Makroskopische Invarianten von Mannigfaltigkeiten

Alexander Engel

Die Skalarkrümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine lokale Größe, welche definiert werden kann indem man sich die Volumina von kleinen Bällen in der Mannigfaltigkeit anschaut. Die makroskopische Dimension hingegen ist eine globale Invariante für deren Definition man die Mannigfaltigkeit als Ganzes betrachten muss. Diese beiden Größen werden durch eine Vermutung von Gromov in Beziehung zueinander gesetzt und sind auch Teil meines DFG-Forschungsprojektes. In diesem Projekt untersuche ich einen Zugang zu dieser Vermutung, der auf einer weiteren Invariante beruht, die eine Brücke zwischen der Skalarkrümmung und der makroskopischen Dimension schlagen soll: die makroskopische Skalarkrümmung.

In meinem Projekt innerhalb des Schwerpunktprogramms SPP 2026 untersuche ich verschiedene Invarianten nichtkompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Um die Diskussion anschaulich zu halten, konzentrieren wir uns auf Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen Raum. In Abbildung 1 sind zwei unendlich große Rotationsflächen angedeutet (rotiert um die grün gezeichnete x-Achse), links eine ‚flache Schüssel' (das Wort ‚flach' benutze ich hier umgangssprachlich, um eine nur leicht gewölbte Schüssel zu beschreiben – rein mathematisch, im Sinne der Gauß-Krümmung, ist diese Fläche nicht flach) und rechts eine ‚lange Zigarre'. Später wird es für uns wichtig sein, dass wir die lange Zigarre so konstruieren, dass sie nicht beliebig dick wird.

Als glatte Mannigfaltigkeiten ohne zusätzliche Struktur betrachtet sind die beiden Flächen ‚gleich' (d. h. diffeomorph). Aber ihre Geometrie, welche sich aus der jeweils gegebenen Einbettung in den Euklidischen Raum ergibt, ist sehr unterschiedlich. Dies wollen wir anhand der makroskopischen Dimension diskutieren.

Makroskopische Dimension

Die makroskopische Dimension, eingeführt von Gromov, ist eine Invariante, die für beliebige metrische Räume definiert werden kann. Wir sagen, dass die makroskopische Dimension eines metrischen Raumes X nach oben durch k beschränkt ist, falls es eine stetige Abbildung $f\colon X \to N^k$ in einen k-dimensionalen simplizialen Komplex N^k gibt mit einer einheitlichen Schranke an die Durchmesser ihrer Urbilder (d. h. es gibt ein $C < \infty$, so dass $\operatorname{diam}(f^{-1}(p)) < C$ für alle $p \in N^k$ gilt). Die kleinst mögliche solche Dimension k ist dann die makroskopische Dimension von X.

Bei der flachen Schüssel der Abbildung betrachten wir nun die Projektion auf die y-z-Ebene (d. h. wir drücken die Schüssel nach links flach). Ist die Schüssel nur leicht gewölbt, so ist diese Abbildung auf die Ebene eine bijektive Lipschitz-Abbildung deren Inverse ebenfalls Lipschitz ist. Man kann sich schnell selbst davon überzeugen, dass solche Abbildungen die makroskopische Dimension erhalten, und somit ist die makroskopische Dimension der flachen Schüssel gleich 2 (da dies für die Euklidische Ebene gilt). Bei der langen Zigarre hingegen können wir die orthogonale Projektion auf die Rotationsachse betrachten. Wenn die lange Zigarre so in den Euklidischen Raum eingebettet ist, dass sie nicht beliebig dick wird, können wir mit Hilfe dieser Projektion ihre makroskopische Dimension nach oben gegen 1 abschätzen.

Skalarkrümmung

Die Skalarkrümmung R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) wird definiert als die doppelte Kontraktion des Riemannschen Krümmungstensors:

$$R := g^{ab} g^{cd} \mathrm{Riem}_{cadb}.$$

Dies ist eine Funktion auf der Mannigfaltigkeit und hat die folgende geometrische Interpretation. Für einen Punkt $p \in M$ betrachten wir das Volumen des geodätischen Balls $B_\varepsilon(p) \subset M$ und setzen es in Relation mit dem Volumen eines Balls vom selben Radius im Euklidischen Raum (von gleicher Dimension wie die Mannigfaltigkeit). Asymptotisch für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich dann

$$\frac{\mathrm{vol}(B_\varepsilon(p) \subset M)}{\mathrm{vol}(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n)} = 1 - \frac{R(p)}{6(n+2)} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \tag{1}$$

Hat also zum Beispiel die Riemannsche Mannigfaltigkeit in dem Punkte p positive Skalarkrümmung, so sind die Volumina von kleinen geodätischen Bällen um p kleiner als die Volumina entsprechender Bälle im Euklidischen Raum.

