Nobel, Milgrom und Wilson

Max Klimm

Paul Milgrom und Robert Wilson erhielten den Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 2020 für ihre Beiträge zur Auktionstheorie und die Entwicklung neuer Auktionsformate. Wir geben hier einen Überblick über die mathematische Analyse von Auktionen und den Einfluss von Milgrom und Wilson auf diese Theorien. Insbesondere werden wir der Frage nachgehen, nach welchen Prinzipien Auktionen gestaltet sein sollten, damit sie einen möglichst hohen Erlös erzielen.

Zum Ersten. Ein Country-Club versteigert einen seltenen Tropfen aus dem eigenen Weinkeller zum sofortigen Genuss im Clubhaus. Wie sollte die Auktion ablaufen, um die Flasche zum höchsten Preis zu verkaufen?

Zum Zweiten. Eine weitere Flasche Wein wird versteigert, diesmal jedoch verkorkt. Welchen Einfluss hat diese Tatsache auf das zu wählende Auktionsformat?

Zum Dritten. Abermals wird eine verkorkte Weinflasche versteigert. Vor dem Verkauf untersucht ein Gutachter des Clubs Korken und Wein. Sollte den Interessenten das Gutachten vor Verkauf zugänglich gemacht werden?

Die Auktionen

Auktionen sind Mechanismen, die bestimmen, wie Güter verteilt werden und was dafür gezahlt wird. Die vier wichtigsten Auktionsformate für einzelne Güter, wie zum Beispiel Weinflaschen, sind in Tabelle 1 aufgeführt. Diese unterscheiden sich hauptsächlich darin, wie die Bieter ihre Gebote abgeben und wie der Verkaufspreis auf Basis dieser Gebote bestimmt wird.

Tabelle 1. Gängige Auktionsformate

	Offene Gebote	Verdeckte Gebote
1. Preis	Holländische Auktion	Höchstpreis-Auktion
2. Preis	Englische Auktion	Vickrey-Auktion

Die *Englische Auktion* ist die Auktionsform, die wir zum Beispiel mit Kunstauktionen in Verbindung bringen. Es werden von den Bietern solange sich jeweils überbietende Gebote abgegeben, bis niemand mehr ein weiteres Gebot abgeben will. Die Gebote sind offen, das heißt alle Bieter haben Kenntnis von allen abgegebenen Geboten. Das Gut geht an den Bieter mit dem höchsten Gebot zum Preis dieses Gebots. Die *Holländische Auktion* wird unter anderem zur Versteigerung von Blumen in den Niederlanden angewendet. Hier startet die Auktionatorin mit einem sehr hohen Preis, der fortwährend reduziert wird, bis einer der Bieter den Preis akzeptiert. Dieser erhält das Gut und zahlt den akzeptierten Preis. *Höchstpreis-Auktion* und *Vickrey-Auktion* sind zwei Auktionen mit verdeckten Geboten. Bei beiden Formaten holt die Auktionatorin ein Gebot von jedem Bieter ein und gibt den Zuschlag an den Bieter mit dem höchsten Gebot. Bei der Höchstpreis-Auktion zahlt der Gewinner das von ihm abgegebene Gebot, bei der Vickrey-Auktion zahlt er nur das zweithöchste Gebot. Vickrey-Auktionen entsprechen einer idealisierten ebay-Auktion, in der jeder Bieter nur genau ein Gebot abgibt; der Biet-Agent von ebay bietet dann automatisch nur bis zu einem Betrag, der das zweithöchste Gebot um einen vernachlässigbaren Betrag übersteigt. Höchstpreis-Auktionen werden zum Beispiel unter umgekehrten Vorzeichen angewendet, wenn Aufträge in öffentlichen Ausschreibungen an den günstigsten Bewerber vergeben werden.

Der unverkorkte Wein

Für Konsumgüter wie die unverkorkte Weinflasche wird häufig das Modell unabhängiger Wertschätzungen angewendet, das zu den am besten untersuchten Auktionsmodellen gehört. Es wird angenommen, dass es eine endliche Menge von n Bietern gibt und jeder Bieter $i \in \{1,\dots,n\}$ eine Wertschätzung $x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat, die gemäß einer Zufallsvariable X_i verteilt ist, wobei die Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ stochastisch unabhängig und identisch sind. Die Auktionatorin und alle Bieter kennen die Verteilung; die Realisierung $x_i \sim X_i$ kennt jedoch nur Bieter i. Die Wertschätzung von Bieter i spiegelt hier die persönlich durch den Genuss des Weins empfundene Freude wider, die lediglich vom inneren Gemüts- und Geisteszustand von Bieter i abhängt und daher als unabhängig von den Wertschätzungen der anderen Bieter angenommen werden kann.

Betrachten wir zunächst die Holländische Auktion und die Höchstpreis-Auktion in diesem Modell. In beiden Auktionen kann die Strategie von Bieter i durch eine Funktion $b_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden, wobei $b_i(x_i)$ das Gebot von Bieter i ist, wenn seine Wertschätzung x_i ist. Bei der Höchstpreis-Auktion wird das Gebot $b_i(x_i)$ direkt der Auktionatorin übermittelt; im Fall der Holländischen Auktion entspricht $b_i(x_i)$ dem Preis, bei dem Bieter i die Auktion stoppt, falls sie nicht bereits zuvor bei einem höheren Preis gestoppt wurde. Im Folgenden werden wir nur den sym-

DOI 10.1515/dmvm-2020-0062

metrischen Fall betrachten, in dem alle Bieter die gleiche Bietfunktion $b_i = b$ nutzen. Diese Symmetrieannahme erlaubt es, alle weiteren Betrachtungen lediglich für Bieter 1 anzustellen. Bezeichne daher mit $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ die Ordnungsstatistiken der Zufallsvariablen $X_2, \dots, X_n$, das heißt Y_k bezeichnet die Zufallsvariable, die gleich dem k-größten Wert der Zufallsvariablen $X_2, \dots, X_n$ ist. Zur Vereinfachung ignorieren wir im Folgenden den Fall, dass mehrere Bieter das gleiche Gebot abgeben.

