Brüche und Rechenoperationen verstehen oder Bruchrechnen können?

Sebastian Wartha

„Johannes geht in die Pizzeria und kauft sich $\frac{3}{7}$ von $\frac{3}{4}$ Pizza.
Er bezahlt $2\frac{3}{5}$ Euro. Wie viel kostet eine ganze Pizza?“

Warum?

Diese Frage ist nicht nur in Bezug auf diese pseudo-realistische Textaufgabe berechtigt.

- Warum sollten Aufgaben dieser Art gelöst werden?
- Warum gehen manche Lehrbücher und -personen davon aus, dass so etwas alltagsnah sein könnte?
- Warum sollte davon ausgegangen werden, dass derart unrealistische Textaufgaben für ein „vertieftes Verständnis“ sorgen – was auch immer das sein mag?
- Warum wird bei Brüchen immer die Pizza bemüht und kein tragfähiges Modell zur Veranschaulichung der Zahlen und der Operationen mit ihnen herangezogen?
- Warum sollten Lernende zu Beginn der Sekundarstufe wochenlang Rechenterme der Sorte $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4}$ berechnen?
- Warum ist es wichtig, zwei Zahlen in Bruchdarstellung multiplizieren zu können?
- Warum sollten monatelang verschiedene Algorithmen zur Lösung von Rechenausdrücken mit Zahlen in Bruch- und Dezimalschreibweise gelernt, geübt und angewendet werden – wenn doch kurze Zeit später diese lästige Aufgabe ein Taschenrechner übernimmt?

Einigen der Fragen soll in diesem Beitrag nachgegangen werden. Für mathematisch denkende Menschen ist die Frage nach dem *warum* der Grundgedanke mathematischen Arbeitens. Beispielsweise stellt sich schon in Anfängervorlesungen nicht die Frage, *ob* es unendlich viele Primzahlen gibt, sondern *warum*. Salopp formuliert könnte festgehalten werden: Mathematik ist die Lust am Warum.

Daher stellt sich die Frage *warum?* nicht nur in Bezug auf die Daseinsberechtigung der Bruchrechnung im Mathematikunterricht. Der Impuls *warum?* ist immer ein Anlass, im Mathematikunterricht nicht nur zu rechnen und unverstandene Algorithmen nachzuahmen, sondern mathematische Begründungen und Argumentationen in den Blick zu nehmen. Bei folgenden Fragen steht nicht ein *ob*, sondern ein *warum* im Vordergrund:

- Warum werden Brüche dividiert, indem mit dem Kehrbuch multipliziert wird?
- Warum wird vor der Subtraktion von Brüchen ein gemeinsamer Nenner benötigt?

- Warum werden die Brüche $\frac{3}{7}$ und $\frac{3}{4}$ in der obigen Textaufgabe multipliziert?
- Warum ist das Ergebnis des Terms $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ größer als $\frac{2}{3}$, obwohl doch dividiert wird?
- Warum ist $\frac{5}{12}$ kleiner als $\frac{2}{3}$?

Nebenbei bemerkt ist die kritische Diskussion dieser Fragen auch ein Stück weit Erziehung zur Mündigkeit in einer kritischen, pluralistischen Gesellschaft: Sollen Lernende dahingehend erzogen werden, unreflektiert nachzuahmen, was ihnen eine Lehrkraft oder ein Schulbuch vorgibt („Regel 1, Regel 2, ...“) oder sollte nicht auch das Fach Mathematik einen Beitrag leisten, Sachverhalte zu hinterfragen, Begründen und Argumentieren (Beweisen) zu lernen?

Das Fach Mathematik kann jedenfalls einen großen Beitrag leisten, eine Haltung bei Lernenden aufzubauen, Inhalte zu hinterfragen, diese zu begründen und nicht blind Vorgaben (auch bzw. gerade wenn sie richtig sind) unreflektiert nachzumachen. In den Curricula sind die Forderungen nach „mehr Mathematik und weniger Rechnen“ explizit verankert. „Prozessbezogene Kompetenzen“ werden von den Bildungsstandards (Deutschland, Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik 2004) und den daraus abgeleiteten Lehr- und Bildungsstandards formuliert. Für diesen Beitrag stehen zwei prozessbezogene Kompetenzen im Fokus:

- *Argumentieren:* Antworten und Begründungen auf das „warum“ zu geben.
- *Darstellen:* Um mathematisch zu argumentieren, können Inhalte dargestellt werden. Diese Darstellungen sind nicht nur auf symbolischer, sondern auch auf bildlicher, bisweilen auch auf handelnder Darstellungsebene oder in realistischen bzw. realitätsnahen Kontexten.

