit dieser Interpretation tatsächlich etwas anfangen zu können, bräuchte man freilich Invarianten, die es erlauben, die Lage einer Melodie im Modulraum zu lokalisieren. Ähnlich wie in der höheren Teichmüller-Theorie, wo man die Topologie der Modulräume mit globalen Methoden (Morse-Theorie) bestimmen kann, aber erst geometrisch definierte Invarianten die Lokalisierung einzelner Darstellungen im Modulraum ermöglichen.

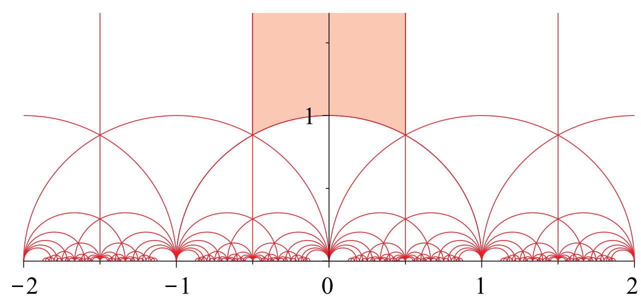
Modulräume von Kurven

Der Wikipedia-Artikel *Modulraum* setzt seine Einleitung dann fort mit:

> Beispielsweise ist die projektive Ebene $\mathbf{RP}^2$ der Modulraum aller Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbf{R}^3$. Der Modulraum der komplexen elliptischen Kurven ist die Modulkurve $SL(2,\mathbf{Z})/\mathbf{H}^2$.

Nun geht es in Mirzakhanis Arbeit ja nicht um beliebige Modulräume, sondern um den Modulraum der komplexen Kurven (also der Riemannschen Flächen oder äquivalent der hyperbolischen Flächen) eines gegebenen Geschlechts $g \geq 2$. Für den ist die von der hyperbolischen Ebene $\mathbf{H}^2$ überlagerte Modulkurve $SL(2,\mathbf{Z})/\mathbf{H}^2$ als Modulraum der elliptischen Kurven (oder äquivalent der flachen Flächen vom Geschlecht $g = 1$) das „toy example“.

Für die Modulkurve und andere hyperbolische Flächen sind dynamische Systeme wie der geodätische oder horozyklische Fluss gut erforscht, man muss eigentlich „nur“ die Multiplikation von 2×2-Matrizen verstehen. Zum Beispiel besagt ein Satz von Furstenberg, dass der horozyklische Fluss auf kompakten hyperbolischen Flächen „eindeutig ergodisch“ ist, sich also sehr gleichmäßig über die Fläche verteilt. Der berühmte Maßstarrheitssatz von Ratner verallgemeinert dies unter anderem auf horosphärische Flüsse in höherdimensionalen lokal-homogenen Räumen und beweist, dass deren Orbits stets einen „algebraischen Orbit“ als Abschluss haben.



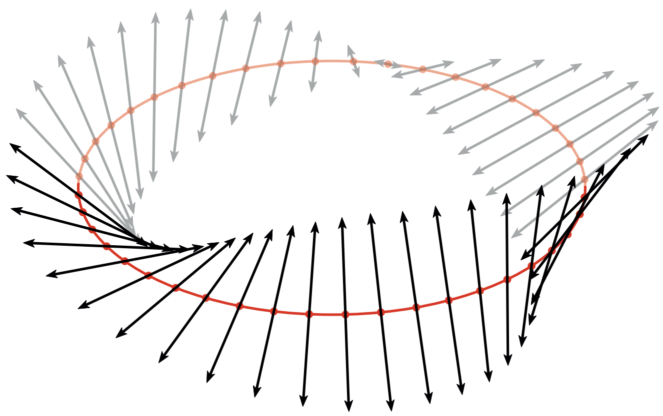
Grobes und Feines

Bei Wikipedia heißt es weiter:

> In der algebraischen Geometrie hat man für die Klassifikation algebraisch-geometrischer Objekte die Definitionen eines feinen Modulraums und eines groben Modulraums. Der feine Modulraum hat bessere Eigenschaften, existiert aber nicht immer.

Diese Definitionen gehen auf Grothendieck zurück: Der feine Modulraum trägt eine universelle Familie der zu klassifizierenden Objekte – es gibt beispielsweise ein universelles Flächenbündel über dem Modulraum Riemannscher Flächen. Der grobe Modulraum ist die bestmögliche Approximation in den Fällen, wo der feine Modulraum nicht existiert.