Eine Standardannahme bei der Analyse von Auktionen ist, dass der Nutzen des Gewinners der Auktion gleich seiner Wertschätzung für das Gut minus den bezahlten Preis ist und alle unterlegenen Bieter einen Nutzen von 0 erhalten. Aus dieser Annahme ergibt sich, dass sowohl in der Höchstpreis-Auktion als auch in der Holländischen Auktion der erwartete Nutzen von Bieter 1 berechnet werden kann durch

$$\mathbb{E}\Big[\big(x_1 - b(x_1)\big)\mathbf{1}_{b(x_1) > \max_{i \neq 1} b(X_i)}\Big],$$

wobei wir angenommen haben, dass alle Bieter gemäß der Bietstrategie $b : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ bieten und $\mathbf{1}_E$ die Indikatorfunktion für ein Ereignis E bezeichnet. Um die Auktionen zu analysieren, müssen wir untersuchen, welche Art von Bietverhalten (hier dargestellt durch die Bietfunktion $b : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$) wir bei Durchführung einer Auktion erwarten können. Für die Beantwortung dieser Frage ist der Begriff des *Gleichgewichts* zentral; dieser wurde von Nash [10] eingeführt und von Harsanyi [1–3] auf den hier benötigten Fall mit unvollständigen Informationen verallgemeinert. Beide erhielten dafür (zusammen mit Reinhard Selten) den Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994.

Grob gesprochen ist eine symmetrische Bietstrategie b ein Gleichgewicht, wenn keiner der Bieter seinen erwarteten Nutzen erhöhen kann, indem er gemäß einer anderen Bietstrategie bietet. Für die Höchstpreis-Auktion und die Holländische Auktion heißt das konkret, dass b genau dann ein symmetrisches Gleichgewicht ist, wenn die Ungleichung

$$\mathbb{E}\Big[\big(x_1 - b(x_1)\big)\mathbf{1}_{b(x_1) > \max_{i \neq 1} b(X_i)}\Big] \geq \mathbb{E}\Big[\big(x_1 - \tilde{b}\big)\mathbf{1}_{\tilde{b} > \max_{i \neq 1} b(X_i)}\Big]$$

für alle Wertschätzungen $x_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ von Bieter 1, und alle alternativen Gebote $\tilde{b} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ von Bieter 1 gilt. Da wir nur symmetrische Gleichgewichte betrachten, reicht es, hier nur alternative Gebote von Bieter 1 zu betrachten.

Der folgende Satz zeigt, dass die beiden Auktionen dann ein symmetrisches Gleichgewicht haben, wenn jeder Bieter ein Gebot abgibt, dass gleich der bedingten Erwartung der zweithöchsten Wertschätzung ist, wobei darauf bedingt wird, dass der Bieter selbst die höchste Wertschätzung hat.

Satz 1. *Für unabhängige Wertschätzungen haben Holländische Auktion und Höchstpreis-Auktion ein symmetrisches Gleichgewicht mit* $b(x_1) = \mathbb{E}[Y_1 \mid Y_1 < x_1]$.

Beweis (Skizze). Wir skizzieren den Beweis hier nur unter den zusätzlichen Annahmen, dass b differenzierbar und strikt steigend ist und Y_1 eine Dichte f_{Y_1} hat. Angenommen alle Bieter $i \neq 1$ bieten gemäß b und Bieter 1 hat die Wertschätzung x_1. Sei nun $\tilde{b} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein beliebiges Gebot von Bieter 1. Der erwartete Gewinn von Bieter 1 beträgt dann

$$\mathbb{E}\Big[\big(x_1 - \tilde{b}\big)\mathbf{1}_{\tilde{b} > b(Y_1)}\Big] = (x_1 - \tilde{b})F_{Y_1}\big(b^{-1}(\tilde{b})\big),$$

wobei F_{Y_1} die Verteilungsfunktion von Y_1 ist. Für ein Gebot $\tilde{b}$, das den erwarteten Nutzen von Bieter 1 maximiert, erhalten wir damit als notwendige Bedingung, dass

$$\frac{f_{Y_1}\big(b^{-1}(\tilde{b})\big)}{b'\big(b^{-1}(\tilde{b})\big)}(x_1 - \tilde{b}) - F_{Y_1}\big(b^{-1}(\tilde{b})\big) = 0.$$

Damit b ein symmetrisches Gleichgewicht ist, muss insbesondere $b(x_1) = \tilde{b}$ gelten. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(x_1)x_1 &= b(x_1)f_{Y_1}(x_1) + b'(x_1)F_{Y_1}(x_1) \\ &= \big(F_{Y_1}(x_1)b(x_1)\big)'. \end{aligned} \tag{1}$$

Ein Bieter mit Wertschätzung 0 muss im Gleichgewicht auch $b(0) = 0$ bieten. Die Lösung der Differentialgleichung (1) mit diesem Anfangswert ist

$$\begin{aligned} b(x_1) &= \frac{1}{F_{Y_1}(x_1)} \int_0^{x_1} s f_{Y_1}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E}[Y_1 \mid Y_1 < x_1]. \end{aligned}$$

Wir verzichten hier auf den Nachweis, dass diese Strategie auch die notwendigen Optimalitätskriterien erfüllt. □