Die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsebenen und dem zu Grunde liegenden mathematischen Inhalt wird durch mathematische Grundvorstellungen näher beschrieben.

Grundvorstellungen

Mathematische Grundvorstellungen (Vom Hofe 1995) sind ein theoretisches Konstrukt, mit dem sowohl von einem

(a) Darstellungsebenen (Schulz und Wartha 10.1.2018)

(b) Grundvorstellungen (Wartha und Schulz 2012)

Abbildung 1

normativen („von der Mathematik aus betrachteten“) als auch von einem deskriptiven („vom Denken des Kindes aus betrachteten“) Standpunkt das Argumentieren und Darstellen mathematischer Inhalte beschrieben werden kann (Vom Hofe und Blum 2016).

Grundvorstellungen ermöglichen das Darstellen auf und das Übersetzen eines mathematischen Inhalts zwischen verschiedenen Darstellungsebenen. Häufig verwendete Darstellungsebenen bis einschließlich Jahrgangsstufe 6 sind:

	Beispiel 1	Beispiel 2
Symbolisch geschrieben	$7 - 3$	$\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$
Symbolisch gesprochen	Sieben minus drei	Ein halb geteilt durch drei viertel
Ikonisch (bildlich)		
Enaktiv (handelnd)	Von 7 Äpfeln werden 3 weggenommen. Wie viele bleiben liegen?	Die Portionsgröße ist $\frac{3}{4}$ Liter. Es gibt $\frac{1}{2}$ Liter Wein. Wie viele Portionen gibt das?
Realistischer Kontext (Textaufgabe)	Carl läuft sieben Kilometer. Er läuft drei Kilometer mehr als Friedrich. Wie weit ist Friedrich gelaufen?	In jede Flasche Wein passen $\frac{3}{4}$ Liter. Johannes hat einen halben Liter. Wie voll wird die Flasche?

Die Bearbeitung des Terms $7 - 3$ ist für die meisten Menschen unabhängig von der Darstellungsebene möglich. Wird dem Leser die Aufgabe als Textaufgabe oder als Bilder-geschichte gezeigt, wird dennoch zur Lösung des Sachverhaltes eine symbolische Darstellung verwendet werden: Es wird weder das Bild benötigt, noch ist ein Wettlauf durchzuführen, um die Aufgabe zu bearbeiten. Die Übersetzungen

zwischen den Darstellungsebenen ermöglichen Grundvorstellungen zu Zahlen (hier stehen die Zahlen für Mengenangaben bzw. als Maßzahlen für Längen) und für Operationen (das Minuszeichen steht entweder für Wegnehmen oder für den Rest beim Vergleichen) (Wessel 2015; Selter et al. 2012).

Ist die Bearbeitung des Terms $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ auch unabhängig von der Darstellungsebene möglich? Wie leicht fällt es, eine passende „realitätsnahe“ Situation hierzu zu konstruieren? An welchem Modell könnten passende Handlungen durchgeführt oder Bilder hergestellt werden? Wenn die Grundvorstellung zur Division als Ausmessen aktiviert wird, ist das problemlos möglich. Ein halber Liter Rotwein steht zur Verfügung. Eine Portion ist $\frac{3}{4}$ Liter. Wie viele Portionen gibt es? In der Vorstellung kann ein Modell aktiviert werden, bei dem sich ein halber Liter Rotwein in einer Flasche mit $\frac{3}{4}$ Liter Fassungsvermögen befindet: Sie ist zu $\frac{2}{3}$ voll (Padberg und Wartha 2017).

Auch hier ist die Frage angebracht: Warum sollte es wichtig sein, den Rechenausdruck übersetzen zu können? Genügt es nicht, wenn Lernende einen Algorithmus lernen, mit dem sie Terme dieser Art berechnen können?

