Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

*Im Studium haben wir hauptsächlich mit vier Zahlen gearbeitet:
0, 1, π , e. Eine 7 begegnet einem da selten.*

Von wegen Kopfrechnen,
Badische Neueste Nachrichten,
3. September 2017

Siebenen in der Mathematik

Siebenen in der Mathematik, als erstes fallen einem da wohl die berühmten 28 unterschiedlichen Differentialstrukturen auf der 7-dimensionalen Sphäre ein, mit denen John Milnor 1956 zur Überraschung der Fachwelt bewies, dass es auf ein und derselben topologischen Mannigfaltigkeit sehr unterschiedliche Arten der Differentialrechnung geben kann.

Gut, man könnte sagen, die besondere Rolle der 7 ist da nur ein historischer Zufall. Schließlich gibt es exotische Sphären auch in den meisten anderen Dimensionen.

Eine Besonderheit, die die 7-dimensionale Sphäre nur noch mit denen in Dimension $n = 0, 1$ und 3 gemeinsam hat, ist aber die Existenz von n linear unabhängigen Vektorfeldern und damit zusammenhängend die Existenz einer Lie-Gruppen-Struktur: nur auf Sphären dieser Dimensionen lässt sich eine stetige Multiplikation definieren. Und das ist wiederum der Grund, warum der $\mathbb{R}^n$ nur für $n = 1, 2, 4, 8$ eine reelle Divisionsalgebra sein kann, warum es also nach reellen Zahlen, komplexen Zahlen,

Quaternionen und Oktaven nicht mehr weitergeht. Bemerkenswerterweise gibt es für diesen rein algebraischen Fakt bis heute nur einen topologischen Beweis. Eine allgemeinverständliche Darstellung findet sich in Kapitel 11 des 1992 im Springer-Verlag erschienen Buches *Zahlen*.

Geht man historisch nochmal zwei Jahrhunderte zurück, dann standen die sieben Brücken von Königsberg 1736 am Anfang der Graphentheorie. Und die Zahl 7 ist hier wirklich von Bedeutung: nachdem im Krieg Brücken zerstört und später anders wieder aufgebaut wurden, hat das heutige Kaliningrader 5-Brücken-Problem eine Lösung in Form eines Eulerwegs: jede Brücke wird genau einmal überquert, allerdings stimmen Start- und Endpunkt nicht überein. Einen Eulerkreis gibt es immer noch nicht.

Sieben ist auch die Antwort auf manche Fragen der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie, etwa der nach dem wahrscheinlichsten Ereignis beim Wurf mit zwei Würfeln. In der projektiven Geometrie hat die Fano-Ebene P^2F_2 als kleinste projektive Ebene sieben Punkte und sieben Geraden. Und $n = 7$ ist die kleinste Generatorzahl, hat also

Der Pregel und die sieben Königsberger Pregelbrücken im „Gedenkblatt zur sechshundertjährigen Jubelfeier der Königlichen Haupt- und Residenz-Stadt Königsberg in Preußen“ (um 1813, nach einem Stich von Joachim Bering aus dem Jahr 1613)

Foto: Christoph Fyrich

Die „Sieben Säulen“ alias „Römische Ruine“ im Dessauer Georgengarten

ein interessanteres Muster in der Dezimaldarstellung der Vielfachen von $\frac{1}{n}$: Deren sich periodisch wiederholende Ziffernfolgen sind alle aus den sechs Ziffern 1-4-2-8-5-7 zusammengesetzt. Was einem zugegebenermaßen im Studium tatsächlich nicht begegnet, ebenso wenig wie die Teilbarkeitsregeln der 7 oder die diversen mit der 7 verbundenen Kopfrechentricks.

Die Weisheit hat ihr Haus gebaut und ihre sieben Säulen behauen

Einiges Aufsehen erregte vor sieben Jahren eine Studie der britischen Regierung, derzufolge 49,1 Prozent der erwachsenen Briten geringere Rechenfertigkeiten haben als sie von 9- bis 11-jährigen erwartet werden, während das beim Lesen und Schreiben nur auf 14,9 Prozent zuträfe. (Erklärt das das Abstimmungsergebnis beim Brexit?)

Muss man im Zeitalter der Suchmaschinen zwar noch selber lesen, aber nicht mehr selber rechnen können? Das suggeriert ein Artikel „Digitalisierung an Schulen“ der *Süddeutschen Zeitung* vom 16. Juni:

Sollen [die Schulen] weiterhin lehren, wer Pythagoras war und wie sich dessen berühmter Satz mathematisch beweisen lässt? Oder ist es, wie manche

Google-Manager empfehlen, sinnvoller, vor allem Technologieunterricht zu erteilen? Schließlich lässt sich heute mit wenigen Mausklicks klären, wie lang die Diagonale eines Rechtecks ist.

Ich habe mal nachgeschaut, was Google zum Suchbegriff „Diagonale im Rechteck berechnen“ so liefert. Der erste Treffer ist zwar noch ein herkömmlicher Lexikoneintrag, die nächsten vier Treffer dann aber nur noch Kalkulatoren, bei denen nur die Seitenlängen einzugeben sind und man prompt das Ergebnis bekommt. Man muss also tatsächlich nur noch lesen und nicht mehr rechnen können.

Entsprechend bescheiden äußerte sich dann auch Finanzminister Schäuble im Oktober zur *Frankfurter Allgemeinen Sonntagszeitung* über die erforderlichen Qualifikationen seines Nachfolgers.

Es hilft, wenn man Zahlen grob überschlagen kann: Geht das überhaupt auf, was da jetzt vorgeschlagen wird?

