

Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

Textaufgaben im Abitur sollen ohne gekünstelten Kontext verständlich formuliert werden.

Aus der Gemeinsamen Presseinformation der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts „Zur aktuellen Diskussion über die Qualität des Mathematikunterrichts“ (20. 4. 2017)

Eine Aufgabe zum Additionstheorem

Diese Aufgabe stammt aus einer Abschlussprüfung für zehnte Klassen (2016):

Mittlerer Schulabschluss und erweiterte Berufsbildungsreife 2016 Aufgaben

Aufgabe 7: Spreewaldwiese (7 Punkte)

Im Spreewald gibt es viele sumpfige Wiesen.
Um vom Ausflugslokal A zur Brücke bei D zu gelangen, musste man bisher am Bioladen C vorbei.

a) Berechnen Sie die Länge des Weges, den ein Besucher vom Ausflugslokal A über den Bioladen C zur Brücke bei D bisher zurücklegen musste. (1 P)

Fairerweise muss man ergänzen, dass die Aufgabe aus drei Teilaufgaben bestand und man für die beiden anderen schon noch mehr als nur die Regeln der Addition brauchte.

Eine (ökonomische?) Nutzenfunktion

Die Weglänge zur Spreewaldbrücke mag eher Grundschulniveau gewesen sein, immerhin war sie aber „ohne gekünstelten Kontext formuliert“. Wirklich seltsame Praxisbezüge findet man dagegen manchmal in Lehrbüchern der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Die folgende Aufgabe stammt aus einem 2008 in 5. Auflage erschienenen Lehrbuch, sie wird dort im Kapitel „Mehrdimensionale Optimierung mit Nebenbedingungen“ gestellt und mit einer ausführlichen Musterlösung versehen:

Ein Student habe (am Abend nach einer Klausur) die folgende Nutzenfunktion für den Konsum von Zigaretten x , Bier y und Caipirinha z :

$$U(x, y, z) = 6z^2y + 2x^3.$$

Er nimmt sich vor, nicht mehr als 300 Euro auszugeben, um die (hoffentlich) bestandene Klausur zu feiern.

- Erklären Sie zunächst verbal, warum der Student entweder auf Alkohol ganz verzichten oder sowohl Bier wie auch Cocktails trinken wird!
- Warum wird er sein Budget bei dieser Nutzenfunktion vollständig ausschöpfen?
- Bestimmen Sie das Nutzenoptimum mit Hilfe der Methode der Lagrangemultiplikatoren unter der Budgetrestriktion, wenn ein Bier 6 Euro, Zigaretten auch 6 Euro und ein Caipirinha 12 Euro kosten.
- Kann er sein Nutzenoptimum tatsächlich erreichen?

Aufgrund welchen Axioms berechnet sich der Nutzen von Zigaretten, Bier und Caipirinha als $U(x, y, z) = 6z^2y + 2x^3$? Und ist das die Nutzenfunktion des Studenten oder die des Wirts? (Und wie realistisch ist ein studentisches Budget von 300 Euro?)

Die Aufgabe wird in der Musterlösung mit dem Lagrange-Ansatz gelöst, was – nebenbei bemerkt – in der Praxis wohl niemand tun würde, da man das Maximum dieser Optimierungsaufgabe schon durch kurzes Anschauen der Nutzenfunktion findet. Das Ergebnis, also dass der größtmögliche Nutzen bei 50 Schachteln Zigaretten und null Alkohol eintritt, deuten die Autoren der Musterlösung dann aber nicht etwa als Indiz für den zweifelhaften Nutzen ihrer Nutzenfunktion.

Das Problem, das zu diesem Ergebnis führt, ist der zunehmende Grenznutzen der einzelnen Güter[.]

lernen die Studenten stattdessen.

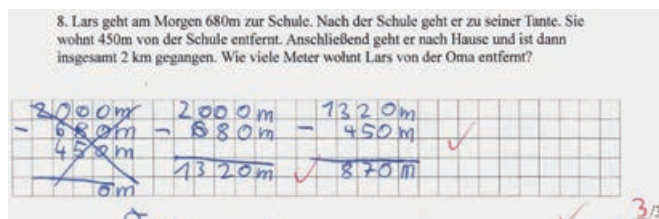


Foto: Jared Preston/CC BY-SA 3.0

Optimale Lösung: 50 Schachteln Zigaretten zu 6 Euro

Wo wohnt die Großmutter?

Nicht zu viel, sondern zu wenig Text hatte diese Aufgabe, die mir Dr. Carsten Franke (Bempflingen) aus der Mathematik-Klausur seines damals neunjährigen Sohnes (mit als „richtig“ bewerteter Lösung) zugeschickt hat:



Eine Möglichkeit wäre, dass die zweite Frau des Großvaters eine Schwester hat, welche mit dem Sohn des Großvaters aus dessen erster Ehe verheiratet ist, womit für deren Sohn dann die Tante auch die Oma wäre. Naheliegender für eine Aufgabe in der dritten Klasse wäre die Deutung, dass Lars morgens von der Oma gekommen sein muss, die wegen der angegebenen Entfernungen wohl weder bei der Tante noch bei den Eltern wohnen soll. (Wobei die zweite Möglichkeit aus der Aufgabenstellung nicht ausgeschlossen werden kann, denn schließlich gibt es dank der Ungleichung $450 + 680 \geq 870$ ja Dreiecke mit den entsprechenden Seitenlängen.) Allerdings wäre die richtige Lösung dann nicht 870.

Kategorienmodelle

2019 gab es Diskussionen und sogar Petitionen zu Textaufgaben in den Abiturklausuren verschiedener Bundesländer, die zwar mathematisch machbar gewesen seien, die Schüler aber durch zu viel überflüssigen Text verwirrt hätten. Erfolglos blieb in Bayern eine Petition mit 73 000 Unterschriften (von 37 000 bayrischen Abiturienten); Vorwurf der Petenten war, die Aufgaben wären zu

textlastig gewesen, Lesen und Verstehen hätten deshalb zu viel Zeit verbraucht. Es ging um eine Losverkäuferin.

Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“, „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

Wiederholt werden – zumindest für einen Teil der Abiturienten – musste dagegen im selben Jahr in Baden-Württemberg die Abiturprüfung im Fach Gemeinschaftskunde. Grund: In einer der Aufgaben kam das Wort „Kategorienmodell“ vor, das es aber – außer im Bildungsplan des Bundeslandes – nicht gibt.

Eigentlich ist ja die Mathematik dafür bekannt, Begriffe aus der Umgangssprache zu nehmen, sie mit neuen Bedeutungen zu füllen und durch Kombination solcher Begriffe auch ganz neue Worte zu schaffen wie etwa Hauptfaserbündel oder lokale Trivialisierbarkeit. Wenig überraschend gibt es also in der Mathematik nicht nur Kategorien und Modelle, sondern auch Modellkategorien. Den Begriff des Kategorienmodells kennt aber nicht einmal die Mathematik.

Perkolation in der Schule?

Kritik an Textaufgaben mit künstlichem Anwendungsbezug fand sich auch im SPIEGEL vom 10. Oktober in einem vielbeachteten Interview mit Norbert Henze.

SPIEGEL: Herr Henze, täglich wird die Öffentlichkeit mit neuen Corona-Statistiken bombardiert, nach der Reproduktionszahl R ging es viel um dem Dispersionsfaktor k und um die sogenannte Perkolation. Wieso haben wir nichts von alledem in der Schule gelernt?

Henze: Machen wir uns nichts vor, schon die genauere Analyse der Reproduktionszahl würde den Schulunterricht überfrachten. Ich wäre schon heilfroh, wenn wir alle Schüler wenigstens mit einem soliden statistischen Grundverständnis entlassen könnten. In den Gymnasien wurde in der Mathematik über Jahrzehnte „intellektuell abgerüstet“, was Inhalte betrifft. Mit dem wenigen Wissen, das jetzt noch vorhanden ist, wird oft durch umfangreiche Textaufgaben, in denen an den Haaren herbeigezogener vermeintlicher Anwendungsbezug verpackt ist, Stoff der Mittelstufe auf Abiturniveau gehoben.

Ohne Grundbildung könne man keine Corona-Statistiken verstehen; statistische Analphabeten seien Demagogen hilflos ausgeliefert und glaubten zum Beispiel an eine Corona-Diktatur.

Klagen

Ganz anders angelegt ist die Klage von Gottfried Curio, Mathematiker, Physiker und mit 41,23 Prozent im Dezember 2019 fast zum Vorsitzenden der AfD gewählt. In einer Rede am 19. Juli 2019 in Markkleeberg äußerte er sich zu „Bildungsapokalypse und Werteverfall in Schulen und Kindergärten“:

Die Schüler verlassen die Schule, ohne dass sie je von Walter von der Vogelweide, Hölderlin, Fontane irgendwas gelesen haben, dafür aber über Furcht und Elend im dritten Reich; ohne einen Überblick über deutsche Geschichte gehabt zu haben, ohne einen philosophischen Text durchdrungen zu haben, ohne Kontakt gehabt zu haben zu Bach, Mozart und Beethoven, Wagner; sie wissen nicht mehr, warum Pfingsten ein Feiertag ist, was Luther eigentlich wollte, dafür kennen sie aber die fünf Säulen des Islam.

Nun war Herr Curio ja vor seiner politischen Karriere ein durchaus anerkannter mathematischer Physiker. Da fragt man sich, warum Mathematik und Naturwissenschaften in seinen Reden so überhaupt nicht vorkommen – warum er zum Beispiel nicht beklagt, dass deutsche Schüler nur noch arabische Zahlen lernen statt der traditionsreichen römischen oder der unserem Wesen viel besser entsprechenden germanischen Zahlzeichen. Anders als die Klagen aus seiner Wahlkampfrede wäre dieser Vorwurf ja zumindest in der Sache korrekt.

Im Keller

Eher etwas über das Ziel hinausgeschossen ist Gunnar Hinck, bisher nicht gerade durch Beiträge zu naturwissenschaftlichen Themen aufgefallener taz-Kolumnist, in seiner Polemik „Unsere Mathe-Verachtung ist tödlich“ vom 24. März letzten Jahres, also einige Wochen nach Ausbruch der Corona-Pandemie:

Wenn nicht gerade eine Pandemie ausbricht, sind Virologen, Naturwissenschaftler generell sowie auch Mathematiker die Nerds, denen man nicht richtig zuhört. Wäre Deutschland ein Haus, würden die Christian Drostens im Keller leben. Abgeschlossen forschen sie vor sich hin, während die Bewohner der oberen Etagen durchaus froh sind, dass sie da unten leben -- man könnte sie ja mal brauchen. [...]

Diese Haltung zeigt sich auch bei vielen, die derzeit an den föderalen Hebeln sitzen. Sie mögen zwar Goethe kennen, konnten sich aber meist nicht

vorstellen, dass bei einer Exponentialkurve eine anfangs scheinbar harmlose Zunahme der Infizierten plötzlich so durch die Decke schießt. Das hat Folgen, die derzeit Tote fordern.

Das stimmte sicher schon damals nicht mehr. Bestätigung kam aber zwei Tage an selber Stelle von seiner Kolumnistenkollegin Pia Frankenberg (im Hauptberuf Filmproduzentin):

Als seit Langem geoutete Matheniete gehe ich gerade durch harte Zeiten. Ich bin in meiner eigenen Idiotenquarantäne. Wie soll man denn bei all den auf WhatsApp und sonstigen Kanälen geführten Fachgesprächen zum „exponentiellen Anstieg“ von Viren mithalten, wenn man schon an einfacher Prozentrechnung scheitert?

begann sie ihre Kolumne „Exponentiell was?“ vom 26. März.

Mathematische Grundbildung

Eine Diplomarbeit „Verwendungsprofil des Wirtschaftsinformatikers“ und eine Dissertation über ein „Modell, mit dem sich die Geschwindigkeit von Computerprogrammen vorhersagen lässt“ (so stand es jedenfalls in der FAZ) sind freilich auch keine Garantie für korrekten Umgang mit Zahlen.

Dem Wirtschaftsinformatiker Markus mussten wir einmal sogar erklären, wie ein Algorithmus funktioniert.

berichtet Wirecard-Manager Jörn Leogrande im SPIEGEL vom 6. Februar über seinen (damals bereits inhaftierten) Chef Markus Braun. Mit der „Analytics Suite“ wollte Wirecard seinerzeit über selbstlernende Algorithmen den Bereich Zahlungsausfall und Betrugsprävention beim Händler verbessern.



Hier kannte man keine Algorithmen. Das Wirecard-Hauptquartier in Aschheim bei München.

Ein Rätsel

Auch der Satz des Pythagoras kann als Algorithmus verwendet werden. Im Weimar-Tatort „Der letzte Schrey“ am 1. Juni bei Minute 63:

Die beiden müssen bitte rund um die Uhr beobachtet werden.

Schaff ich. Kein Problem.

Lupo! Die sind zu zweit! Das heißt, die können in zwei verschiedene Richtungen.

Eh-hm, das ist ein Rätsel. Dann gehen sie vermutlich auch gleich schnell, einer nach links, einer nach rechts. Dann geh ich nach oben wie in einem gleichschenkligen Dreieck. Satz des Pythagoras.

Erklärt mir jemand, wie hier der Satz des Pythagoras ins Spiel kommt?

Wer ist der Täter?



Kowalewskische Kreisel

Auf der Suche nach dem Täter war man wohl auch am 11. Dezember beim SWR. In der Transkription der Sendung „Sofja Kowalewskaja – Erste Mathematik-Professorin der Welt“ liest man über Kowalewskajas Integration der Kreiselgleichung:

Erzählerin: [...] Es wird ihr größter wissenschaftlicher Erfolg. [...]

O-Ton 15 – Wilderich Tuschmann: [...] Nehmen Sie ruhig den Kinderkreisel und jetzt kleben Sie irgendwo an die Seite was drauf, meinetwegen ein dickes Stück Knete, dann wird der auf einmal anfangen zu eiern bis zum geht nicht mehr und ein völlig unkoordiniertes Bewegungsverhalten haben.

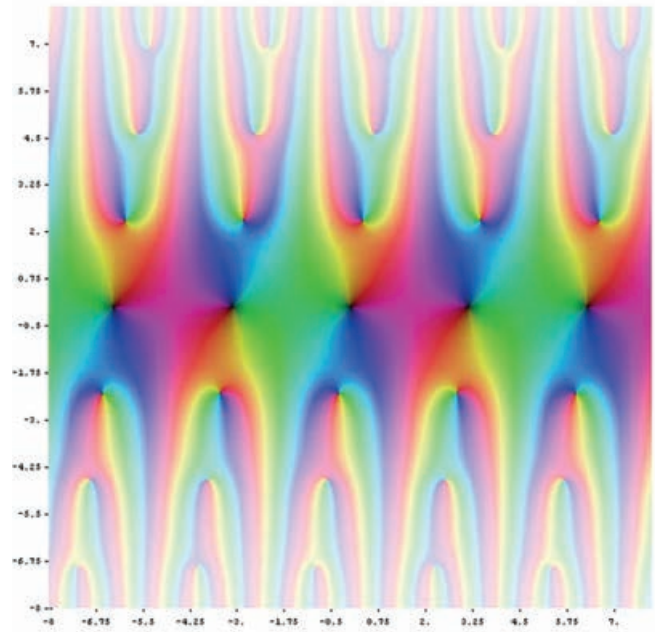
Erzählerin: Genau dieses chaotische Bewegungsverhalten hat Sofja Kowalewskaja in mathematische Gleichungen gefasst. Mit deren Hilfe konnte sie exakt vorausberechnen, wo sich ein unsymmetrischer Kreisel in ein paar Stunden oder Tagen befinden wird.

O-Ton 16 – Wilderich Tuschmann: Und das war etwas, was sie mit der allerneuesten damals vorhandenen Mathematik, nämlich Weierstraßschen Täterfunktionen, dann gelöst hat.

So steht es jedenfalls in der offiziellen Transkription auf SWR (tinyurl.com/4yfhssjv).

Wer war der Täter? Weierstraß?

Und wann kommt die Sendung über Primzahlverteilung und die Suche nach den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion?



Visualisierung der Jacobischen Täter-Funktion