Flache Flächen, unipotente Flüsse und eine kühne Vision

Das Werk von Maryam Mirzakhani und Marina Ratner

Ursula Hamenstädt

Dieser Beitrag ist ein Versuch, einige Aspekte der Arbeit von Marina Ratner und Maryam Mirzakhani, die im Juli dieses Jahres im Abstand von einer Woche verstarben, für Nicht-Experten zu beschreiben. Er ist auch eine Verneigung vor kühner Vision, tiefer Einsicht und Kraft zum Entwurf eines Bildes, in dem sich unterschiedlichste Teile zu einem harmonischen Ganzen zusammenfügen.

Dynamische Systeme

Zwei Teilgebiete der modernen Theorie dynamischer Systeme haben in den letzten 30 Jahren eine besonders stürmische Entwicklung erlebt, deren Ende noch nicht abzusehen ist: homogene Dynamik und Teichmüller-Dynamik. In beiden Gebieten hat jeweils eine Frau fundamentale richtungsweisende Beiträge geleistet.

Marina Ratner (30. 10. 1938–7. 7. 2017) hat durch den Beweis einer Vermutung von Raghunathan einen zentralen Baustein für die Theorie homogener Dynamik geliefert. Sie erhielt dafür unter anderem den Ostrowski-Preis (1993), war 1994 Plenarsprecherin beim ICM in Zürich und wurde 1993 in die National Academy of Science gewählt.

Maryam Mirzakhani (3. 5. 1977–14. 7. 2017) hat das Gebiet der Teichmüller-Dynamik mit völlig neuen und unerwarteten Struktureinsichten bereichert. Inbesondere ihr in Zusammenarbeit mit Alex Eskin erzielter „Ratnerscher Satz für den Modulraum abelscher Differentiale“ ist bahnbrechend und spektakulär, die Argumentation benutzt unerwartete Methoden. Sie wurde 2014 als erste Frau mit der Fields-Medaille ausgezeichnet und war seit 2016 Mitglied der National Academy of Science.

Flache Flächen

Ein kompaktes Polygon P in der komplexen Ebene können wir als Billiardtisch auffassen. In dem Tisch bewegt sich eine Punktmasse p entlang gerader Linien, bis sie auf ein Randsegment s des Polygons trifft. Die Punktmasse wird an s reflektiert gemäß der Regel, dass der Eintrittswinkel mit dem Reflektionswinkel übereinstimmt. Trifft die Masse auf eine Ecke des Polygons, ist ihre weitere Trajektorie nicht definiert.

Ein solches Billiard ist ein dynamisches System, dessen Phasenraum aus der Anfangsposition der Punktmasse sowie einer Anfangsrichtung besteht. Die Untersuchung solcher dynamischer Systeme hat eine lange Geschichte, bis heute sind aber auch sehr einfache Fragen noch ungeklärt.

Man kann das System auch beschreiben, indem man das Polygon an der Kollisionsseite reflektiert und die Punktmasse entlang ihrer geraden Linie in den reflektierten Tisch weiterlaufen lässt. Dieses Verfahren ermöglicht es, die Richtung als beschreibenden Parameter festzuhalten. Wenn nach endlich vielen solcher Reflektionen eine Seite erreicht wird, die parallel und von gleicher Länge zu einer Ausgangsseite ist, kann man diese Seiten verkleben und die Punktmasse in einer bereits vorhandenen Kopie des Tischs weiterverfolgen. Abbildung 1 illustriert dieses Vorgehen.

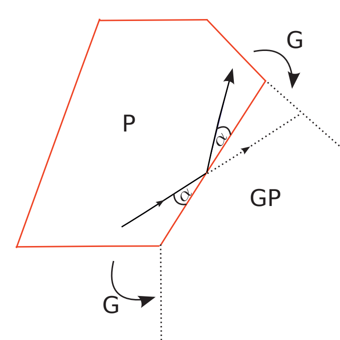

Abbildung 1

Falls es eine Paarung der Seiten des Polygons gibt, die einer Seite eine parallele Seite gleicher Länge zuordnet, erhält man durch Verklebung eine geschlossene Fläche Σ versehen mit einer euklidischen Metrik. Diese Metrik ist singulär in den Bildern der Ecken, und die Kegelwinkel sind von der Form $2k\pi$ für $k \geq 1$. Für eine fest gegebene Richtung definiert nun das Billiardsystem einen Fluss auf Σ, der ein Modell für das ursprüngliche Billiard ist (siehe Abbildung 2).