Englische und Vickrey-Auktion verbindet ebenfalls eine Gemeinsamkeit, auch wenn diese weniger stark ist als die strategische Äquivalenz zwischen Holländischer Auktion und Höchstpreis-Auktion. Wir wollen aber zunächst darauf eingehen, wie die Englische Auktion mathematisch modelliert wird. Wir verwenden hier ein vereinfachtes Modell, bei dem jeder Bieter i zu jedem Zeitpunkt Information darüber hat, wie viele Bieter zu welchem Preis bereits ausgestiegen sind. Die Bietstrategie von Bieter 1 in einer Englischen Auktion kann dann beschrieben werden durch eine Familie von Funktionen

$$\begin{aligned} b_0 &: \mathbb{R}_{\geq 0} &&\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ b_1 &: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} &&\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ &\vdots \\ b_{n-1} &: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-1} &&\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

wobei $b_k(x_1; p_1, \dots, p_k)$ das Gebot von Bieter 1 ist, wenn seine Wertschätzung gleich x_1 ist und bislang k andere Bieter zu den Preispunkten $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ ausgestiegen sind.

Trotz der komplizierten Strategien in der Englischen Auktion gibt es ein einfaches symmetrisches Gleichgewicht, in dem jeder Bieter stets gemäß seiner Wertschätzung bietet. Diese Bietstrategie wird auch als *wahrheitsgemäßes* Bieten bezeichnet, da der Bieter stets seine wahre Wertschätzung preisgibt. Die Vickrey-Auktion hat auch ein entsprechendes Gleichgewicht, in dem jeder Bieter wahrheitsgemäß bietet.

Satz 2. *Für unabhängige Wertschätzungen hat die Englische Auktion ein symmetrisches Gleichgewicht mit* $b_k(x_1; p_1, \dots, p_k) = x_1$ *für alle* $k = 0, \dots, n-1$ *und die Vickrey-Auktion ein symmetrisches Gleichgewicht mit* $b(x_1) = x_1$.

trove.nla.gov.au/newspaper/article/63185004, Public domain

„Bruce auction“, eine Wohltätigkeitsauktion auf dem Melbourne Cricket Ground (*Illustrated Australian News*, Melbourne, 4 Mai 1881, S. 84)

Für den Beweis des Satzes kann man zeigen, dass jeder Bieter nicht davon profitieren kann, nicht wahrheitsgemäß zu bieten. Bietet ein Bieter über seiner wahren Wertschätzung so gewinnt er mehr Auktionen, allerdings ist in den Auktionen, die er zusätzlich gewinnt, seine Wertschätzung geringer als der zu zahlende Preis und sein Nutzen daher negativ. Bietet er unter seiner wahren Wertschätzung, so gewinnt er manche Auktionen nicht, bei denen er durch wahrheitsgemäßes Bieten einen positiven Nutzen erhalten hätte.

Als Korollar von Satz 1 erhalten wir, dass die erwartete Zahlung von Bieter 1 mit Wertschätzung x_1 in der Holländischen Auktion oder der Höchstpreis-Auktion im symmetrischen Gleichgewicht gleich

$$\mathbb{P}[Y_1 < x_1]\,\mathbb{E}[Y_1 \mid Y_1 < x_1] \tag{2}$$

ist. Als Korollar von Satz 2 erhalten wir, dass die erwartete Zahlung von Bieter 1 mit Wertschätzung x_1 in der Englischen Auktion oder der Vickrey-Auktion im symmetrischen Gleichgewicht ebenfalls gleich (2) ist. Da Bieter 1 beliebig gewählt ist, erhalten wir von jedem Bieter die gleiche erwartete Zahlung wie von Bieter 1. Daher führen alle vier in Tabelle 1 aufgeführten Auktionstypen in Erwartung zu der gleichen Zahlung an die Auktionatorin. Diese *Erlös-Äquivalenz* ist eine zentrale Erkenntnis für Auktionen mit privaten unabhängigen Wertschätzungen, für die Vickrey [12] den Nobel-Gedenkpreis für Wirtschaftswissenschaften 1996 erhielt. Myerson [9] verallgemeinert die Erlös-Äquivalenz, indem er beweist, dass alle Auktionen, die stets zur gleichen Allokation führen, auch im Gleichgewicht die gleichen erwarteten Zahlungen an die Auktionatorin haben. Da alle vier hier diskutierten Auktionsformate stets dem Bieter mit dem höchsten Gebot den Zuschlag geben, müssen diese also auch zu den gleichen erwarteten Zahlungen führen. Myerson zeigt zudem, dass für Auktionstypen mit anderen Allokationen höhere erwartete Zahlungen möglich sind. Insbesondere ist für eine Vickrey-Auktion mit einem geeignet gewählten Mindestgebot die erwartete Zahlung an die Auktionatorin höher als ohne Mindestgebot. Dies ist kein Widerspruch zur Erlös-Äquivalenz, da eine Auktion mit Mindestgebot nicht immer das Gut an den Bieter mit dem höchsten Gebot gibt, da für den Fall, dass kein Bieter das Mindestgebot überschreitet, das Gut bei der Auktionatorin verbleibt. Myerson erhielt für diese Erkenntnisse den Nobel-Gedenkpreis für Wirtschaftswissenschaften 2007.

Wir können an dieser Stelle festhalten, dass für die Auktion des unverkorkten Weins alle vier in Tabelle 1 aufgeführten Auktionen im symmetrischen Gleichgewicht in Erwartung zum selben Erlös führen. Die Wahl des Auktionsformats ist daher für den erwarteten Erlös nicht maßgeblich.