Zunächst genügt das Nachmachen eines Algorithmus nicht aus ethischen und mathematischen Gründen. Wer keine Grundvorstellung aktivieren kann, ist gezwungen, sich an diese Algorithmen und Regeln zu erinnern und diese unhinterfragt nachzuahmen. Diese können nicht begründet und auf Kontexte bzw. Modelle bezogen werden. Die Forschung zeigt, dass sie zudem leicht vergessen, verwechselt oder übergeneralisiert werden, wenn sie nicht „verstanden“ sind (Wartha 2007; Mack 1990). Übergeneralisiert bedeutet, dass sie in Kontexten verwendet werden, in denen sie keine Gültigkeit haben. Beispielsweise die fehlerhafte Addition zweier Brüche über die Strategie Zähler + Zähler und Nenner + Nenner kann mit einer Übergeneralisierung der Multiplikationsregel erklärt werden (Post 1981).

Darüber hinaus hat der Aufbau von Grundvorstellungen eine sehr praktische Bedeutung: ohne Grundvorstellungen zu Operationen kann nicht entschieden werden, wie

Aufgabe A:
Färbe erst $\frac{1}{4}$ des Kreises und dann $\frac{1}{6}$ des Kreises.

Welchen Anteil hast du insgesamt gefärbt?

Aufgabe B:
Berechne $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$

(a) Aufgabenpaar nach (Hasemann 1986)

Abbildung 2

Situationen und Rechenzeichen zusammenhängen. Ohne Grundvorstellungen zu Zahlen können die Zahlen nicht interpretiert, bewertet oder in Beziehung gesetzt werden: Ist das Ergebnis der Aufgabe realistisch oder nicht, ist es groß oder klein, ...

Grund- und Fehlvorstellungen steuern Übersetzungsprozesse

Was sich Lernende unter den Rechenoperationen vorstellen, wird seit geraumer Zeit von der mathematikdidaktischen Forschung empirisch erhoben. Bereits in den 1980er Jahren hat Klaus Hasemann ein viel zitiertes Aufgabenpaar zur Bruchaddition eingesetzt, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei der Bearbeitung in Abhängigkeit von der Darstellungsebene zu untersuchen. Bei beiden Aufgaben sollen die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ addiert werden, einmal auf symbolischer Ebene als Term, einmal auf bildlicher Ebene durch Färben eines Kreises, bei dem die gemeinsame Unterteilung in Zwölftel bereits vorgegeben ist.

Das Aufgabenpaar wurde im Rahmen des DFG-Projekts PALMA [Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik] (Pekrun et al. 2006) einer repräsentativen Stichprobe von Lernenden am Ende der 6. Jahrgangsstufe gestellt. Obwohl bei der Addition auf ikonischer Ebene kei-

(b) Lösungshäufigkeiten (nach Wartha, 2007)

ne Bruchrechnung benötigt wird, sondern „nur“ die Zahlen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ dargestellt und der gefärbte Gesamtanteil in die Symbolschreibweise $\frac{5}{12}$ zurückübersetzt werden muss, ist die Lösungshäufigkeit fast halb so hoch wie bei der Berechnung des symbolischen Ausdrucks.

Das bedeutet: Zahlreiche Lernende rechnen mit Zahlen, zu denen sie keine Grundvorstellungen aktivieren. Noch deutlicher fällt ein Vergleich der Lösungen bei beiden Aufgaben aus: Nur 25 % aller Befragten haben bei beiden Aufgaben die gleiche Lösung – ob der Zusammenhang erkannt oder gar genutzt wurde, sei dahingestellt. Im Klartext: Für 3 von 4 Sechstklässlern haben diese Aufgaben nichts miteinander zu tun, denn die Bearbeitungen weichen voneinander ab, wenn sie auf unterschiedlichen Darstellungsebenen gestellt werden. Mit anderen Worten: Diese Lernenden aktivieren keine Grundvorstellung zu Addition.