Das Ziel ist nun, alle Billiards in allen derart gewonnenen flachen Flächen simultan zu studieren und ihre statistischen und algebraischen Eigenschaften zu verstehen. Dies ist vor allem interessant, weil eine auf solche Weise konstruierte flache Fläche mit einer ausgezeichneten Richtung eine komplexe Struktur auf der zugrundeliegenden topologischen Fläche zusammen mit einer holomorphen Eins-Form für diese Struktur bestimmt. Umgekehrt kann jedes solche Paar als flache Fläche mit ausgezeichneter Richtung interpretiert werden. Das Studium solcher Billiards ist also das

DOI 10.1515/dmvm-2017-0046

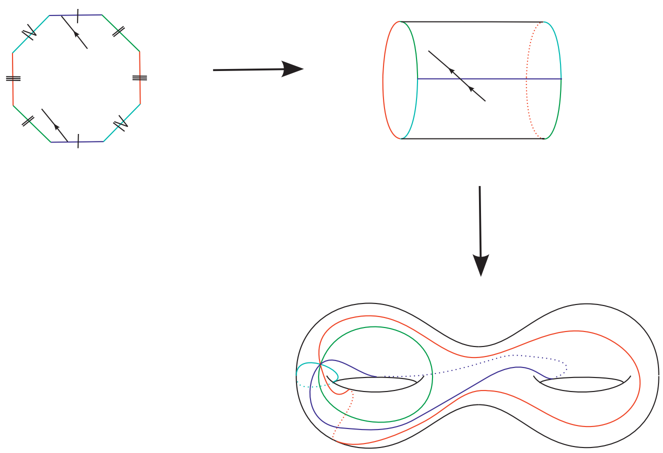

Abbildung 2. Kegelwinkel 4π

Studium des Modulraums holomorpher Eins-Formen auf kompakten Riemannschen Flächen – man spricht auch von dem Modulraum abelscher Differentiale.

Es stellt sich zunächst die Frage, wann man zwei solche flachen Flächen als äquivalent ansehen soll. Die einfache Antwort lautet: wenn man sie mit endlich vielen Schneide- und Klebeoperationen ineinander überführen kann, wie in Abbildung 3 illustriert.

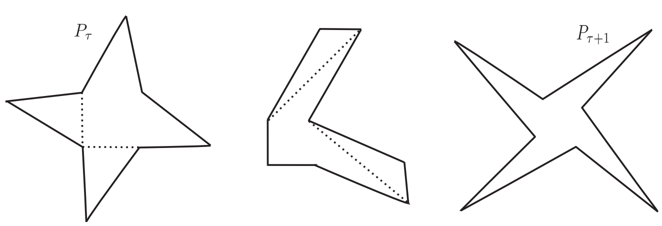

Abbildung 3

Auf dem Modulraum abelscher Differentiale gibt es eine natürliche Wirkung der Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$. Diese Gruppe operiert als lineare Transformationsgruppe auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, was bedeutet, dass das Bild eines Polygons P mit einer Paarung paralleler Seiten gleicher Länge ein Polygon mit denselben Eigenschaften ist. Die Aktion der Gruppe der Diagonalmatrizen

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}$$

definiert also einen Fluss auf diesem Modulraum, den sogenannten *Teichmüllerfluss*. Die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit eins auf der Diagonalen induziert den *Horozykelfluss* (siehe Abbildung 4).

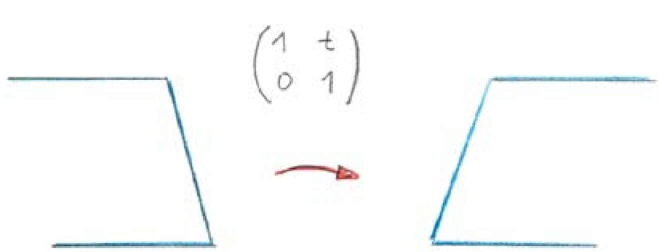

Abbildung 4

Wenn wir noch einmal an die Beschreibung dieses Systems als Modulraum holomorpher Eins-Formen denken, dann folgt daraus unmittelbar, dass dieser Modulraum in sogenannte *Strata* zerfällt. Ein Stratum ist dadurch beschrieben, dass man die Zahl der singulären Punkte (Nullstellen des Differentials) und ihre Vielfachheit (Kegelwinkel) fixiert. Man fixiert außerdem noch die Oberfläche (Volumen) der flachen Fläche, was einer Normalisierung des abelschen Differentials entspricht. Diese Strata sind invariant unter der Aktion der Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$. Man erhält dynamische Systeme, die separat studiert werden können. Zentrale Fragestellung in der Arbeit von Maryam Mirzakhani ist das Verständnis der Struktur dieser dynamischen Systeme.

