Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

The physics is not mathematics and mathematics is not physics. One helps the other. But you have to have some understanding of the connection of the words with "the real world".

Richard Feynman

Atiyah über Ästhetik

Michael Atiyah war ein regelmäßiger Sprecher auf dem Heidelberg Laureate Forum mit stets sehr interessanten Vorträgen, darunter 2014 dem Eröffnungsvortrag „Beauty in Mathematics".

> My work has always tried to unite the true with the beautiful and when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

zitierte er damals Hermann Weyl, um dann über die von Weyl als (physikalisch falscher) Ansatz zur Vereinigung von Relativitätstheorie und Elektromagnetismus entwickelte Eichtheorie zu sprechen, die später nicht nur innermathematisch, sondern auch für die Entwicklung der Quantenfeldtheorie von Bedeutung gewesen sei. Trotz dieses Einstiegs kam damals auch in den Fragen der Zuhörer nichts mehr zur Zukunft der Stringtheorie, dafür ging es um schöne und hässliche Beweise und in den letzten Minuten um eine damals aktuelle Arbeit aus der Hirnforschung, ob man Emotionen von Mathematikern im Hirnscanner messen könne, positive beim Anblick schöner Formeln oder (wonach von einem Zuhörer gefragt wurde) auch negative.

Die Riemannsche Vermutung

Der von Atiyah zitierte Hermann Weyl war bekanntlich ein Apologet der wechselseitigen Befruchtung von Mathematik und Physik, was er beispielsweise in den Vorworten seiner Bücher zum Ausdruck brachte. Nicht jeder Mathematiker teilt die Begeisterung für physikalische Argumente. Berühmt (und inzwischen auch in die populärwissenschaftliche Literatur eingegangen) ist Enrico Bombieris seinerzeit über den ICM-Verteiler verbreitete Nachricht, in der er am 1. April 1997 einen angeblichen Beweis der Riemann-Vermutung verkündete.

> [...] a young physicist [...] saw in a flash that one could set the whole thing in a combinatorial setting using supersymmetric fermionic-bosonic systems (the physics corresponds to a near absolute zero ensemble of a mixture of anyons and morons with opposite spins) and, using the C-based metalanguage MISPAR, after six days of uninterrupted work, computed the logdet of the resolvent Laplacian, removed the infinities using renormalization, and, lo and behold, he got the required positivity of Weil's explicit formula! Wow!

Ferdinand Barth, Der Zauberlehrling. *Goethes Werke*, 1882

Schönheit in der Physik

Zweifel an der Stringtheorie als physikalischer Theorie haben spätestens seit Peter Woits Buch *Not even wrong* auch das breitere Publikum erreicht. Das – von Alexander Unzickers *Vom Urknall zum Durchknall* einmal abgesehen – erste deutschsprachige Buch dazu erschien letztes Jahr als Übersetzung von Sabine Hossenfelders *Lost in Math* unter dem Titel *Das häßliche Universum*.

> Eine ketzerische Position: Was läuft falsch in der gegenwärtigen Physik? Physiker glauben häufig, dass die besten Theorien schön, natürlich und elegant sind. Was schön ist, muss wahr sein, Schönheit unterscheidet erfolgreiche Theorien von schlechten. Sabine Hossenfelder zeigt jedoch, dass die Physik sich damit verrannt hat: Durch das Festhalten am Primat der Schönheit gibt es seit mehr als vier Jahrzehnten keinen Durchbruch in der Grundlagenphysik. Schlimmer noch, der Glaube an Schönheit

DOI 10.1515/dmvm-2019-0049

> ist so dogmatisch geworden, dass er nun in Konflikt mit wissenschaftlicher Objektivität gerät: Beobachtungen können nicht mehr länger die kühnsten Theorien wie z. B. Supersymmetrie bestätigen. Um aus dieser Sackgasse herauszukommen, muss die Physik ihre Methoden überdenken. Nur wenn Realität als das akzeptiert wird, was sie ist, kann Wissenschaft die Wahrheit erkennen.

bewirbt der S.Fischer-Verlag das Buch. Im Buch selbst bezeichnet Hossenfelder Stephen Kings *Tommyknockers* als „tolle Metapher für die Stringtheorie: Ein außerirdischer Gegenstand unbekannten Verwendungszwecks tief vergraben in der Mathematik“ und kommt nach gut dreihundert Seiten zu dem Schluss: „Physik ist nicht Mathematik. Es ist die richtige Auswahl der Mathematik.“

Mathematische Anwendungen der Physik

Auf `mathoverflow` wurden im August die innermathematischen Anwendungen der Stringtheorie diskutiert (mathoverflow.net/questions/338904/mathematical-uses-of-string-theory). Am bemerkenswertesten fanden die Abstimmenden den monströsen Mondschein, die Berechnung der Schnittzahlen im Modulraum von Flächen, und die Spiegelsymmetrie von Calabi–Yau-Mannigfaltigkeiten.