Der verkorkte Wein

Das für den unverkorkten Wein angenommene Modell identischer und unabhängiger Wertschätzungen kommt spätestens dort an seine Grenzen, wenn der Korken noch in der Flasche steckt. Da verkorkte im Gegensatz zu unverkorkten Flaschen einen Wiederverkaufswert haben, ist es natürlich anzunehmen, dass sich die Wertschätzung eines Bieters für die Flasche an ihrem Wiederverkaufswert orientiert. Der Wiederverkaufswert ist jedoch für alle Bieter mindestens ähnlich, sodass die Annahme unabhängig verteilter Wertschätzungen nicht länger realistisch ist. Robert Wilson und Paul Milgrom, die Preisträger des Nobel-Gedenkpreises für Wirtschaftswissenschaften 2020 haben maßgeblich bei der Entwicklung und Analyse von Auktionen für solche Fälle mit einer gemeinsamen Wertschätzung und abhängigen Zufallsvariablen beigetragen, sowie neue Auktionsformate entwickelt [11].

Wilson [13, 14] analysiert ein Modell, in dem das Gut für alle Bieter den gleichen unbekannten Wert hat und die Bieter unabhängige private Signale hinsichtlich dieses Werts erhalten. Dieses Modell könnte Anwendung finden, wenn wir annehmen, dass alle Bieter den exakt gleichen Wiederverkaufswert erzielen und auch alle Bieter nur zum Zwecke des Wiederverkaufs an der Auktion teilnehmen. Wir stellen hier das wesentlich allgemeinere Modell affiliierter Signale von Milgrom und Weber [8] vor. In diesem Modell erhält jeder Bieter i ein privates Signal $x_i \sim X_i$; außerdem erhält auch die Auktionatorin ein privates Signal $x_0 \sim X_0$. Die Wertschätzung V_i von Bieter i ist nun jedoch nicht gleich dem Signal X_i wie im Modell privater und unabhängiger Wertschätzungen, sondern allgemein gegeben durch

$$V_i = u(X_i, X_0, X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n),$$

wobei $u : \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine beliebige Funktion ist, die invariant unter Permutation der letzten n Eingänge und in jedem Eingang strikt monoton steigend ist. Für

$$u(x_i, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_i$$

erhalten wird dann das Modell privater Wertschätzungen; für

$$u(x_i, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_0$$

erhalten wir das Modell von Wilson [13, 14]. Die allgemeine Form von u lässt jedoch beliebige Zwischenstufen zwischen diesen beiden Extremen zu; wir nehmen im Folgenden lediglich an, dass $\mathbb{E}[V_i] < \infty$ gilt.

Im Modell privater Wertschätzungen hatten wir vorausgesetzt, dass die Signale $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind. Auch Wilsons Modell macht diese Annahme. Die zweite wesentliche Verallgemeinerung von Milgrom und Weber ist es, die sehr restriktive Annahme stochastisch unabhängiger Signale durch die schwächere Annahme stochastisch affiliierter Signale zu ersetzen, die wir im Folgenden kurz einführen wollen.

Exkurs: Affiliierte Signale

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Menge. Dann ist ihre Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge A heißt *nicht-fallend*, falls ihre Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A$ nicht-fallend ist. Wir definieren die übliche *meet*-Operation $\wedge$ auf $\mathbb{R}^k$ als

$$(x_1, \ldots, x_k) \wedge (y_1, \ldots, y_k) = (\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_k, y_k\})$$

und die *join*-Operation $\vee$ als

$$(x_1, \ldots, x_k) \vee (y_1, \ldots, y_k) = (\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_k, y_k\}).$$

Die Menge $\mathbb{R}^k$ ist offensichtlich abgeschlossen unter $\wedge$ und $\vee$, das heißt, $\mathbb{R}^k$ bildet (zusammen mit diesen Operationen) einen Verband. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^k$ ist ein Unterverband (von $\mathbb{R}^k$), wenn S ebenfalls abgeschlossen unter diesen Operationen ist. Wir nennen nun die reellwertigen Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_k$ *affiliiert*, wenn

$$\mathbb{P}[A \cap B \mid S] \geq \mathbb{P}[A \mid S]\,\mathbb{P}[B \mid S] \qquad (3)$$

für alle nicht-fallenden Mengen A und B und alle Unterverbände S erfüllt ist.

Zur Illustration dieser Definition betrachten wir den Spezialfall diskreter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[z] > 0$ für alle $z \in \mathbb{N}^k$. Für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{N}^k$ mit $x \not\leq y$ und $y \not\leq x$ ist $S = \{x, y, x \vee y, x \wedge y\}$ ein Unterverband. Die Mengen $A = \{z \in \mathbb{R}^k \mid z \geq x\}$ und $B = \{z \in \mathbb{R}^k \mid z \geq y\}$ sind offensichtlich nicht-fallend. Die Affiliierungs-Ungleichung (3) ergibt dann

$$\mathbb{P}[x \vee y \mid S] \geq \mathbb{P}[\{x, x \vee y\} \mid S]\,\mathbb{P}[\{y, x \vee y\} \mid S].$$

Mit dem Satz von Bayes erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$\frac{\mathbb{P}[x \vee y]}{\mathbb{P}[S]} \geq \frac{\mathbb{P}[\{x, x \vee y\}]}{\mathbb{P}[S]} \frac{\mathbb{P}[\{y, x \vee y\}]}{\mathbb{P}[S]}.$$

Dies lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \big(\mathbb{P}[x] + \mathbb{P}[x \vee y] + \mathbb{P}[y] + \mathbb{P}[x \wedge y]\big)\mathbb{P}[x \vee y] \\ \geq \big(\mathbb{P}[x] + \mathbb{P}[x \vee y]\big)\big(\mathbb{P}[y] + \mathbb{P}[x \vee y]\big). \end{aligned}$$