Hyperbolische Dynamik

Sei nun $\Gamma < SL(2,\mathbb{R})$ ein – der Einfachheit halber torsionsfreies – Gitter. Die Linksaktion der Diagonalgruppe $A \subset SL(2,\mathbb{R})$ auf dem Rechtsquotienten $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ ist der geodätische Fluss auf dem Einheitstangentialbündel der hyperbolischen Fläche $S = SO(2)\backslash SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$. Periodische Orbits entsprechen Konjugationsklassen sogenannter loxodromischer Elemente in Γ. Sie können der Länge nach geordnet werden. Die Zahl der Orbits der Länge $\leq R$ ist mit $R \to \infty$ asymptotisch zu e^R/R, wie Margulis Ende der 1960er Jahre bewies. Diese Aussage ist ein Zeugnis der hyperbolischen Dynamik des geodätischen Flusses auf kompakten hyperbolischen Flächen.

In ihrer ersten Zusammenarbeit mit Alex Eskin [2] sowie gemeinsam mit Eskin und Rafi [5] zeigt Maryam Mirzakhani, dass die Zahl periodischer Orbits des Teichmüllerflusses auf einem Stratum von abelschen Differentialen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ mit fester Oberfläche asymptotisch zu e^{hR}/hR ist, wobei $h = 2g - 1 + k$ und k die Zahl der singulären Punkte eines abelschen Differentials in dem Stratum ist. Der Teichmüllerfluss hat also eine hyperbolische Dynamik. Was dies konkret bedeutet, hat sie in gemeinsamer Arbeit mit Atreya, Bufetov und Eskin [1] geklärt.

Unipotente Dynamik

Die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ ist das einfachste Beispiel einer einfachen Liegruppe. Ein Element in der Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit eins auf der Diagonale wird *unipotent* genannt. Der Horozykelfluss auf dem Einheitstangentialbündel $SO(2)\backslash SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ einer hyperbolischen Fläche ist der von der Wirkung dieser Gruppe erzeugte Fluss. Seine Orbits zeigen ein polynomiales Spreizungsverhalten, das ist eine von einem hyperbolischen System substanziell abweichende Eigenschaft. Diese Tatsache führt zu Starrheit: Jedes invariante Wahrscheinlichkeitsmaß für den Horozykelfluss auf $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ ist entweder das normalisierte Haar-Maß, oder sein Träger ist ein periodischer Orbit. Für cokompakte Gitter wurde diese Aussage zuerst von Furstenberg bewiesen.

Diese Starrheit von Maßen und ihrer Träger wurde von Marina Ratner weitreichend verallgemeinert. Die folgende Aussage ist ein Spezialfall ihres tiefen Ergebnisses.

Man betrachte eine einfache Liegruppe G vom nichtkompakten Typ und ein Gitter $\Gamma < G$. Sei außerdem $H < G$ eine von unipotenten Elementen erzeugte abgeschlossene Untergruppe, die durch Linksmultiplikation auf G/Γ wirkt. Dann gibt es zu jedem H-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf G/Γ eine abgeschlossene Untergruppe $L < G$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\Gamma \cap L$ ist ein Gitter in L.
2. μ ist die Projektion des Haar-Maßes auf $L/\Gamma \cap L$.

Außerdem ist der Abschluss jedes H-orbits auf G/Γ der abgeschlossene Orbit einer abgeschlossenen Untergruppe $L < G$, die Γ in einem Gitter schneidet.

Man kann also nicht nur H-invariante Maße vollständig klassifizieren, sondern auch Abschlüsse von Orbits. Diese Abschlüsse sind alle algebraisch, das heißt sie können durch Lösungen von algebraischen Gleichungen beschrieben werden.

Der Satz von Ratner für den Modulraum abelscher Differentiale

Wie oben erläutert operiert die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ auf Strata von abelschen Differentialen. Können wir einen Struktursatz wie den Satz von Ratner auch in diesem Kontext erwarten, obwohl die Dimension der Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ im Vergleich zu der Dimension der Strata klein ist? Was bedeutet ein „algebraischer“ Orbit-Abschluss?