Das vielleicht einfachste Beispiel einer universellen Familie zeigt das Bild unten: Das universelle Geradenbündel über der projektiven Gerade $\mathbf{R}P^1$ (die topologisch ein Kreis ist) trägt über jedem Punkt der projektiven Gerade die diesem Punkt entsprechende Gerade im $\mathbf{R}^2$. Topologisch ist der Totalraum dieses universellen Bündels ein Möbiusband.



Nun gab es den Modulraum Riemannscher Flächen natürlich schon vor Grothendieck und seine universelle Eigenschaft war schon Teichmüller bekannt. Zwar spielte diese in der weiteren Entwicklung der Teichmüller-Theorie keine wesentliche Rolle, sie scheint aber Grothendieck bei der Entwicklung des funktoriellen Zugangs zur algebraischen Geometrie, insbesondere eben des Konzepts des feinen Modulraums, stark beeinflusst zu haben. Das ist das Thema der – im Band VI des Handbuchs der Teichmüller-Theorie (in Vorbereitung) – erscheinenden Arbeit von A'Campo-Ji-Papadopoulos *On Grothendieck's construction of Teichmüller space*. Aus der Einleitung:

> In the course of his work on the subject, Grothendieck considered that classical algebraic geometry did not have enough tools for formulating and proving the existence of Teichmüller space as an universal object carrying a complex structure, and for giving an algebraic model for moduli spaces. In the introduction to the first lecture, he writes: In doing this, the necessity of reshaping the foundations of analytic geometry, inspired by the theory of schemes, will be manifest. In particular, the notion of schemes which he had newly introduced turned out to be useful in dealing with the problems of moduli of Riemann surfaces and in other moduli problems.

Der Artikel findet sich online unter https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01283659/document.

Seit März gibt es übrigens vor Grothendiecks einstigem Wohnhaus in der Berliner Brunnenstraße 165 einen Stolperstein, von der Klasse 9/3 des Heinrich-Hertz-Gymnasiums durch Kuchenverkauf finanziert. Und wahrscheinlich ist Grothendieck auch der erste Mathematiker, dessen Nachlass geschätzt wurde: Ein Gutachten der Bibliothèque nationale de France taxierte die im Besitz von Grothendiecks Erben befindlichen handschriftlichen Notizen auf einen Wert von 45 000 Euro.

Grundlagenkrise der Geometrie

Die Einleitung des Wikipedia-Artikels endet schließlich:

> Daneben spricht man auch in anderen Gebieten der Mathematik von Modulräumen mathematischer Objekte, ohne dass es für diesen Begriff eine einheitliche Definition gäbe. Beispielsweise ist in der symplektischen Geometrie der Modulraum der pseudoholomorphen Kurven von großer Bedeutung oder in der Teichmüller-Theorie der Modulraum hyperbolischer Metriken.

Die bei der Konstruktion von – in symplektischer Geometrie und verwandten Gebieten vorkommenden – Modulräumen entstehenden analytischen Probleme und die mit diesen verbundenen Kontroversen waren im Februar Thema im *Quanta Magazine*.

Arbeiten, in denen einfach „nur“ die grundlegenden Eigenschaften solcher Modulräume entwickelt werden, sind oft Hunderte Seiten lang, äußerst detailreich und schwer nachzuvollziehen. Oft gibt es verschiedene Konstruktionen eines Modulraums, und wer eine Arbeit bei einer Fachzeitschrift einreichen will, muss versuchen zu erraten, welchen der konkurrierenden Ansätze der Gutachter als vollständig bewiesen ansehen wird oder nicht.

Diese Problematik diskutierte Hartnett in seinem Artikel *A fight to fix Geometry's foundations* (tinyurl.com/y7cc6do5) am Beispiel des Modulraums pseudoholomorpher Kurven in einer symplektischen Mannigfaltigkeit und der darauf beruhenden Definition der Floer-Homologie. Eine spannende Lektüre, auch wenn die Fachleute sicher nicht mit allen Folgerungen einverstanden sein werden. Zum Beispiel wird der Gegensatz Analysis – Geometrie über- und die Rolle der Arbeiten von Andreas Floer unterbetont. Die Frage „Was ist der Modulraum?“ scheint auch in der Analysis nicht so leicht zu beantworten sein.