Durch weiteres Vereinfachen erhalten wir die Ungleichung

$$\mathbb{P}[x \vee y]\,\mathbb{P}[x \wedge y] \geq \mathbb{P}[x]\,\mathbb{P}[y].$$

Diese Ungleichung lässt sich so interpretieren, dass die Ereignisse $x \vee y$ und $x \wedge y$, in denen die Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_k$ alle in ihrer höheren Realisierung vorliegen beziehungsweise alle in ihrer niedrigeren Realisierung vorliegen, wahrscheinlicher sind als die Ereignisse x und y, in denen einige Zufallsvariablen in einer hohen und andere in einer niedrigen Realisierung vorliegen. Haben die Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_k$ eine gemeinsame Dichtefunktion f,

Thomas Rowlandson, Christie's Auction Room, 1808

führt diese Interpretation sogar zu einer vollständigen Charakterisierung: $Z_1, \ldots, Z_k$ sind affiliiert genau dann, wenn $f(x \vee y) f(x \wedge y) \geq f(x) f(y)$ für (Lebesque-)fast alle $x, y \in \mathbb{R}^k$ gilt.

Für die weitere Analyse der Auktionsformate benötigen wir das folgende Monotonieresultat für affiliierte Zufallsvariablen, das wir hier ohne Beweis angeben.

Satz 3. *Seien $Z_1, \ldots, Z_k$ affiliiert und $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine nicht-fallende Funktion. Dann ist die Funktion $h : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$h(a_1, b_1; \ldots; a_k, b_k) = \mathbb{E}[H(Z_1, \ldots, Z_k) \mid a_i \leq Z_i \leq b_i \text{ für alle } i]$$

nicht-fallend in allen Argumenten.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die privaten Signale $X_0, X_1, \ldots, X_n$ affiliiert sind, eine gemeinsame Dichtefunktion f haben, und dass f symmetrisch in den letzten n Argumenten ist.

Vickrey-Auktion

Wir wollen zunächst die Vickrey-Auktion für das Modell affiliierter Signale analysieren. Im Falle unabhängiger Wertschätzungen hatten wir in Satz 2 gezeigt, dass wahrheitsgetreues Bieten der eigenen Wertschätzung ein symmetrisches Gleichgewicht ist. Im Modell affiliierter Signale ist allerdings den Bietern nun zum Zeitpunkt des Bietens ihre Wertschätzung gar nicht bekannt, da diese auch von den unbekannten Signalen der anderen Bieter sowie der Auktionatorin abhängen können. Es ist auch einfach nachzuweisen, dass das Bieten der erwarteten Wertschätzung von Bieter 1 gegeben durch $\mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = x_1]$ im Allgemeinen keine Gleichgewichtsstrategie darstellt.[1] Stattdessen kann man zeigen, dass ein symmetrisches Gleichgewicht erreicht wird, wenn Bieter 1 so spielt, also ob das höchste Signal der anderen Bieter ebenfalls gleich dem eigenen Signal x_1 ist. Konkret definieren wir die Funktion $v : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$v(x, y) = \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = x, Y_1 = y].$$

Von zentraler Bedeutung für den folgenden Beweis ist die Beobachtung, dass $v(x,y)$ nicht-fallend in beiden Argumenten ist. Dazu überzeugt man sich zunächst davon, dass aufgrund der Symmetrieannahme an die gemeinsame Dichte f die Zufallsvariablen $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ affiliiert sind genau dann wenn $X_0, X_1, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ affiliiert sind. Die Monotonie von v folgt dann aus Satz 3.

Satz 4. *Für affiliierte Signale hat die Vickrey-Auktion ein symmetrisches Gleichgewicht mit $b(x_1) = v(x_1, x_1)$.*

Beweis. Angenommen alle Bieter $i \neq 1$ spielen gemäß b und Bieter 1 erhält ein beliebiges Signal x_1. Sei $\tilde{b} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Gebot von Bieter 1, das seinen erwarteten Nutzen maximiert. Da b monoton ist, ist das höchste Gebot der Bieter $2, \ldots, n$ gleich $b(Y_1)$. Der erwartete Nutzen von Bieter 1 beim Gebot von $\tilde{b}$ ist dann

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\big(V_1 - b(Y_1)\big)\mathbf{1}_{\tilde{b}>b(Y_1)} \Big| X_1 = x_1\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\big(V_1 - v(Y_1, Y_1)\big)\mathbf{1}_{\tilde{b}>b(Y_1)} \Big| X_1, Y_1\Big]\Big| X_1 = x\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}\Big[(v(X_1, Y_1) - v(Y_1, Y_1))\mathbf{1}_{\tilde{b}>b(Y_1)} \Big| X_1 = x_1\Big].
\end{aligned}$$

Die Realisierungen $y_1 \sim Y_1$ mit $y_1 > x_1$ tragen nicht positiv zum Erwartungswert bei, da v nicht-fallend im ersten Eintrag ist. Umgekehrt tragen die Realisierungen $y_1 \sim Y_1$ mit $y_1 < x_1$ nicht negativ zum Erwartungswert bei. Es ist daher optimal $\tilde{b}$ so zu wählen, dass $\tilde{b} > b(y_1)$ genau dann gilt, wenn $x_1 > y_1$. Da b nicht-fallend ist, impliziert dies $\tilde{b} = b(x_1)$, was zu zeigen war. □

Der begutachtete Wein

Bevor wir weitere Auktionsformate für den Fall der verkorkten Weinflasche diskutieren, wollen wir uns dem Fall der begutachteten verkorkten Weinflasche zuwenden. Dieses Gutachten kann modelliert werden als Qualitätssignal $x_0 \sim X_0$ der Auktionatorin. Wird das Gutachten nicht veröffentlicht, so ist das Signal x_0 den Bietern unbekannt und es stellt sich in der Vickrey-Auktion das in Satz 4 beschriebene symmetrische Gleichgewicht ein. Wird das Gutachten jedoch den Bietern zur Verfügung gestellt, so werden diese ihre Bietstrategie auf das bekannte Signal x_0 bedingen. Definieren wir die Funktion $w: \mathbb{R}^3_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$w(x,y,z) = \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = x,\ Y_1 = y,\ X_0 = z],$$

so kann der folgende Satz analog zu Satz 4 gezeigt werden.