Grundvorstellungen werden nicht nur bei strukturgleichen Aufgabenpaaren auf verschiedenen Darstellungsebenen untersucht, sondern auch, indem Text- oder Sachsituationen mit Hilfe mathematischer Symbolik bearbeitet oder zu Rechenausdrücken passende Sachsituationen formuliert werden sollen. Prediger (2011) führte umfangreiche Untersuchungen zum Operationsverständnis von Brüchen durch. In einer groß angelegten Studie wurden 830 Lernende der 7. und 9. Jahrgangsstufe unter anderem aufgefordert, je eine passende Sachsituation zum Rechenausdruck $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ und

Herr Brinkmeyer hat bei einer Fernsehlotterie gewonnen. Er möchte ein Sechstel seines Gewinns einem Kinderheim spenden. Sein Gewinn beträgt 2400 €. Wie viel Geld spendet er. Schreibe auf, wie Du gerechnet hast.

(a) Aufgabe „Brinkmeier“ (Wartha, 2007)

Abbildung 3

(b) Häufigste Fehler (Anteile an den falschen Lösungen)

Max läuft heute 8,25 km.
Das sind 0,8 km weniger als gestern.
Wie weit ist er gestern gelaufen?

Mit welcher Rechnung bekommst Du das Ergebnis?

- $8,25 + 0,8$
- $8,25 - 0,8$
- $8,25 \cdot 0,8$
- $8,25 : 0,8$
- Mit einer anderen Rechnung, nämlich: _____

(a) Aufgabe Dauerlauf (Wartha, im Druck)

Abbildung 4

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$ zu formulieren. Während es 40 % der Lernenden noch gelang, zum Additionsterm eine passende Textaufgabe zu formulieren, so waren es bei der Multiplikation noch 4 %. Bei der zitierten Studie konnten über 50 % der Befragten Multiplikationsterme mit Brüchen korrekt lösen. Dies zeigt auf, dass technisches Arbeiten („das, was Taschenrechner übernehmen könnten“) vergleichsweise gut gelingt, während die Bedeutung der Operation („was passiert bei der Multiplikation mit den Zahlen?“) verborgen bleibt.

Schließlich seien noch Kompetenzen von Lernenden beim Übersetzen von einer Sachsituation in den mathematischen Rechenausdruck betrachtet. Dass die Wahl der Rechenoperation und nicht das Rechnen selbst die zentrale Schwierigkeit beim Bearbeiten von Sachsituationen ist, beschreiben zahlreiche Autoren seit Jahrzehnten. Im Rahmen der oben beschriebenen PALMA-Studie sollte von Lernenden am Ende der siebten Jahrgangsstufe folgende Situation bearbeitet werden:

Die Aufgabe wurde von knapp 60 % der Befragten am Ende der siebten Jahrgangsstufe korrekt gelöst, der häufigste Fehler war die Wahl der Rechenoperation. Rund ein Drittel der Befragten hat versucht, die Aufgabe über eine Division ($2400 : \frac{1}{6}$) oder Subtraktion ($2400 - \frac{1}{6}$) der in der Aufgabenstellung genannten Zahlen zu bearbeiten. Dass die Wahl der Rechenoperation (und nicht das Rechnen selbst) die zentrale Schwierigkeit beim Bearbeiten von Sachsituationen ist, beschreiben zahlreiche Autoren seit Jahrzehnten.

In der genannten Studie von Prediger (2011) sollten Lernende bei folgender Textaufgabe auswählen, mit welchem Rechenausdruck die Sachsituation bearbeitet werden kann.

- (a) Ein Kilogramm Mandarinen kosten 1,50 Euro. Kerstin will sich $\frac{3}{4}$ kg kaufen.
Mit welcher Rechnung findet sie heraus, wie viel sie zahlen muss?
(Kreuze eins oder mehrere an)
○ $1,5 - \frac{3}{4}$ ○ $1,5 : \frac{3}{4}$ ○ $1,5 \cdot \frac{3}{4}$ ○ eine andere Rechnung:
keines von denen, sondern so:
- (b) Begründe deine Antwort zu (a):

Gut ein Drittel der Befragten, (das entspricht etwa der Ratewahrscheinlichkeit) kreuzte den korrekten Rechenausdruck $1,5 \cdot \frac{3}{4}$ an. Mit Begründung konnten die Aufgabe weniger als 10 % der Lernenden richtig lösen.