Strata sind komplexe Unter-Orbifaltigkeiten des Modulraums der holomorphen Eins-Formen auf Riemannschen Flächen. Weil die Zahl der Nullstellen und ihre Ordnungen festgehalten werden, kann man eine solche Eins-Form ω als Kohomologieklasse in $H^1(\Sigma, P; \mathbb{C})$ interpretieren, wobei P die Menge der Nullstellen ist. Integriert man ω über eine lokal gewählte Basis von $H_1(\Sigma, P; \mathbb{Z})$, dann beschreiben die Auswertungen dieser Integrale sogenannte Periodenkoordinaten für das Stratum. Diese Periodenkoordinaten versehen das Stratum mit einer affinen Struktur. Mithilfe dieser Koordinaten erhält man auch ein Lebesgue-Maß, das endlich und invariant unter der $SL(2,\mathbb{R})$-Aktion ist.

Das Analog einer algebraischen invarianten Teilmenge in diesem Kontext kann man wie folgt definieren: Eine solche Teilmenge sei invariant unter der $SL(2,\mathbb{R})$-Aktion, und in Periodenkoordinaten sei sie die Lösung eines Systems linearer Gleichungen. Zumindest lokal erhält man aus der affinen Struktur wieder ein invariantes Lebesgue-Maß. Wenn dieses dann endlich ist, spricht man von einer affinen invarianten Mannigfaltigkeit.

Der erstaunliche Struktursatz, den Maryam Mirzakhani zusammen mit Alex Eskin hergeleitet hat [3], besagt in einer etwas abgeschwächten Form: Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Stratum, welches invariant unter der Aktion der – von Unipotenten erzeugten – Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ ist. Dann ist μ das Lebesgue-Maß einer affinen invarianten Mannigfaltigkeit. Zusammen mit Eskin und Mohammadi [4] zeigt sie außerdem, dass der Abschluss jedes $SL(2,\mathbb{R})$-Orbits in einem Stratum eine solche affine invariante Mannigfaltigkeit ist.

Schlussbemerkung

Die oben erläuterten Ergebnisse beschreiben nur einen Ausschnitt des Werks von Maryam Mirzakhani und Marina Ratner, wobei ich mich auf diejenigen Aspekte beschränkt habe, in denen sich die – thematisch eigentlich grundverschiedenen – Arbeiten dieser beiden Wissenschaftlerinnen berühren. Ihr Œuvre hat viele andere Facetten, die hier nicht beleuchtet werden können. Die volle Strahlkraft dieser Ergebnisse wird sich wohl erst in der Zukunft entfalten.

Marina Ratner und Maryam Mirzakhani haben mit Kreativität, Beharrlichkeit und Mut Wissenschaftsgeschichte geschrieben. Ihr Andenken sollte für junge Frauen, die sich für Mathematik interessieren, Inspiration und Vorbild sein.

Literatur

[1] J. Athreya, A. Bufetov, A. Eskin, M. Mirzakhani, Lattice point asymptotics and volume growth on Teichmüller space, *Duke Math. J.* 161 (2012), 1055–1111.

[2] A. Eskin, M. Mirzakhani, Counting closed geodesics in moduli space, *J. Mod. Dyn.* 5 (2011), 71–105.

[3] A. Eskin, M. Mirzakhani, Invariant and stationary measures for the $SL(2,\mathbb{R})$-action on moduli space, arXiv:1302.3320.

[4] A. Eskin, M. Mirkzakhani, A. Mohammadi, Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL(2,\mathbb{R})$-action on moduli space, *Ann. of Math.* 182 (2015), 673–721.

[5] A. Eskin, M. Mirzakhani, K. Rafi, Counting closed geodesics in strata, arXiv:1206.5574.

[6] M. Ratner, On Raghunathan's measure conjecture, *Ann. of Math.* 134 (1991), 545–607.

[7] M. Ratner, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, *Duke Math. J.* 63 (1991), 235–280.

Prof. Dr. Ursula Hamenstädt, Mathematisches Institut, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn. ursula@math.uni-bonn.de

(Abbildungen 1–3: Heike Bacher)

Nach der Promotion 1986 in Bonn war Ursula Hamenstädt von 1986–1988 Miller Fellow *in Berkeley und hat dort Marina Ratner und ihre Arbeit kennengelernt. Seit 1990 ist sie Professorin in Bonn. Maryam Mirzakhani hat sie 2002 kennengelernt. Ursula Hamenstädts aktuelle Forschungsinteressen sind Dynamische Systeme, insbesondere Teichmüller-Dynamik, sowie Differentialgeometrie und geometrische Gruppentheorie.*