Monströsen Mondschein nennt man das Phänomen, dass die Koeffizienten in der Fourier-Entwicklung der j-Funktion (das ist der Erzeuger des Rings aller holomorphen $SL(2, Z)$-invarianten Funktionen auf der oberen Halbebene) sich alle als Dimensionen von Darstellungen der Monstergruppe (das ist eine einfache Gruppe mit mehr als 10^{54} Elementen) realisieren lassen. Ein Physiker (Luboš Motl auf Quora) erklärt es so: Man betrachtet ein „physikalisches“ System, nämlich die 2-dimensionale „worldsheet conformal field theory“, welche die Bewegung eines Strings auf einem 24-dimensionalen Torus beschreibt, den man als Quotient des $\mathbf{R}^{24}$ nach dem Leech-Gitter konstruiert. Die Symmetriegruppe des Leech-Gitters ist die einfache Gruppe Co_0, durch die Betrachtung der Strings hat man eine größere Symmetriegruppe, eben die Monstergruppe. Damit geben alle Energieniveaus Darstellungen der Monstergruppe. Die Zustandssumme dieses Systems ist die j-Funktion und aus der Stringtheorie weiß man, dass die Koeffizienten der Zustandsssumme gerade die Anzahlen der Zustände in den jeweiligen Energieniveaus sind.

Wikimedia Commons/Public Domain (tinyurl.com/wt2a68n)

Johann Clausen Dahl, Dresden bei Mondschein, 1839

Das ist freilich nur die Heuristik. Borcherds’ Beweis der Mondscheinvermutung vermeidet den Physikerjargon völlig, spricht von Vertexoperatoralgebren statt von Stringtheorie und wird in jedem Fall auch dann mathematisch korrekt bleiben, wenn die Stringtheorie sich als physikalisch falsch herausstellen sollte.

Borcherds selbst drückte es in einem 1992 geschriebenen Artikel „Sporadische Gruppen und Stringtheorie“ so aus:

> The quantization of the string is roughly a representation of some Lie subalgebra of the Lie algebra of functions on phase space. Which subalgebra and which representation we take are up to the person doing the quantization. (This is a gross simplification of what is usually meant by quantization.)

Tatsächlich fanden Physiker analoge Mondscheinphänomene für 23 weitere einfache Gruppen (bewiesen 2015 von Duncan–Ono–Griffin) und in den letzten Jahren noch für eine Reihe anderer Gruppen wie die sogenannte O’Nan-Pariagruppe. Was sind die zugehörigen Stringtheorien?

> The rapid pace of recent discoveries is generating a mix of excitement, confusion and frustration - frustration, because researchers have not yet found the string theory models that would make sense of these new correspondences between symmetry groups and modular forms.

wird der an den Entdeckungen beteiligte Physiker Jeff Harvey im *Quanta Magazine* zitiert.

Während bei der Mondscheinvermutung die Physik jedenfalls die Heuristik für den Beweis lieferte, scheinen bei den beiden anderen großen mathematischen Erfolgen der Stringtheorie, Wittens Vermutung und (soweit sie bewiesen ist) Spiegelsymmetrie, die Beweise völlig losgelöst zu sein von der ursprünglichen physikalischen Motivation.

Bei der Witten-Vermutung geht es um die Schnittzahlen von je $dim(M_{g,n})$ Hyperflächen in der Kompaktifizierung des Modulraums $M_{g,n}$ der komplexen Strukturen auf einer Fläche vom Geschlecht g mit n ausgezeichneten Punkten. Man kann diese Schnittzahlen verschiedener Hyperflächen als Koeffizienten einer Potenzreihe F organisieren und die überraschende Vermutung Wittens – motiviert durch den Vergleich der Zustandssummen zweier hypothetischer topologischer Quantenfeldtheorien – besagt, dass $U = \frac{d^2F}{dt^2}$ eine Lösung der KdV-Gleichung ist. Die KdV-Gleichung beschreibt eigentlich Wellenpakete, die sich ohne Änderung ihrer Form durch ein dispersives, nichtlineares Medium bewegen, zum Beispiel Flachwasserwellen in engen Kanälen.