Diese Befunde deuten deutlich darauf hin, dass die große Mehrheit der Lernenden auch nach Abschluss des

Antwort	Anzahl	Anteil in %
Addition (korrekt)	602	32
Subtraktion	1041	55
Multiplikation/Division	200	11
Andere/ungültig	46	2
Insgesamt	1889	100

(b) Häufigkeiten der Antworten

Lehrgangs zu Bruchzahlen keine Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen aktivieren können. Nicht nur bei der Multiplikation und Division sind große Unsicherheiten und zahlreiche Fehler zu beobachten. In einer Studie des Autors wurden 1889 Lernende am Ende der 6. und 7. Jahrgangsstufe befragt, über welchen Rechenausdruck sie die Sachsituation „Max läuft heute 8,25 km. Das sind 0,8 km weniger als gestern. Wie weit ist er gestern gelaufen?“ bearbeiten würden. Mögliche Terme wurden im Multiple choice-Format angegeben.

Nur ein Drittel der Befragten entschied sich für die Addition der beiden Zahlen. Mehr als die Hälfte der Befragten wählte die Subtraktion als passenden Rechenausdruck.

Die entscheidende Frage ist nun: Ist es wichtiger, dass Lernende lernen, welcher Rechenausdruck zu einer Situation passt (und dieser dann notfalls mit einem Taschenrechner berechnet wird) oder ist es wichtiger, dass Terme wie $1,5 \cdot \frac{3}{4}$ oder $8,25 + 0,8$ berechnet werden können – ungeachtet der Bedeutung? Die Untersuchungen zeigen, dass Lernende zwar das einigermaßen beherrschen, was ihnen Taschenrechner abnehmen könnten. Die Studien zeigen aber auch, dass die Befragten aber nicht gelernt haben, wie Terme und Situationen zusammen hängen. Wie also Textaufgaben mit einem Taschenrechner bearbeitet werden könnten. Hier gilt es, eine Bedeutungsverschiebung in Schulbüchern und Lehrpersonal anzuregen, beispielsweise indem die Bedeutung und die Auswirkung der Rechenoperation gezielt thematisiert wird (Marxer und Wittmann 2011; Scherres 2009; Wartha 2017).

Warum ist das so problematisch – Erklärungsversuche

Was beeinflusst die Wahl der Rechenoperation? Im günstigen Fall sind das Grundvorstellungen – sie stellen die Passung zwischen Term und Modell her. Werden Grundvorstellungen nicht aktiviert, so können Fehlvorstellungen („Dividieren verkleinert immer“) wirksam werden (Padberg und Wartha 2017; Prediger 2008; Bell et al. 1981; Swan 2001). Fehlvorstellungen können aus subjektiven Theorien entstehen, die sich in anderen Inhaltsbereichen entwickelt haben. Beispielsweise ist bei natürlichen Zahlen das Ergebnis einer Divisionsaufgabe meist kleiner als der Dividend. Diese Fehlvorstellungen werden auch als tacit models (Fischbein et al. 1985) beschrieben, stumme Modelle, die den Lösungsprozess beeinflussen können und sich der be-

(a) $3 \cdot 6$ (Illustration)

(b) $13 \cdot 16$ (Illustration)

Abbildung 5

wussten Steuerung des Lernenden entziehen. Unter der Annahme, dass eine Verkleinerung des Ausgangswertes erzielt werden soll, wählen zahlreiche Lernende die Division oder die Subtraktion, um die Zahlen der Aufgabenstellung zu verknüpfen. Ein weiteres Phänomen ist die Orientierung an Oberflächenmerkmalen von Textaufgaben (Prediger 2011). So genannte Signalwörter wie „weniger“ (Dauerlauf) oder „er spendet einen Teil“ (Brinkmeier) bewirken, dass ungeachtet des Kontextes eine Rechenoperation ausgewählt wird, die mit diesen Wörtern scheinbar verknüpft ist. In zahlreichen Kontexten bedeutet „weniger“, dass subtrahiert werden muss. Die (hier relativ gemeinte) Angabe „ein Teil“ kann für Lernende bedeuten, dass mit den vorhandenen Zahlen „geteilt“ gerechnet werden soll.