Die Skalarkrümmung hat durch folgende Vermutung von Gromov eine Verbindung zu der makroskopischen Dimension: Ist (M, g) eine vollständige, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Skalarkrümmung gleichmäßig positiv ist (d. h. $R(p) \geq \delta > 0$ für alle $p \in M$ und für ein $\delta > 0$ erfüllt), so ist die makroskopische Dimension von M maximal $n-2$. Diese Vermutung ist ein starkes lokal-zu-global-Prinzip, da die Skalarkrümmung an einem Punkt p nur von der Geometrie von M in einer kleinen Umgebung von p abhängt, während die makroskopische Dimension die Eigenschaft hat, das wir zum Beispiel die Geometrie von M in einem Gebiet beschränkten Durchmessers beliebig ändern können ohne das sich die makroskopische Dimension ändert.

Die beiden zu Anfangs besprochenen Rotationsflächen veranschaulichen die Vermutung recht gut. Die flache Schüs-

DOI 10.1515/dmvm-2020-0066

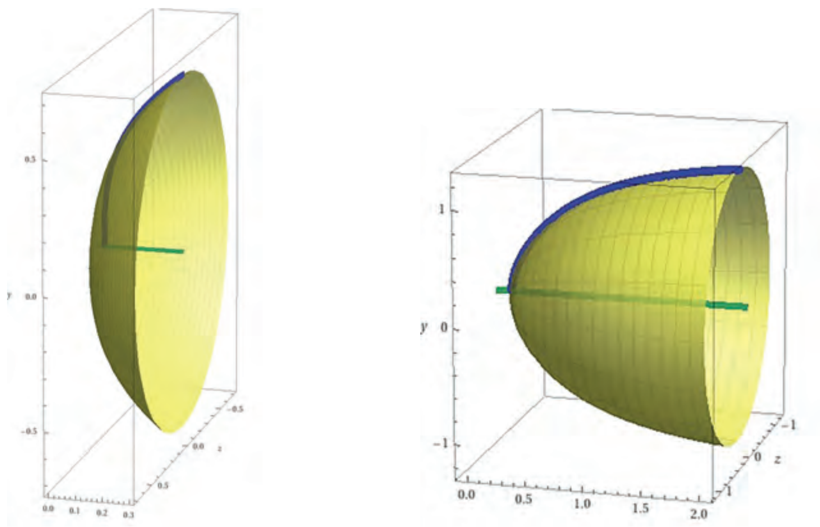

Abbildung 1. Eine ‚flache Schüssel' und eine ‚lange Zigarre' (erstellt mit Wolfram|Alpha)

sel hat zwar positive Skalarkrümmung, aber diese ist nicht gleichmäßig von der Null wegbeschränkt (ihre Skalarkrümmung geht gegen Null je weiter wir nach außen gehen). Versuchen wir jetzt die Schüssel so weit zu verbiegen, dass sie gleichmäßig positive Skalarkrümmung kriegt, so erhalten wir eine lange Zigarre und die makroskopische Dimension fällt in der Tat.

(Hier habe ich jetzt etwas gelogen, denn wir müssen eigentlich eine 3-dimensionale lange Zigarre betrachten damit sie gleichmäßig positive Skalarkrümmung hat.)

Makroskopische Skalarkrümmung

In meinem Projekt verfolge ich eine Variante von Gromovs Vermutung. Die Idee dahinter ist es die Skalarkrümmung durch eine ähnliche Größe, die weniger lokal ist, zu ersetzen, um somit das starke lokal-zu-global-Prinzip der ursprünglichen Vermutung abzuschwächen.

Wir benutzen folgende Definition von Guth. Es seien $p \in M$ und $r > 0$ fixiert, und bezeichnen wir mit $\tilde{p}$ eine Hochhebung von p in die universelle Überlagerung X von M. Die makroskopische Skalarkrümmung $R_r(p)$ von M ist dann definiert als diejenige Zahl $S \in \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{vol}(B_r(\tilde{p}) \subset X) = \mathrm{vol}_r(S)$ gilt, wobei hier $\mathrm{vol}_r(S)$ das Volumen von Bällen von Radius r in einer einfach-zusammenhängenden Raumform von konstanter Schnittkrümmung und mit Skalarkrümmung S bezeichnet. Aus (1) ergibt sich dann

$$\lim_{r \to 0} R_r(p) = R(p),$$

d. h. die makroskopische Skalarkrümmung kann in der Tat als eine weniger lokale Variante der üblichen Skalarkrümmung angesehen werden.