Satz 5. *Für affiliierte Signale hat die Vickrey-Auktion bei Bekanntgabe des Signals x_0 der Auktionatorin ein symmetrisches Gleichgewicht mit $b(x_1) = w(x_1, x_1, x_0)$.*

Wir wollen im Folgenden untersuchen, ob es für die Auktionatorin vorteilhaft ist, ihr Signal bekanntzugeben. Da in der Vickrey-Auktion die Zahlung gleich dem zweithöchsten Gebot ist, gelten für den erwarteten Verkaufspreis bei Nicht-Bekanntgabe R_N und für den erwarteten Verkaufspreis bei Bekanntgabe des Signals R_B die Formeln

$$\begin{aligned}
R_N &= \mathbb{E}[v(Y_1, Y_1) \mid X_1 > Y_1], \\
R_B &= \mathbb{E}[w(Y_1, Y_1, X_0) \mid X_1 > Y_1].
\end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, dass es für die Auktionatorin stets vorteilhaft ist, ihr Signal bekannt zu geben.

Satz 6. $R_B \geq R_N$.

Beweis. Für $x > y$ erhalten wir zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned}
v(y,y) &= \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = y, Y_1 = y] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[V_1 \mid X_1, Y_1, X_0] \mid X_1 = y, Y_1 = y\Big] \\
&= \mathbb{E}[w(X_1, Y_1, X_0) \mid X_1 = y, Y_1 = y] \\
&= \mathbb{E}[w(Y_1, Y_1, X_0) \mid X_1 = y, Y_1 = y] \\
&\leq \mathbb{E}[w(Y_1, Y_1, X_0) \mid X_1 = x, Y_1 = y].
\end{aligned}$$

Die Ungleichung in der obigen Abschätzung folgt aus Satz 3, wobei wir genutzt haben, dass Teilmengen affiliierter Zufallsvariablen ebenfalls affiliiert sind, w nicht-fallend ist und $x > y$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
R_N &= \mathbb{E}[v(Y_1, Y_1) \mid X_1 > Y_1] \\
&\leq \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[w(Y_1, Y_1, X_0) \mid X_1, Y_1] \mid X_1 > Y_1] \\
&= \mathbb{E}[w(Y_1, Y_1, X_0) \mid X_1 > Y_1] = R_I,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Dieses Resultat lässt sich mit dem sogenannten *Linkage*-Prinzip interpretieren. Die symmetrischen Gleichgewichte bei Nicht-Bekanntgabe und Bekanntgabe des Signals x_0 haben die Form

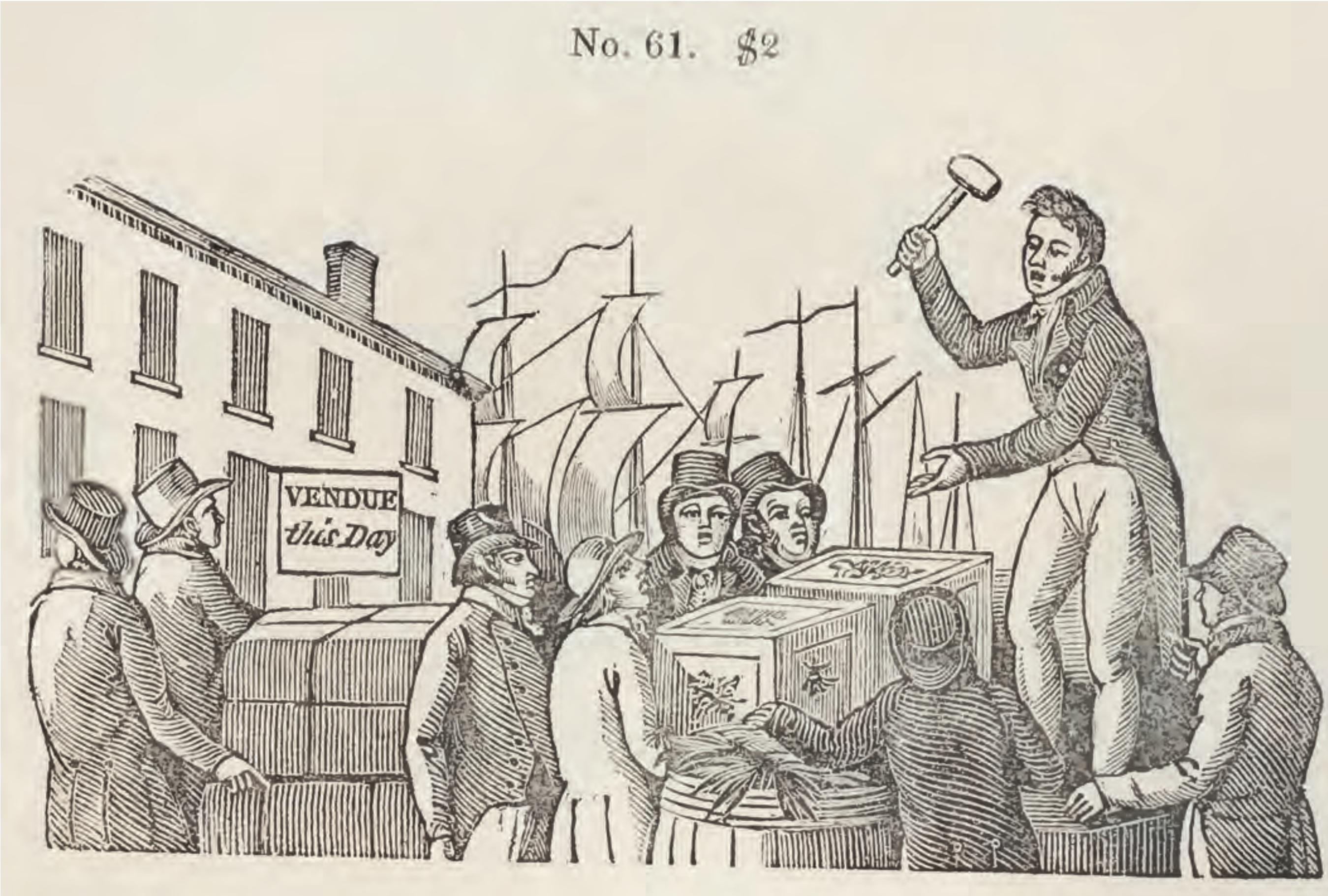
$$b(x_1) = \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = x_1, Y_1 = x_1]$$