Förderung: Aufbau von Grundvorstellungen und Umgang mit Fehlvorstellungen

In Bezug auf den Aufbau von Grundvorstellungen kann von einer stoffdidaktischen Perspektive her argumentiert werden: Notwendig sind tragfähige konkrete Modelle, die

durch entsprechende unterrichtliche Unterstützung zu gedanklichen, also mentalen Modellen ausgebaut werden. Dies soll am Beispiel Multiplikation verdeutlicht werden.

In der Primarstufe wird die Multiplikation bisweilen in Form von gleichmächtigen Mengen illustriert, die unstrukturiert dargestellt werden. Zum Beispiel kann der Rechenausdruck $3 \cdot 6$ in Form von drei Körbchen, in denen jeweils 6 Äpfel liegen, dargestellt werden. Hierbei handelt es sich um eine Illustration, aber nicht um ein tragfähiges Modell. So kann diese Darstellung höchstens konkret, aber nicht in der Vorstellung für einen Rechenausdruck wie $13 \cdot 16$ herangezogen werden. Spätestens bei einem Rechenausdruck wie $0,3 \cdot 0,6$ scheitert die Idee mit den Äpfeln auf den Tellern, vgl. (Schulz 2017; Schulz und Wartha im Druck).

Tragfähig hingegen ist eine strukturierte Darstellung im Rechteck. Die Äpfel werden im Modell zu Quadraten und diese werden in Zeilen und Spalten dargestellt. Der erste Vorteil dieses Modells ist sofort sichtbar: Die Kommutativität der Multiplikation kann im Gegensatz zu den Körbchen erkannt und begründet werden. Das Modell ist auch konkret und gedanklich erweiterbar auf Rechenausdrücke wie $13 \cdot 16$. Insbesondere können an diesem Modell auch

(a) $3 \cdot 6$ (tragfähiges Modell)

(b) $13 \cdot 16$

(c) $0,3 \cdot 0,6$

Abbildung 6

Rechenstrategien (Distributivgesetz) zur Ermittlung des Ergebnisses entwickelt werden. Das Rechteckmodell ist so tragfähig, dass es auch bei Rechenausdrücken wie $0,3 \cdot 0,6$ eingesetzt werden kann (Schulz 2017).

Wenn nun 1 kg Mandarinen 1,50 Euro kosten (nach rechts angetragen) und es werden 0,75 kg (nach unten angetragen) gekauft, dann bedeutet der Flächeninhalt des entstandenen Rechtecks, dass dieser Betrag bezahlt werden muss. Insbesondere ist der Zahlenwert des Ergebnisses kleiner als 1,5.

Abbildung 7. Modell für $1,50 \cdot 0,75$

Empirische Studien über Fehler und Fehlerstrategien im Bereich Bruchzahlen liegen seit mehreren Jahrzehnten vor. Auch wurden hierüber didaktische bzw. psychologische Theorien (weiter) entwickelt, um Fehlerphänomene zu erklären. Es wurden hingegen noch nicht viele Studien zur Wirksamkeit von Förderkonzepten und unterrichtliche Lernumgebungen durchgeführt. Empirisch untersucht wurde beispielsweise, ob sich das Arbeiten mit Fehlerlösungen günstig auf den Lernerfolg auswirken kann. Heemsoth und Heinze (2014) untersuchten dies an insgesamt 217 Sechstklässlern im Design einer Interventionsstudie im prae-post Design. In der ersten Gruppe wurde mit Lösungsbeispielen gearbeitet: Es wurden verschiedene Strategien entwickelt, wie Aufgaben bearbeitet werden können, diese begründet und auf analoge Aufgaben bezogen. In der zweiten Gruppe wurden – in einem vergleichbaren Zeitraum – auch Fehlerbeispiele diskutiert: Warum ist die Lösung falsch? Wie kann der Fehler entstehen? Wie kann er vermieden werden? Die Ergebnisse zeigen, dass das Arbeiten mit Fehlerbeispielen in allen Leistungsgruppen höhere und nachhaltigere Lernzuwächse zeitigt. Dies ist ein wichtiger Hinweis für die Schulpraxis. Fehler- und Fehlvorstellungen sollten demnach nicht vermieden, sondern gezielt diskutiert und reflektiert werden.