Dynamik auf Modulräumen

Wie kann man nun schließlich die Dynamik auf Modulräumen halbwegs anschaulich erklären oder zumindest einordnen? Die beste Quelle dafür ist wohl McMullens Laudatio zur Verleihung der Fields-Medaille 2014 (tinyurl.com/ya5vfa8o), aus der die folgenden Beispiele stammen.

Eine in den unterschiedlichsten Gebieten von Zahlentheorie bis Differentialgeometrie verwendete Entdeckung ist der Ende der 80er Jahre bewiesene Maßstarrheitssatz von Marina Ratner (die übrigens oft als potenzielle erste Kandidatin für den Abelpreis angesehen wurde und wie Mirzakhani im Juli 2017 verstorben ist).

Seinen Ursprung hat der Maßstarrheitssatz in der Beobachtung, dass die Orbits des horozyklischen Flusses gleichmäßig verteilt sind, während die Orbits des geodätischen Flusses recht wild aussehen können. Das Bild auf der folgenden Seite oben zeigt Geodäten auf einer hyperbolischen Fläche, die entsprechenden Orbits des geodätischen Flusses sind die hochgehobenen Kurven im Tangentialbündel.

Der Grund dafür ist letztlich, dass der horozyklische Fluss von unipotenten Matrizen erzeugt wird und der geodätische Fluss nicht. Ratners Satz über von unipotenten Elementen erzeugte Flüsse auf lokal-homogenen Räumen besagt im Wesentlichen, dass die Abschlüsse der Orbits jeweils wieder Orbits einer algebraischen Gruppe sind und dass die Orbits innerhalb ihres Abschlusses gleichverteilt sind.

Für den Teichmüller-Raum und die auf ihm wirkende Abbildungsklassengruppe – deren Herausteilen den Modulraum Riemannscher Flächen ergibt – sind geometrische Probleme oft schwieriger als für homogene Räume und die auf ihnen wirkenden Gruppen. Auch der Beweis von Ratners Theorem für Flüsse auf lokal-homogenen Räumen lässt sich nicht auf Flüsse auf dem Modulraum Riemannscher Flächen anwenden: Der Modulraum ist völlig inhomogen und unsymmetrisch. Die Preprints von Mirzakhani (mit Eskin und Mohammadi) zeigen aber, dass doch ein zu Ratners Theorem analoger Satz auch für die Wirkung von SL(2,R) auf dem Einheitssphärenbündel des Modulraums gilt. Obwohl Geodäten im Modulraum wild sein können, sind die Abschlüsse der komplexen Geodäten (das sind per Definition die Bilder holomorpher Isometrien von der hyperbolischen Ebene in den Modulraum) nicht fraktal, sondern stets algebraische Varietäten.

Ein anderes, älteres Resultat Mirzakhanis hat mit dem Primzahlsatz der hyperbolischen Geometrie zu tun. Dieser besagt, dass es auf einer geschlossenen hyperbolischen Fläche asymptotisch $\frac{e^L}{L}$ geschlossene Geodäten der Länge kleiner L gibt. (Seinen Namen verdankt er der Analogie zum Primzahlsatz, der asymptotisch $\frac{e^L}{L}$ Primzahlen kleiner e^L postuliert.) Mirzakhani hatte detaillierter untersucht, wie viele einfache, d. h. sich nicht selbst schneidende, geschlossene Geodäten der Länge kleiner L es gibt: Es sind asymptotisch CL^{6g-6} mit einer von der Fläche abhängenden Konstanten C. Bewiesen hat sie das mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den gesamten Modulraum und mit diesen konnte sie dann auch das Volumen des Modulraums bezüglich der Weil–Petersson-Metrik berechnen und beispielsweise einen konzeptuelleren Beweis zur ursprünglich von Kontsevich bewiesenen Witten-Vermutung geben.

Ein lustiges Nebenresultat betrifft geschlossene Kurven auf einer Brezelfläche. Diese können die Fläche in zwei Teile zerlegen (wie im Bild unten die Kurve in der Mitte) oder nicht (wie die beiden anderen eingezeichneten Kurven). Aus Mirzakhanis Berechnungen ergibt sich, dass eine zufällig gewählte Kurve auf der Brezelfläche diese mit Wahrscheinlichkeit $1/7$ in zwei Teile zerlegt.

Dr. Thilo Kuessner, Institut für Mathematik. Universität Augsburg, 86135 Augsburg. thilo.kuessner@math.uni-augsburg.de