beziehungsweise

$$b(x_1) = \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = x_1, Y_1 = x_1, X_0 = x_0].$$

Das heißt, in der Gleichgewichtsstrategie geht Bieter 1 davon aus, dass das Signal des relevanten Mitbieters Y_1 gleich dem eigenen Signal ist. Erhält Bieter 1 den Zuschlag, gilt jedoch $y_1 < x_1$, das heißt in der Bietstrategie wurde das Signal des Mitbieters überschätzt. Für nicht erfolgreiche Gebote verhält es sich umgekehrt. Diese unterschätzen systematisch das Signal des relevanten Mitbewerbers, der dann schließlich auch den Zuschlag bekommt. Würden also erfolglose Bieter mehr Informationen über die Signale ihrer Mitbieter bekommen, so steigen deren Gebote aufgrund der Monotonie von v beziehungsweise w. Da in der Vickrey-Auktion der Preis durch ein erfolgloses Gebot bestimmt wird, führt also mehr Information zu höheren Geboten der erfolglosen Bewerber und damit auch zu höheren Preisen.

Hat die Auktionatorin also vor der Versteigerung der Weinflasche ein Gutachten anfertigen lassen, so lohnt es sich für die Auktionatorin, sich darauf festzulegen, dass Gutachten auch zu veröffentlichen, weil dabei in Erwartung (bevor der Inhalt des Gutachtens feststeht) ein höherer Erlös erzielt wird. Im Folgenden wollen wir noch untersuchen, welche Auktionsform für die verkorkte Weinflasche zu wählen ist. Zum Vergleich mit der Vickrey-Auktion wollen wir uns daher nun der Englischen Auktion widmen.



Auktionswerbung aus dem *Specimen of printing types and ornaments from the letter-foundry of J. Howe & Co.*, Philadelphia 1830

Englische Auktion
Für zwei Bieter sind Englische Auktion und Vickrey-Auktion strategisch äquivalent. Für mehr als zwei Bieter können die verbleibenden Bieter aus der Anzahl der ausgeschiedenen Bieter und den Preisen, zu denen diese ausschieden, Rückschlüsse auf deren Signale ziehen. In einem symmetrischen Gleichgewicht b, kann jeder verbleibende Bieter aus den Preisen, bei denen ein Bieter ausgestiegen ist, dessen Signal sogar vollständig berechnen. Mit dieser Einsicht lässt sich zeigen, dass die folgende rekursiv definierte Strategie ein symmetrisches Gleichgewicht ist.

Satz 7. *Für affiliierte Signale hat die Englische Auktion ein symmetrisches Gleichgewicht mit*

$$\begin{aligned} b_0(x_1) &= \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = Y_1 = \cdots = Y_{n-k} = x_1], \\ b_k(x_1; p_1, \ldots, p_k) &= \mathbb{E}[V_1 \mid X_1 = Y_1 = \cdots = Y_{n-k-1} = x_1, \\ &\qquad b_{k-1}(Y_{n-k}; p_1, \ldots, p_{k-1}) = p_k, \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad b_0(Y_{n-1}) = p_1] \end{aligned}$$

für alle $k = 1, \ldots, n-2$.

In der Englischen Auktion scheiden zunächst $n-2$ Bieter aus und anschließend verhalten sich die verbleibenden zwei Bieter wie in einer Vickrey-Auktion. Der einzige Unterschied ist, dass die verbleibenden zwei Bieter die Realisierungen der $n-2$ vorher ausgeschiedenen Bewerber kennen und daher ihre Gebote in der letzten Phase darauf bedingen können. Diese zusätzlichen Informationen führen aufgrund des Linkage-Prinzips zu höheren unterlegenen Geboten. Man kann daher mit ähnlichen Argumenten wie für den Beweis von Satz 6 zeigen, dass die Englische Auktion in Erwartung für die Auktionatorin einen höheren Preis erwirtschaftet als die Vickrey-Auktion. Darüber hinaus lässt sich mit analogen Argumenten zeigen, dass es für die Auktionatorin auch in der Englischen Auktion vorteilhaft ist, ihr eigenes Signal bekannt zu machen.