Diskussion: Konsequenzen für die Forschung, für Curricula, für Schulbücher und für den Unterricht

Es ist nicht entscheidend, dass mit Äpfeln oder Pizzen gerechnet wird. Ausschlaggebend ist die Tragfähigkeit der verwendeten Modelle. Nicht alle Illustrationen haben das Potenzial, zu einem fortsetzbaren und universellen Modell zu werden. Tragfähige Modelle können hingegen immer auf Illustrationen bezogen werden. Am Beispiel der Multiplikation wurde aufgezeigt, dass fortsetzbare und tragfähige Modelle nicht anschauliche Blümchen in Vasen oder Äpfel auf

Tellern sind. Ein Modell ist auf das Wesentliche reduziert und erlaubt die Beschäftigung mit den zentralen mathematischen Eigenschaften. In diesem Sinne plädiert der Autor dafür, dass Veranschaulichungen als Modelle zunächst von einem mathematischen Standpunkt aus kritisch untersucht werden:

- Knüpft das Kreismodell zur Veranschaulichung von Anteilen wirklich an Vorerfahrungen der Kinder an? Ist es einem Lernenden in der sechsten Klasse möglich, hier Fünftel oder Siebtel einzuzeichnen?
- Wie können am Rechteckmodell Strategien zur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division entwickelt werden? Wie sehen die nötigen Schritte hierzu konkret aus?
- Wie können am Zahlenstrahl Vergleiche und Rechenoperationen mit Brüchen in Dezimalschreibweise dokumentiert werden?

Wenn die mathematischen Inhalte an konkreten Modellen dargestellt und über sie kommuniziert und reflektiert wird, dann bedeutet das noch nicht automatisch, dass die Darstellungen auch als gedankliche Modelle aktiviert werden können. Es bieten sich Lerngelegenheiten an, die die Aktivierung der mentalen Modelle unterstützen. Hier helfen Impulse wie:

- Stell Dir vor, du färbst am Rechteck $\frac{5}{6}$. Wie gehst du vor? Wie viel ist nicht gefärbt? Wie wäre das bei $\frac{6}{7}$? Wo ist mehr gefärbt? Warum?
- Was müsstest du machen, um ein Rechteck so einzuteilen, dass sowohl Drittel als auch Viertel eingezeichnet werden können? Beschreibe.

In Bezug auf die typischen Fehlvorstellungen („Multiplizieren vergrößert immer, Dividieren verkleinert immer“) bietet es sich zunächst an, diese Fehler zu thematisieren und den zu Grunde liegenden Denkvorgang „aufzudecken“: Warum wählen viele Menschen bei der Orangen-Aufgabe die Division?“. Anschließend kann die richtige Lösung durch Aktivierung des (konkreten oder vorgestellten) Modells gegenübergestellt werden. Fehlerlösungen sind mittlerweile in so gut wie allen Schulbüchern zu finden. Allerdings beschränkt sich der Arbeitsauftrag meist darauf, falsche Lösungen zu finden und zu korrigieren. In Bezug auf die Aktivierung von Modellen sollten zusätzliche Impulse gegeben werden: Warum ist das Ergebnis falsch? Was hat sich der Bearbeiter gedacht? Wie erklärst du ihm die richtige Lösung? Worauf musst auch Du bei der Bearbeitung solcher Aufgaben achten? Für die empirische mathematikdidaktische Forschung bedeuten die bisherigen Befunde, dass vor allem Förderkonzepte entwickelt und wissenschaftlich evaluiert werden sollten. Zahlreiche Fehlerphänomene sind seit über 30 Jahren bekannt und werden mit verschiedenen Theorien beschrieben. Hieran können nun konstruktive Konzepte anknüpfen. Ein erster Schritt ist mit der Betonung der prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards bereits getan. Deren Umsetzung lässt hoffen, dass sich in allen Schularten der Schwerpunkt des Mathematikunterrichts weg vom Rechnen und hin zu mehr Zahl- und Operationsverständnis, also hin zu mehr Mathematik verlagert.