Passend dazu kramten YouTuber dann eine fünf Jahre alte Rede des damals gerade als FDP-Kandidaten für das Amt gehandelten Politikers mit der erstaunlichen Behauptung „Eins und eins ist eins und nicht drei“ heraus. (https://www.youtube.com/watch?v=Aom-MfqZU_Q)

Sieben Todsünden des Rechnens

C. F. Gauss, der bekanntlich den Primzahlsatz auf Basis exzessiv im Kopf durchgeführter Rechnungen vermutete, wird das Zitat zugeschrieben, der Mangel an mathematischer Bildung gäbe sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen. (Laut Wikipedia übrigens eine fragwürdige Zuschreibung, möglicherweise stammt das Zitat vom Physiker W. Weber.)

In diesem Sinne sind die folgenden sieben dem „Hohlspiegel“ des *SPIEGEL* entnommenen Rechensünden dann wohl ein Ausweis mathematischer Bildung.

Da scheitert die *Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung* in einem Artikel über die Fantasyserie *Game of Thrones* schon an den Grundrechenarten:

Die kommenden fünfzehn Episoden – sieben in Staffel sieben, sechs in Staffel acht – werden unter diese Spekulation einen Schlusstrich setzen.

Und bei ndr.de hapert es sogar an einfachen Größenvergleichen:

Neun der acht Angeklagten einer mutmaßlichen Geldautomaten-Bande haben ein Geständnis abgelegt.

Immerhin erst beim Stoff der Sekundarschule strauchelt die dpa:

Vor allem Wirtschaftswissenschaftler werden derzeit gesucht. Erstmals seit 2011 gehören sie zu den am häufigsten gesuchten Fachkräften. Fast jedes fünfte Stellenangebot (4,5 Prozent) richtet sich an sie.

Interessant ist auch diese Prozentrechnung der *Frankfurter Rundschau*:

Können also mehr als 122 Prozent der Deutschen keine Prozentrechnung? Oder nur:

Ich dachte, Du regelst das Finanzielle.
Häh, was? Ich verlass mich doch immer auf Dich!

Und bei dieser Überschrift aus der Hildesheimer Allgemeinen Zeitung

frage ich mich, ob das nur ein Zahlendreher ist oder ob redegewandte Banker es inzwischen draufhaben, mitstenografierenden Journalisten eine Halbierung der Dividende als Verdoppelung zu verkaufen?

Warum kann der *nesciens se numerare animus* nur bis fünf und nicht bis sieben zählen?

fragte schon 1822 die Neue Musikalische Zeitung – und gab die Antwort:

... in der Harmonik machte niemand Glück damit.

Kein Buch mit sieben Siegeln

Erstmals auf Deutsch ausgestrahlt wurde am 21. Oktober bei ARTE die BBC-Dokumentation „Climate change by numbers“, die den Klimawandel statt von Klimaforschern von Mathematikern erklären lässt und dabei auf drei Zahlen fokussiert:

0,85 Grad 95 Prozent 10^{12} Tonnen

Also den Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur gegenüber 1880, die im IPCC-Report angegebene Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die Hälfte der Erderwärmung vom Menschen verursacht sei, und die Menge Kohlenstoff, die wir noch verbrennen können, bevor es zu ernsthaften Klimaveränderungen kommt.

Wobei es in der einstündigen Sendung dann vor allem darum ging, wie diese Zahlen gewonnen werden und was sie „wirklich“ bedeuten. Also beispielsweise, warum man (erst) seit 1880 zuverlässige Temperaturmessungen hat und wie man Mathematik nutzt, um fehlende Daten zu rekonstruieren. „How do you know the temperature of the atmosphere without measuring it?“

Foto: Christoph Eyrich

Ist Sieben normal?

Es ist ja eigentlich schon ein alter Hut, die Geschichte vom Kulturverteidiger, der auf die Fangfrage nach arabischen Ziffern lieber wieder mit den kultureigenen römischen Ziffern rechnen möchte. Eine neue Version davon gab es jetzt noch einmal Ende August auf einer Wahlkampfveranstaltung zur Bürgermeisterwahl im saarländischen Völklingen. Der Vertreter der Spaßpartei „Die Partei“ wies dort den örtlichen NPD-Kandidaten darauf hin, dass in Völklingen viele Hausnummern mit arabischen Zahlen gekennzeichnet seien und fragte, wie er gegen diese schleichende Überfremdung vorgehen wolle. Der reagierte prompt:

Da warten Sie ab, Herr Faust, wenn ich Oberbürgermeister bin, dann werde ich das ändern, da werden dann mal normale Zahlen drankommen.

Normale Zahlen sind bekanntlich reelle Zahlen, unter deren Nachkommaziffern für jedes $k \geq 1$ alle möglichen

k -stelligen Ziffernblöcke mit gleichen asymptotischen relativen Häufigkeiten auftreten (de.wikipedia.org/wiki/NormaleZahl).

Der Wunsch des NPD-Kandidaten sollte sich erfüllen lassen: Seit Émile Borel wissen wir, dass fast alle Zahlen normal sind – die nicht normalen Zahlen bilden eine Menge vom Lebesgue-Maß Null.

Ob man dann auch π als Hausnummer verwenden dürfte ... das aber ist immer noch ein ungelöstes Problem der Zahlentheorie.

Bekannte normale Zahlen, die die NPD also als Hausnummern genehmigen würde, sind aber jedenfalls

0,2357111317192329313741434753...

oder

0123456789101112131415...

Letztere entsteht durch Hintereinanderschreiben der arabischen Ziffernfolgen aller natürlichen Zahlen.

Und sieben ist übrigens nicht normal.

Dr. Thilo Kuessner,
Miltenbergstraße 8, 86199 Augsburg
mathlog1@gmail.com