Wir können daher festhalten, dass es sich für die Versteigerung einer verkorkten Weinflasche anbietet, diese in einer Englischen Auktion zu versteigern, da diese in Erwartung einen höheren Erlös bringt als die Vickrey-Auktion.

Zusammenfassung

Mit den hier skizzierten Ergebnissen haben wir gezeigt, dass für die Versteigerung der offenen Flasche Wein die Wahl der richtigen Auktionsform nicht von großer Bedeutung ist, da zumindest in der theoretischen Analyse alle vier vorgestellten Auktionsformen den gleichen erwarteten Preis erlösen. Bleibt die Flasche jedoch verkorkt und nehmen die Bieter mit dem Ziel des Wiederverkaufs an der Auktion teil, so sind die Wertschätzungen der Bieter nicht mehr unabhängig und es bietet sich ein anderes Bild. Hier ist die Englische Auktion der Vickrey-Auktion vorzuziehen, da diese den Bietern mehr Informationen bietet und daher zu höheren unterlegenen Geboten und damit höheren Preisen führt.[2] Liegen der Auktionatorin zusätzliche Informationen hinsichtlich der Güte des verkauften Produkts vor, ist es günstig, diese mit den Bietern zu teilen.

Insbesondere die Interpretation dieser Ergebnisse mit dem Wirken des Linkage-Prinzips hat dazu geführt, dass wichtige Versteigerungen, bei denen davon ausgegangen werden kann, dass die Bieter der erfolgreichen Ersteigerung ähnliche Werte zuschreiben, häufig in Form einer aufsteigenden Auktion durchgeführt werden. Beispielhaft sei hier die Auktion der Federal Communications Commission (FCC) im Jahr 1994 genannt, in der Mobilfunklizenzen in den USA versteigert wurden. Diese Auktion ist wesentlich komplizierter als die hier analysierten Formate, da sowohl mehrere Frequenzbänder als auch mehrere Regionen gleichzeitig versteigert werden und die Bieter an verschiedenen Kombinationen dieser Lizenzen interessiert sind. Das Design dieser Auktion geht auf Wilson, Milgrom und McAfee zurück (Milgrom [7]). Inspiriert durch das Linkage-Prinzip wurde die Auktion in mehreren Runden durchgeführt, in denen die Preise für verschiedene Lizenzen erhöht wurden. In dieser und folgenden Auktion wurden die geschätzten Einnahmen von 10 Milliarden US-Dollar deutlich überschritten (McAfee und McMillan [6]). Die vom Design ähnliche Versteigerung von UMTS-Lizenzen führte 2000 in Deutschland zu Einnahmen von etwa 50 Milliarden Euro. Insgesamt haben diese Auktionsformate bei der Versteigerung von Mobilfunklizenzen in verschiedenen Ländern über Hundert Milliarden US-Dollar erlöst (Klemperer [5]).

Danksagung
Gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen der Exzellenzstrategie des Bundes und der Länder – Das Forschungszentrum der Berliner Mathematik MATH+ (EXC-2046/1, Projektnummer: 390685689).

Anmerkungen

1. Dies ist zum Beispiel für die sogenannte Geldbörsen-Auktion mit $n = 2$, X_1 und X_2 unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$ und $V_1 = V_2 = X_1 + X_2$ einfach nachzuweisen (Klemperer [4]).
2. Milgrom und Weber [8] zeigen darüber hinaus, dass Holländische Auktion und Höchstpreis-Auktion sogar der Vickrey-Auktion unterlegen sind.

Literatur

[1] John C. Harsanyi. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part I. *Management Science*, 14(3):159–182, 1967.

[2] John C. Harsanyi. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part II. *Management Science*, 14(5):320–334, 1968.

[3] John C. Harsanyi. Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part III. *Management Science*, 14(7):486–502, 1968.

[4] Paul Klemperer. Auctions with almost common values: The 'Wallet Game' and its applications. *European Economic Review*, 42:757–769, 1998.

[5] Paul Klemperer. How (not) to run auctions: The European 3G telecom auctions. *Euopean Economic Review*, 46:829–845, 2002.

[6] R. Preston McAfee and John McMillan. Analyzing the airwaves auction. *Journal of Economic Perspectives*, 10(1):159–175.

[7] Paul R. Milgrom. *Putting Auction Theory To Work*. Cambridge University Press, 2004.

[8] Paul R. Milgrom and Robert J. Weber. A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, 50:1089–1122, 1982.

[9] Roger B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6:58–73, 1981.

[10] John F. Nash. Equilibrium points in *n*-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1):48–49, 1950.

[11] Nobel Media AB 2021. Advanced information: Improvements to auction theory and inventions of new auction formats. https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2020/advanced-information, Accessed Feb. 12, 2021.

[12] William Vickrey. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, 16:8–37, 1961.

[13] Robert B. Wilson. Competitive bidding with disparate information. *Management Science*, 15:446–48, 1969.

[14] Robert B. Wilson. A bidding model of perfect competition. *Review of Economic Studies*, 44:511–518, 1977.

Prof. Dr. Max Klimm, Technische Universität Berlin,
Institut für Mathematik, MA 5-2,
Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
klimm@tu-berlin.de

Max Klimm promovierte 2012 an der Technischen Universität Berlin zu einer Arbeit über kombinatorische Spiele. Danach war er Nachwuchsgruppenleiter am Einstein-Zentrum für Mathematik und Juniorprofessor für Operations Research an der Humboldt-Universität zu Berlin. Seit 2020 hat er eine Juniorprofessur für Diskrete Optimierung an der Technischen Universität Berlin inne. Seine Forschungsschwerpunkte liegen in der algorithmischen Spieltheorie, im Mechanism Design, in der diskreten Optimierung und der Optimierung unter Unsicherheit.