Die entsprechende Variante von Gromovs Vermutung, die wesentlicher Teil meines Forschungsprojektes ist, lautet dann: Ist (M, g) eine vollständige, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit deren makroskopische Skalarkrümmung R_r für ein $r > 0$ gleichmäßig positiv ist, so ist die makroskopische Dimension von M maximal $n - 2$.

Einbindung ins Schwerpunktprogramm SPP 2026

Ich hatte großes Glück, dass das Schwerpunktprogramm gerade in der Zeit meiner PostDoc-Phase zustande gekommen ist. Thematisch trifft es meine eigene Forschungsausrichtung sehr gut und so war es für mich von Anfang an klar, dass ich ein Teil des Programms sein möchte. Es hat mich dazu motiviert eigene DFG-Anträge zu schreiben, was ich wohl sonst, zumindest so früh in meiner Karriere, nicht getan hätte. Da es heutzutage immer wichtiger wird, Erfahrung beim Einwerben von Drittmitteln zu haben, habe ich insofern sehr davon profitiert. In der ersten Bewilligungsphase habe ich mit Christopher Wulff als Co-Projektleiter zum Beispiel Gelder für Forschungsreisen bewilligt bekommen und in der zweiten Phase sogar ein eigenes Projekt mit Personalmitteln für eine eigene Stelle einwerben können.

Ebenso war es sehr nützlich für mich, dass über das Schwerpunktprogramm viele Veranstaltungen wie Konferenzen, Workshops und Seminare organisiert wurden, welche oft thematisch für mich interessant waren, und über die Webseite gebündelt angekündigt wurden. Auch ich habe mit Christopher diese Möglichkeiten genutzt, um Veranstaltungen wie ein Blockseminar und ein Forschungstreffen mit einem japanischen Mathematiker in der ersten Bewilligungsphase zu organisieren. Sofern es die pandemische

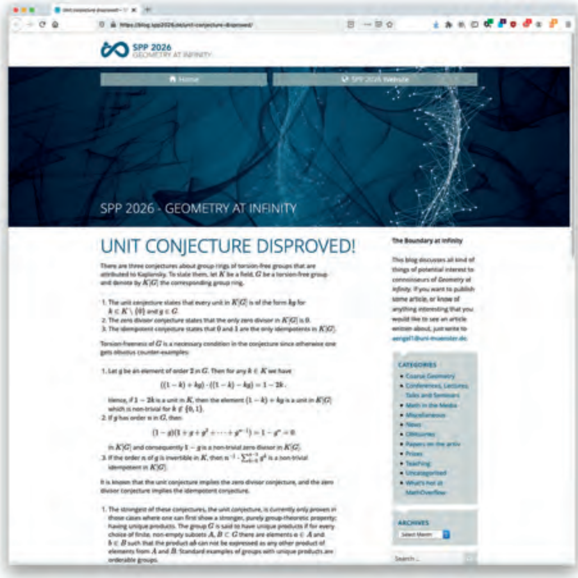

Abbildung 2. Blog des Schwerpunktprogramms SPP 2026

Lage wieder zulässt, werde ich auch innerhalb des neuen Projektes Workshops organisieren.

Zu guter Letzt möchte ich noch auf den Blog des Schwerpunktprogramms SPP 2026 hinweisen, für den ich 2018 die Verantwortung übernommen habe: blog.spp2026.de. Dort schreibe ich regelmäßig Beiträge zu neuesten Entwicklungen auf meinen Forschungsgebieten, zur Hochschuldidaktik der Mathematik und natürlich auch einfach nur zu aktuellen Entwicklungen und Neuigkeiten in der mathematischen Welt.

Dr. Alexander Engel,
Mathematisches Institut,
Westfälische Wilhelms-Universität Münster,
Einsteinstraße 62, 48149 Münster
aengel1@uni-muenster.de

Alexander Engel studierte in München, promovierte in Augsburg und war Postdoktorand in Regensburg. Weitere Stationen waren ein Forschungsaufenthalt an der Texas A&M University sowie das Max-Planck-Institut in Bonn, bevor er jetzt in Münster Projektleiter eines DFG-Projektes wurde. Seine Forschungsgebiete sind die Indextheorie, Grobgeometrie sowie die geometrische Gruppentheorie.