Es ist schwer vorstellbar, dass ein Mathematiker ohne physikalischen Hintergrund auf die Idee gekommen wäre, dass die KdV-Gleichung eine Rolle bei der Berechnung von Schnittzahlen spielt. Trotzdem verwendet keiner der inzwischen bekannten Beweise den ursprünglichen physikalischen Ansatz. Kontsevichs erster Beweis verwendete ein kombinatorisches Modell des Modulraums, um F durch Matrixintegrale auszudrücken und dann mittels „extrem hochmächtiger Kombinatorik" Eigenschaften des Matrixintegrals zu zeigen, aus denen die gewünschte Differentialgleichung folgt. Als am verständlichsten gilt heute Mirzakhanis Beweis: sie betrachtete die $M_{g,n}$ als Modulraum hyperbolischer Metriken und erhielt die Schnittzahlen als Koeffizienten von Polynomen, die das Volumen der Weil–Petersson-Metrik auf diesem Modulraum berechnen.

Auch Spiegelsymmetrie verwendet da, wo sie mathematisch konstruiert werden kann (für gewisse Hyperflächen torischer Fano-Varietäten), kombinatorische Methoden (Fano-Polytope), die keinen physikalischen Ursprung haben. Jedoch benutzten vier Physiker Anfang der 90er Jahre die Spiegelmannigfaltigkeit der Quintik, um die Anzahl N_d der Kurven vom Grad d in der Quintik vorherzusagen. Insbesondere berechneten sie $N_3 = 317206375$, was heuristischen Berechnungen aus der Mathematik widersprach. In denen wurde aber bald danach ein Fehler gefunden und nach der Korrektur bekamen die Mathematiker dasselbe Resultat – die Physik hatte gewonnen. Auch für diese Formel benutzte der spätere Beweis durch Givental aber nicht die physikalische Heuristik, sondern eine Lokalisierungsformel für äquivariante Kohomologie.

Turbulenzen in der Sternennacht

> Wenn ich Gott treffe, dann werde ich ihm zwei Fragen stellen: warum Relativität? Und warum Turbulenz? Ich glaube schon, dass er auf die erste Frage eine Antwort parat hat.

Dieses Zitat wird manchmal Werner Heisenberg zugeschrieben, häufiger Horace Lamb mit Quantenelektrodynamik statt Relativitätstheorie. Ob es so gesagt wurde oder nicht, es gibt jedenfalls korrekt wieder, wie wenig man das Wesen der Turbulenz verstand.

Dazu paßt, dass eine Gruppe von Wissenschaftlern vor einigen Jahren feststellte, dass die von Vincent van Gogh in seinen psychotischen Phasen gemalten Bilder Turbulenzen viel besser darstellen als die aus seinen gesunden Phasen. (Aragón, Naumis, Bai, Torres, Maini, Turbulent luminance in impassed van Gogh paintings. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 30, 2008.)

Als besonders gelungen gilt die Darstellung der Turbulenz in der „Sternennacht", gemalt im Juni 1889 in der Nervenheilanstalt Saint-Rémy. Eine neue Arbeit von James Beattie und Neco Kriel ("Is the starry night turbulent?" arxiv.org/pdf/1902.03381.pdf) beschäftigt sich speziell mit den Turbulenzen in diesem Gemälde.

Wikimedia Commons/Public Domain (tinyurl.com/nbz29n9)

Vincent van Gogh, Sternennacht, 1889

Unphysikalische Lösungen …

Mathematisch wird die Strömung inkompressibler Flüssigkeiten oder Gase der Viskosität $\nu > 0$ durch die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = 0 = \nabla \cdot u$$

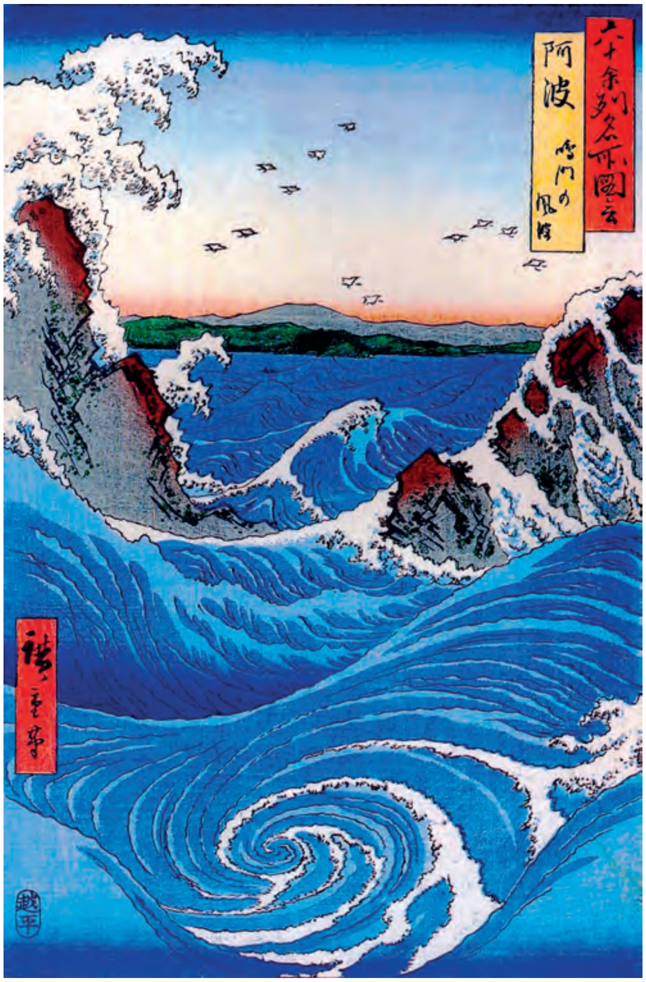
für die Geschwindigkeit u und den Druck p beschrieben. Für die 2-dimensionale Version dieser Gleichung bewies Olga Ladyschenskaja die Existenz von C^∞-Lösungen und auch die Konvergenz des Finite-Differenzen-Verfahrens, also die numerische Berechenbarkeit der Lösungen. Für den 3-dimensionalen Fall ist die Existenz von C^∞-Lösungen bekanntlich eines der Millenium-Probleme.

Jean Leray wird nachgesagt, er habe manche Zeit damit verbracht, Strudel und Wirbel in der Seine an den Pfeilern des Pont Neuf zu beobachten, und sei so zur Suche nach nichtglatten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen motiviert worden. (Diese Geschichte klingt zumindest weniger unplausibel als die ebenfalls kolportierte, er habe durch jahrelanges Starren auf die Gitterstäbe im Kriegsgefangenenlager die Theorie der Spektralsequenzen gefunden.)

Jedenfalls fand Leray (zwei Jahre vor Sobolew und zehn Jahre vor Schwartz, also bevor es die entsprechenden mathematischen Begriffe überhaupt gab) L^2-Funktionen, deren schwache Ableitung (im Distributionen-Sinn) wieder L^2 ist und die die schwache Version der Gleichungen erfüllen, also Gleichheit als Distributionen.

Er dachte sich diese schwachen Lösungen als Fortsetzung der glatten Lösung über die Singularitäten hinaus und bezeichnete sie als „turbulente Lösungen": ihre Singularitäten sollten die Turbulenz beschreiben.

Man weiß bis heute nicht, ob die eindeutigen, lokal definierten, glatten Lösungen in endlicher Zeit Singularitäten ausbilden. Neuere Arbeiten von Buckmaster und Vicol zeigen aber, dass die schwachen Lösungen nicht eindeutig sind, es also auch „unphysikalische" schwache Lösungen gibt.



commons.wikimedia.org/wiki/File:Hiroshige_Wild_sea_breaking_on_the_rocks.jpg

Utagawa Hiroshige, Der Naruto-Strudel, 1855

Für $\nu = 0$ gehen die Navier-Stokes-Gleichungen in die klassischen Euler-Gleichungen (mit völlig anderen Eigenschaften) über. In den 90er Jahren bewies Wladimir Scheffer die Existenz einer schwachen L^2-Lösung der Euler-Gleichungen mit den Eigenschaften

$$u(x,t) = 0 \quad \forall \, |t| > 1$$

$$\int |u(x,t)|^2 \, dx = 1 \text{ für fast alle } |t| < 1,$$

die dem plötzlichen Auftreten turbulenter Strömungen ohne äußere Anregung entsprechen (und für die offensichtlich Energieerhaltung nicht gilt). In der Physikliteratur sah man das eher als eine Warnung vor unphysikalischem Verhalten bei zu schwachen Lösungsbegriffen.

> Das Banach–Tarski-Paradoxon wird manchmal als die „überraschendste Aussage aller Mathematik" bezeichnet. Wenn auf dem Gebiet der Strömungsmechanik ein Theorem diesen Titel beanspruchen kann, ist es das Scheffer–Shnirelman-Paradoxon, demzufolge eine Flüssigkeit (nicht viskos, inkompressibel) sich abrupt entscheiden kann, sich frenetisch zu rühren, ohne dass irgendeine äußere Kraft auf sie einwirkt. In der Tat ist diese Aussage vielleicht noch beunruhigender als die von Banach-Tarski, weil sie nicht einmal auf dem Auswahlaxiom beruht … (Cédric Villani)

… passen in eine mathematische Theorie …

Bekanntlich gibt es für schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen starke Regularitätssätze. Schon für 2-dimensionale elliptische Systeme gibt es dazu viele Gegenbeispiele, darunter Beispiele Lipschitz-stetiger, nirgends stetig differenzierbarer Lösungen gewisser Systeme, die Müller und Šverak in den 90er Jahren mit Gromows Methode der konvexen Integration fanden. Diese Methode baut auf Ideen von Nash und Kuiper auf, die in den 50er Jahren isometrische Einbettungen der runden 2-Sphäre in eine beliebig kleine Umgebung des Nullpunktes im euklidischen Raum konstruierten.

Die Existenz solcher Einbettungen ist eigentlich absurd. Es gibt einen klassischen Satz von Cohn-Vossen und Sacksteder, dass es bis auf die Standardeinbettung und ihre Verknüpfung mit Isometrien des $\mathbf{R}^3$ keine weiteren isometrischen C^2-Einbettungen $S^2 \to \mathbf{R}^3$ gibt. Oder, sehr viel elementarer, für eine Einbettung der S^2 in eine Kugel vom Radius ϵ muss in einem Extrempunkt die Krümmung mindestens ϵ^{-2} sein. Weil Krümmung nach dem Theorema Egregium eine Invariante unter Isometrie ist, kann es eigentlich keine solche Einbettung der Einheitssphäre geben.

Der Punkt mit beiden Argumenten, dem von Cohn-Vossen und Sacksteder wie dem mit der Krümmung, ist, dass sie nur für C^2-Einbettungen funktionieren. (Die Definition der Krümmung verwendet zweite Ableitungen der Metrik, für C^1-Einbettungen ist die Krümmung nicht definiert.) Man würde wohl erwarten, dass dies ein technisches Problem ist und man den Beweis auch ohne zweimalige Differenzierbarkeit noch verallgemeinern könnte. Die von Nash und Kuiper konstruierten isometrischen C^1-Einbettungen der Einheitssphäre in beliebig kleine ϵ-Kugeln zeigen aber, dass dies nicht möglich ist.

Nashs Konstruktion ist ein Beispiel der später von Gromow entwickelten „konvexen Integration" partieller Differentialrelationen. Die unphysikalische Natur der mit dieser Methode konstruierten Lösungen rechtfertigte Gromow im Vorwort seines Buches „Partial Differential Relations" mit der unphysikalischen Natur der betrachteten Gleichungen.

> The classical theory of partial differential equations is rooted in physics, where equations (are assumed) to describe the laws of nature. Law abiding functions, which satisfy such an equation, are very rare in the space of all admissible functions (regardless of a particular topology in a function space). Moreover, some additional (like initial or boundary) conditions often insure the uniqueness of solutions. The existence of these is usually established with some a priori estimates which locate a possible

> solution in a given function space. We deal in this book with a completely different class of partial differential equations (and more general relations) which arise in differential geometry rather than in physics. Our equations are, for the most part, underdetermined (or, at least, behave like those) and their solutions are rather dense in spaces of functions.

Dennoch wurden Scheffers Lösungen der Euler-Gleichungen später von de Lellis und Székelyhidi in eine auf Gromows konvexer Integration beruhende allgemeine Theorie eingebettet. Die unphysikalischen Lösungen der physikalischen Gleichungen haben dieselbe Nichteindeutigkeit (oder Flexibilität) wie sie bei den geometrischen Problemen mit hinreichend abgeschwächten Regularitätsbedingungen (im Fall der Nash–Kuiper-Einbettungen hinreichend schwachen Hölder-Bedingungen an die ersten Ableitungen) auftreten. Damit wurden die ohne äußere Anregung auftretenden turbulenten Strömungen jedenfalls Teil einer mathematischen Theorie und waren kein isoliertes Phänomen mehr. Unklar blieb zunächst, ob sie auch eine physikalische Bedeutung hätten.

… und letztlich auch in die Physik

Im August wurden die Clay Research Awards an Buckmaster, Isett und Vicol vergeben für Arbeiten, die den schwachen Lösungen der Euler-Gleichungen letztlich doch eine physikalische Bedeutung geben. Einen Überblick dazu gibt ein in den *Notices of the AMS* erscheinender Artikel von de Lellis und Székelyhidi.

Zur Erklärung von Turbulenz gibt es neben den Singularitäten der Navier-Stokes-Gleichung noch die von Andrei Kolmogorow entwickelte statistische Turbulenztheorie, die erklären soll, warum im Experiment für $\nu \to 0$ die Dissipation $\frac{dE}{dt}$ nicht – wie man aus den Navier-Stokes-Gleichungen mathematisch herleiten kann – gegen Null geht. Davon ausgehend, dass Energie von großen Wirbeln lokal auf kleinere übertragen, die Dissipation also durch einen stetigen Energiefluss von niedrigen zu hohen Frequenzen (sogenannte Kaskaden) bewirkt wird, nahm er an, dass die Längenskala für jede turbulente Strömung gleich ist, kleine Wirbel also genauso aus noch kleineren zusammengesetzt sind wie große aus kleineren. Daraus konnte er mit einem einfachen Skalierungsargument sein berühmtes 5/3-Gesetz herleiten. Die Annahmen dieses Arguments sind völlig unbewiesen, die Folgerungen jedoch kompatibel mit Experimenten und Simulationen.

Für $\nu \to 0$ gehen die Navier-Stokes-Gleichungen in die Euler-Gleichungen über und der Physikochemiker Lars Onsager hatte acht Jahre nach Kolmogorows Arbeit darauf hingewiesen, dass Kolmogorows 5/3-Gesetz anormale Dissipation $\frac{dE}{dt} < 0$ für die schwachen Lösungen der Euler-Gleichung implizieren würde. Konkret formulierte er die folgende Vermutung: Für schwache Lösungen, die die Hölder-Stetigkeitsbedingung

$$|u(x,t) - u(y,t)| < |x-y|^{\alpha}$$

mit $\alpha > \frac{1}{3}$ erfüllen, ist die Energie $E(t)$ konstant, wenn jedoch die Hölder-Stetigkeitsbedingung nur noch mit $\alpha < \frac{1}{3}$ erfüllt ist, dann soll es Lösungen geben, für die $E(t)$ streng fallend ist.

Der Exponent 1/3 ergibt sich durch eine Umrechnung aus Kolmogorows 5/3. Anders als Kolmogorows mathematisch schwer zu fassende statistische Theorie war das eine mathematisch formulierte Behauptung über schwache Lösungen einer Differentialgleichung, die Mathematiker zu beweisen oder zu widerlegen versuchen konnten.

In den jetzt mit dem Clay Research Award ausgezeichneten Arbeiten wird nun die anormale Dissipation schwacher Lösungen mathematisch bewiesen. Insbesondere zeigt Isetts letztes Jahr in den *Annals of Mathematics* veröffentlichte Arbeit für Hölder-Exponenten $\alpha < \frac{1}{3}$ die Existenz schwacher Lösungen, für die die Energie nicht erhalten bleibt. Das ist nicht nur das von Onsager vor mehr als sechzig Jahren vorhergesagte und von Physikern experimentell beobachtete Phänomen, sondern der Beweis soll auch einen neuen Mechanismus erklären, wie Energiekaskaden entstehen.

Dr. Thilo Kuessner,
Miltenbergstraße 8, 86199 Augsburg
mathlog1@googlemail.com