Literaturverzeichnis

- Bell, A.; Swan, M.; Taylor, G. (1981): Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. In: *Educational Studies in Mathematics* 12 (4), S. 399–420.
- Deutschland, Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Klüwer.
- Fischbein, Efraim; Deri, Maria; Sainati Nello, Maria; Marino, Sciolis; Maria (1985): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (1), S. 3–17.
- Hasemann, K. (1986): Bruchvorstellungen und die Addition von Bruchzahlen. In: *Mathematik lehren* (16), S. 16–19.
- Heemsoth, Tim; Heinze, Aiso (2014): The impact of incorrect examples on learning fractions: A field experiment with 6th grade students. In: *Instructional Science* 42 (4), S. 639–657.
- Mack, Nancy K. (1990): Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 21 (1), S. 16–32.
- Marxer, Michael; Wittmann, Gerald (2011): Förderung des Zahlenblicks – Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. In: *Der Mathematikunterricht* 57 (3), S. 26–36.
- Padberg, Friedhelm; Wartha, Sebastian (2017): *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum.
- Pekrun, R.; Vom Hofe, Rudolf; Blum, Werner; Götz, Thomas; Wartha, S.; Jullien, Simone (2006): Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) – Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I. In: Manfred Prenzel (Hg.): *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms: [BIQUA]*. Münster and München [u. a.]: Waxmann, S. 21–52.
- Post, T. R. (1981): Fractions: Results and Implications from National Assessment. In: *Arithmetic teacher* 28 (9), S. 26–31.
- Prediger, S. (2008): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. In: *Learning and Instruction* 18 (1), S. 3–17.
- Prediger, S. (2011): Why Johnny can't apply multiplication? Revisiting the choice of operations with fractions. In: *International Electronic Journal of Mathematics Education* 6 (2), S. 65–88.
- Scherres, Christine (2009): Warum habt ihr ausgerechnet in 7/7 umgewandelt? Strategiekonferenzen über Vorgehensweisen zur Addition und Subtraktion mit Brüchen und Dezimalzahlen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* (27), S. 15–21.
- Schulz, Axel (2017): Multiplikation verstehen – durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. In: *Mathematik lehren* (201), S. 17–22.
- Schulz, Axel; Wartha, Sebastian (im Druck): *Numbers, Fractions, Operations and Representations – Basic Ideas (Grundvorstellungen) in Primary School*. Hamburg.
- Selter, Ch.; Prediger, S.; Nührenbörger, M.; Hußmann, S. (2012): Taking away and determining the difference: A longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. In: *Educational Studies in Mathematics* 79, S. 389–408.
- Swan, Malcolm (2001): Dealing with misconceptions in mathematics. In: P. Gates (Hg.): *Issues in mathematics teaching*. New York: Routledge-Falmer.
- Vom Hofe, R.; Blum, W. (2016): "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 37 (1), S. 225–254.
- Vom Hofe, Rudolf (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg and Berlin and Oxford: Spektrum, Akad. Verl. (Texte zur Didaktik der Mathematik).
- Wartha, Sebastian (2007): *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim and Berlin: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 54).
- Wartha, Sebastian (2017): Stellenwertverständnis bei Dezimalbrüchen. In: *Fördermagazin Sekundarstufe* (1), S. 8–14.
- Wartha, Sebastian; Schulz, Axel (2012): *Rechenproblemen vorbeugen: Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100*. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen.
- Wartha, Sebastian (in press). *Grund- und Fehlvorstellungen beim Operieren mit Dezimalbrüchen*.
- Wessel, Jan (2015): *Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion*. Dissertation. Wiesbaden: Springer.

Prof. Dr. Sebastian Wartha, Pädagogische Hochschule Karlsruhe,
Institut für Mathematik und Informatik, Bismarckstraße 10, 76133 Karlsruhe
sebastian.wartha@ph-karlsruhe.de

Nach seiner Promotion zum Thema „Längsschnittliche Analyse der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs“ an der Universität Regensburg hat Sebastian Wartha am Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) in den Arbeitsgruppen von Prof. vom Hofe und Prof. Schipper seine Forschungen zum Thema „Gelingende und misslingende Lernprozesse im Bereich Arithmetik“ auf die Thematik Rechenstörungen in Primar- und Sekundarstufe ausbauen können. Seit 2010 ist er Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule in Karlsruhe. Sein Forschungsschwerpunkt ist die Analyse und Evaluation von Maßnahmen zur Überwindung von besonderen Hürden beim Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen.