

Von Geometrie und Geodäsie

Winfried Scharlau

Winfried Scharlau ist im November 2020 verstorben. Er war seit 2018 Ehrenmitglied der DMV und hatte viele Interessen. Wir drucken als kleine Erinnerung einen Auszug aus seinem Roman *I megalí istoria – die große Geschichte*. Das Kapitel „Von Geometrie und Geodäsie“ spielt in einer Hafenkneipe auf einer abgelegenen griechischen Insel. Dort streiten Bauern und Fischer über die Fläche eines Grundstücks. Der Landvermesser beruft sich auf die Gaußsche Flächenformel, kommt aber in Erklärungsnot.

In diesem Winter brach in den Kafenia von Agia Anna, hoch oben in den Bergen, ein großer Streit aus. Die Hirten, Bauern und Rentner, die früheren Bergleute saßen in ihren dicken Wintermänteln, Wollmützen und Schals, in ihren ausgetretenen Lederstiefeln oder schlabberigen Gummistiefeln um die glühenden Kanonenöfen – draußen war es ungewöhnlich kalt – und redeten über ein Problem, zu dem zwar bald jeder eine Meinung hatte, das aber keiner lösen konnte. [...]

Wie es in Griechenland, und insbesondere auf Kyklos, kaum anders sein könnte, war der Anfang des ganzen Streites und aller folgenden Diskussionen eine Grundstücksangelegenheit. Es ging um ein Stück Land an der Küste bei Agia Marina, das ein Steinbruchbesitzer aus Agia Anna erworben hatte, um dort zwei Häuser zu errichten, eines für sich selbst und seine Frau, das andere für die Familie seiner ältesten Tochter, die in Athen lebte.

Es war ein Grundstück [...]; an der schmalen unteren Seite hundert Schritte von der Küste entfernt, zog es sich ein Stück den Hang hinauf, ein aufgelassener Acker gehörte dazu, ein völlig verwilderter Obstgarten und im obersten Teil einige Dutzend Ölbäume, die Pflege dringend nötig gehabt hätten. Im Kaufvertrag war die Fläche des Grundstückes mit ungefähr achteinhalb *strémματα* angegeben, das heißt mit 8500 Quadratmetern; der Steinbruchbesitzer zahlte einen Preis von 19 Millionen Drachmen. Bei der allfälligen Vermessung stellte der Landmesser Photis jedoch fest, daß das Grundstück um ein Beträchtliches kleiner war; seine Messungen und Berechnungen, die er wie immer mit großer Sorgfalt durchführte und in einer wunderbaren Karte (mit Höhenlinien im Abstand von 2,5 Metern) darstellte, ergaben genau 7621 Quadratmeter.

Photis [...] war ein kluger Mensch, und seine Klugheit gebot ihm ehrlich zu sein. Sein Geschäft waren letzten Endes die Zahlen, die Maß- und Größenverhältnisse der Grundstücke auf Kyklos, und während zum Beispiel der Wert eines solchen Grundstückes sehr wohl manipuliert werden konnte, war dies bei der Größe einer Parzelle unmöglich, sobald vor Ort die Grenzen festgelegt und eindeutig bestimmt worden waren. Zudem mußte er immer damit rechnen, zwischen die Fronten zu geraten, zwischen Käufer und Verkäufer, oder bei Erbteilungen zwischen womöglich verfeindete Gruppen von Erben. [...] Dem Ge-

setz der Menschen hätte er sich nicht unbedingt gebeugt, doch die Gesetze der Zahlen erschienen ihm als eine höhere – gewiß nicht göttliche, aber dennoch überirdische – Macht. Und manchmal empfand er eine Art transzendenten Glücksgefühl, wenn nach längerer Arbeit ganz zum Schluß die Rechnung aufging und die Probe stimmte: Keine großartige und überschwengliche Regung, mehr eine stille, sich niemals abnutzende Genugtuung.

Um nun auf die von Photis festgestellte Diskrepanz bezüglich der Grundstücksgröße zurückzukommen, wird der Leser sicher erwarten, daß darüber ein wüster Streit zwischen dem Käufer Stavros und dem Verkäufer, einem Hirten namens Dialekhti Glezos, ausbrach. Die Situation war ziemlich verworren: Einerseits war die Parzelle wirklich viel kleiner als im Vertrag zugrunde gelegt, und zumindest ein nachträglicher Preisnachlaß wäre fair und gerechtfertigt gewesen; andererseits hatte Stavros es mit dem Kauf sehr eilig gehabt und das Land „ohne Garantie für Größe und Beschaffenheit“ übernommen. Tatsächlich stritten die beiden auch ein paar Monate lang – es wäre gegen alle Ehre gewesen, das nicht zu tun – doch ein wirklich ernster Streit war das nicht, nichts, wofür man zum Beispiel einen Totschlag begangen hätte. In Wirklichkeit verlief die Frontlinie auch ganz anders und zwar zwischen Stavros und Dialekhti auf der einen und dem Geodäten Photis auf der anderen Seite. Käufer und Verkäufer wünschten gemeinsam eine Neuvermessung, deren Ergebnis nahe dem im Kaufvertrag angegebenen Wert liegen sollte. Für dieses auf den ersten Blick vielleicht etwas seltsame Begehren gab es einen völlig einleuchtenden und überzeugenden Grund. Auf Kyklos gilt nämlich wie im größten Teil Griechenlands die gesetzliche Bestimmung, daß außerhalb geschlossener Ortschaften Häuser nur auf Grundstücken von mindestens vier *strémματα* Größe errichtet werden dürfen. Stavros benötigte für seine zwei Häuser also wenigstens acht *strémματα*. Photis lehnte das an ihn gerichtete Ansinnen rundheraus und ohne jede Diskussion ab. Er schlug vor, daß Stavros einen kleinen Streifen des Nachbargrundstückes ohne Zuzahlung erwerben könne – was letzten Endes auch geschah und womit die Sache hätte erledigt sein können. [...]

Da richtete der Hirte Dialekhti, der sich nicht so ohne weiteres damit abfinden durfte, daß sein Stück Land fast



Winfried Scharlau im Jahr 2015

ein ganzes *strémma* kleiner sein sollte, als er geglaubt hatte und als es in seinen eigenen Dokumenten verzeichnet war, an Photis die ganz naheliegende und harmlose Frage: „Wie hast du die Größe überhaupt ausgerechnet?“ – und kaum, daß er sie ausgesprochen hatte, nahm sie etwas Bedrohliches, beinahe Unheimliches an. Es herrschte sekundenlanges Schweigen; jeder erkannte die Berechtigung und den Sinn dieser Frage, denn das Grundstück war nicht etwa ein glattes Rechteck, sondern ein höchst unregelmäßig begrenztes Vieleck, genau gesagt ein Vierzehneck. Und noch fast im gleichen Augenblick wunderte sich jeder, daß bisher niemand diesen Gedanken gehabt hatte, denn ähnlich kompliziert und unregelmäßig sah beinahe jedes Grundstück auf Kykios aus. Wie sollte man da die Größe bestimmen?

Die Regeln der Kaffeehaus-Diskussionen geboten, daß Photis auf diese Frage nicht direkt zu antworten hatte; er mußte einen geschickten Ausweg finden, und weil ihm nicht sogleich etwas Passendes einfel, stellte er wenig schlagfertig die Gegenfrage: „Wie hättest du es denn gemacht?“

Von dem Hirten Dialekhti war natürlich noch viel weniger eine Antwort gefordert, doch diesen – einen Beinahe-Analphabeten, der mit Mühe ein wenig lesen und seinen Namen schreiben konnte – traf wie der Blitz eine überirdische Inspiration. Ihm wurde so heiß, daß er sein Jackett auszog; trotz seiner 58 Jahre errötete er heftig, er zwirbelte aufgeregt an seinem wilden schwarzen Schnurrbart herum, und erst konnte er gar nichts antworten, nicht etwa

weil er nichts zu sagen hatte, sondern weil er so schnell gar nicht wußte, wie er es sagen sollte. Dann brach es mit viel Gestotter aus ihm heraus: „Ich würde ein großes Stück Pappe nehmen, den Plan von Photis drauflegen und mit einem Kugelschreiber durchdrücken – nur die Grenze, nur die Grenzlinie. Dann würde ich das Stück ganz sorgfältig aus der Pappe herausschneiden und damit zum Apotheker Manolis gehen und es auf seiner Apothekerwaage haargenau wiegen. Und dann würde ich noch ein zweites Stück herausschneiden, genau ein *strémma* groß oder fünf *strémmata* oder was Passendes. Und das würde ich genauso wiegen und dann, und dann, ... und dann ... dann müßte man nur noch rechnen ... ich weiß nicht wie, ich könnte es nicht, aber das Känguruh könnte es bestimmt oder du Photis ...“ (Das „Känguruh“ war der Volksschullehrer von Agia Anna.) – Und dann ging es los. Das erste Argument war ausgesprochen einfältig: Ein so großes Stück Pappe könne man überhaupt nicht auf die Apothekerwaage legen, doch der Hirte entgegnete sogleich, man könne das Stück ja in kleinere Stücke zerschneiden und zusammen oder nacheinander wiegen – es käme ja nur auf das Gesamtgewicht an. (Derartigen Trivialitäten geben die Mathematiker pornpöse Namen – in diesem Fall geht es um die „Additivität eines Prämaßes bezüglich endlicher disjunkter Vereinigungen“ – doch man täusche sich nicht, so gewinnt die Wissenschaft ihre Kraft.)

Die Männer machten sich sofort an die Arbeit. Um an ein genügend großes Stück Pappe zu kommen, leerten

sie, ohne den Wirt lange zu fragen, einen großen Vorratskarton von Papierservietten. Wie von Dialekhti vorge schlagen, zeichneten sie die Umrisse des Grundstücks ab, oder vielmehr bestand Stavros darauf, das selbst zu tun, schließlich handelte es sich um sein Eigentum. Photis protestierte heftig, denn er fürchtete um seine schöne Karte, die in der Tat ziemlich lädiert wurde. Diesen Protest nahm jedoch niemand ernst; man dachte, er wolle nur nicht, daß man ihm auf die Schliche käme. Von dem Apotheker Manolis war anzunehmen, daß er sich in dem benachbarten Kafenion aufhielt, und so machte sich der ganze Trupp durch den schwerflockigen von Nordosten kommenden, schon im Niederfallen tauenden Schnee auf den Weg dorthin. Nur der Wirt blieb zurück; er spülte kopfschüttelnd die Wassergläser und Kaffeetassen. In den steilen Gassen hatten sich kleine Bäche gebildet, das Licht der Laternen schwankte im böigen Wind hin und her, es war eine Nacht, in der man am liebsten nicht vor die Türe geht. Wie vermutet war Manolis anwesend, doch die ganze Aktion geriet hier ins Stocken. Weil alle durcheinander redeten und auch weil es sich um ein schwieriges und im Kern abstraktes Thema handelte, benötigten sie nämlich den Rest des Abends, um der Besatzung des zweiten Kafenions zu erklären, worum es überhaupt ging.

Bei der Fortsetzung des Unternehmens – alle hatten sich entgegen üblicher Gewohnheit in *einem* Café versammelt – gab es zunächst eine unerwartete Schwierigkeit, nämlich ein passendes Vergleichsstück zu finden. Zwar wußten alle in der Praxis ganz genau, wie groß ein *strémma* ist, doch daß ein Quadrat von dieser Größe eine ganz krumme Seitenlänge hat, nämlich 31 Meter, 62 Zentimeter und 3 Millimeter, wie das „Känguruh“ mittels seines Taschenrechners feststellte, das verblüffte alle. Keiner hatte sich dies jemals klargernacht, sie sahen es wohl ein, doch glauben mochten sie es nicht, und auf den weißen Servietten rechneten sie zur eigenen Sicherheit nach: $30 \times 30 = 900$, $31 \times 31 = 961$, also immer noch zuwenig, $32 \times 32 = 1024$, also zuviel, irgend etwas zwischen 31 und 32. Weil man aber glatte Zahlen haben wollte, entschied man sich für ein Quadrat der Größe 100 mal 100, ein Hektar würden wir sagen, zehn *strémмата* in Griechenland. Dann wurde gezeichnet, geschnitten, gewogen und gerechnet – es war ja überhaupt nur eine einzige Division auszuführen, das war der Vorteil der glatten Zahlen – das Känguruh warf einen Blick auf seinen Rechner, dann hielt er das Gerät triumphierend hoch und zeigte es im Kreis herum nach allen Seiten: 7813. Donnernder Applaus erhob sich, und es war völlig unklar, wem dieser Applaus galt, dem Lehrer mit seinem Taschenrechner, der ja nur den letzten Schritt getan hatte, dem Hirten, der diese grandiose Idee gehabt hatte, vielleicht sogar Photis, dessen Rechnung ziemlich genau und vor allem in ihrem wesentlichen Punkt bekräftigt worden war, der kollektiven Intelligenz des Dorfes, die sich hier zusammengefunden hatte, oder vielleicht doch der Mathematik selbst, ihren ewigen, unberührbaren und unabänderlichen Gesetzen, die sich nur dem denkenden Geist erschließen. Bei uns in Mitteleuropa sind seit Napoleons Zeiten die Maßeinheiten für Flächeninhalte Quadratmeter, Ar und Hektar,

Quadrate von ein, zehn, hundert Metern Seitenlänge, von vorpythagoräischer Rationalität. Die Griechen haben sich für das *strémma* entschieden, der Entdecker des Irrationalen Hippasos von Metapontum wurde der Sage nach zu Tode gebracht, so ungeheuerlich erschien dieses Sakrileg, doch dieses Opfer hat seinen Sinn gehabt, niemand zweifelt heute an dem *strémma*, $\sqrt{1000} = 31,6227766\dots$ ohne jede Regel, bis in alle Ewigkeit ...

Nach diesem überragenden Erfolg angeborener Genialität stellte sich schnell eine gewisse Ernüchterung ein, denn jedem wurde klar, daß die ursprüngliche an Photis gerichtete Frage nicht beantwortet war; niemand glaubte, daß er auf diese abstruse Art seine Grundstücke ausmaß. Er lächelte nur, und keiner konnte ihm ernsthaft übelnehmen, daß er seine Berufsgeheimnisse nicht verriet. So mußte man aufs Neue versuchen, dem Rätsel auf die Spur zu kommen. Die meisten in der Gruppe wußten, daß die Fläche eines Rechteckes nach der Formel Länge mal Breite berechnet wird, doch nur der Lehrer konnte sich an die entsprechende Formel für das Dreieck erinnern: einhalb mal Grundseite mal Höhe, und er konnte diese Regel sogar mittels einer weiteren zweckentfremdeten Serviette den Leuten anschaulich erklären. Der Taxifahrer wandte jedoch ein, daß man in diesem Fall die Höhe berechnen oder von vornherein wissen müsse. Darüber entstand ein langer Streit, die eine Hälfte wollte dieses Argument gelten lassen, die andere nicht, und es wurde so lange über diese Frage diskutiert, bis zum Schluß niemand mehr so richtig wußte, was ein Dreieck überhaupt ist. Dann einigten sie sich darauf, daß man die Seitenlängen kennen müsse; die konnte man schließlich mit dem Maßband bestimmen. Von Winkeln, dieser Begriff tauchte natürlich dauernd in der Diskussion auf, wollte dagegen niemand etwas wissen. Winkel waren ihnen unheimlich, jeder wußte, was ein Winkel ist, doch keiner konnte es erklären. Man fragte also das Känguruh, wie man die Höhe bei Kenntnis der Seiten berechne, doch dieser hatte nur noch eine ganz vage Erinnerung an das, was er während seiner Lehrerausbildung auf der Akademie gelernt hatte, und ein schreckliches Wort war hängen geblieben: Sinus oder auch Cosinus, ein Wort, mit dem er nichts, rein gar nichts mehr anfangen konnte. So mußte er zugeben, daß er es nicht wüßte, und hatte von da an allen Kredit verspielt. Und niemand hörte auf ihn, als er behauptete, Photis berechne die gesuchte Fläche gewiß nach einer Formel, nach einer ganz bestimmten Formel, im Prinzip ähnlich wie beim Rechteck oder beim Dreieck.

Inzwischen hatte der Besitzer des Kafenions selbst den naheliegenden Vorschlag gemacht, daß man ein Vieleck, wie das Grundstück, um das es vor langer Zeit einmal gegangen war, durch gerade Verbindungslinien zwischen den Ecken in eine Anzahl von Dreiecken zerlegen könne, daß man dann die Fläche aller dieser Dreiecke berechnen müsse und zum Schluß alles zusammenzählen. Alle fanden, daß das eine gute Idee war, doch zufrieden geben konnten sie sich nicht damit. Es mußten die Längen der Verbindungsstrecken berechnet werden, die Höhen in immer neuen Dreiecken, und niemand konnte wissen, wo das alles enden würde. Sie wurden ja noch nicht einmal

mit einem einfachen Dreieck fertig. Bei dieser Gelegenheit stellte sich noch viel dringender die Frage, wie ein Vieleck überhaupt zu beschreiben sei. Ein Hirte aus dem Nachbardorf, ein Freund von Dialokhti demonstrierte sehr anschaulich, daß die Seitenlängen allein dafür jedenfalls nicht ausreichten. Der Taxifahrer, wohl durch seine tägliche Fahrpraxis inspiriert, meinte, man müsse sich dabei ganz an der Grenzlinie orientieren. Er stelle sich das so vor: An irgendeinem Eckpunkt begänne man loszugehen (er sagte losfahren) und zwar in einer ganz bestimmten Richtung und – eine ganz bestimmte Strecke. Dann erreiche man den nächsten Eckpunkt und müsse die Richtung ändern, gehe wieder ein Stück und so weiter, bis man schließlich wieder am Ausgangspunkt angelangt sei. Die jeweiligen Streckenlängen und die Richtungen müsse man wissen, sonst nichts. Das warf nun das Problem auf, was Richtungen sind; allen schwante, daß man damit wieder bei Winkeln angelangt war, und Winkel begannen die Männer von Agia Anna allmählich zu hassen. „Brauchst du Winkel?“ fragten sie Photis, und Photis lächelte nur und durchdringlich und vielsagend, verriet aber nichts.

Photis hatte ein Problem. Gleich nach dem ersten Abend, der so überraschend mit dem Triumph des Hirten geendet hatte, hatte er sich noch zu nachmittäglichlicher Stunde in sein Büro begeben und begonnen, über das vorgeschriebene Berechnungsverfahren nachzudenken. Dabei wurde ihm bald klar, daß er dieses Verfahren nicht verstand, daß er es in all den Jahren seiner Berufstätigkeit immer nur schematisch benutzt hatte, ohne die geringste Ahnung zu haben, warum es funktionierte und zum richtigen Ergebnis führte. Nur gewundert hatte er sich gelegentlich: Die Methode war unglaublich einfach, nur eine ganz leichte Rechnung war erforderlich, und das Resultat stand da. Nicht einmal Wurzelziehen mußte man, von Sinus oder Cosinus ganz zu schweigen. Ja, er verstand überhaupt nichts mehr: Die Bauern hatten völlig recht; die Berechnung eines einfachen Dreiecks war schwieriger als eines komplizierten Vielecks, wenn man nur die Methode benutzte, die er auf der technischen Schule gelernt hatte [...]

$$E(1, 2, 3, \dots, 14) := \frac{1}{2} \sum y_i \Delta x_{i-1, i+1} = 7.621 \text{ m}^2.$$

Vielleicht hätte es ihn ein wenig getröstet, wenn er gewußt hätte, daß sie in dieser Form von dem berühmtesten aller Mathematiker stammte, von Carl Friedrich Gauß, der sein Leben mit den tiefstinnigsten und abstraktesten „Speculationen“ zubrachte – Zahlentheorie, Differential-

geometrie, nichteuklidische Geometrie – aber auch als Geodät in jahrelanger Arbeit den größten Teil des Königreiches Hannover vorn Inselberg und Brocken bis zu den ostfriesischen Inseln vermessen hatte. [...]

In ihren langen Diskussionen kreisten die Leute des Bergdorfes Agia Anna beinahe orientierungslos einerseits um den abstrakten Begriff des Flächeninhaltes und andererseits um das Problem seiner konkreten numerischen Berechnung. [...] Kaum hatte der alte Seemann in seiner etwas wirren Rede die Worte *geographische Länge und Breite* ausgesprochen, wurde Photis zum erstenmal etwas bewußt, was bis zu diesem Zeitpunkt nur gedankenlos befolgte Routine gewesen war: Daß nämlich immer in seinen Plänen alle Punkte durch ihre beiden Koordinaten bestimmt wurden, nachdem zuvor ein meistens nach den Himmelsrichtungen orientiertes rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem festgelegt worden war. Darin bestand überhaupt die ganze Arbeit bei seinen Vermessungen und darauf verwandte er die meiste Mühe. Er bestimmte gar nicht direkt die Abstände zwischen einzelnen Punkten (oder er tat es nur, um andere Messungen zu kontrollieren), sondern er legte als erstes – im Prinzip willkürlich – den Ursprung seines Koordinatensystemes fest und bestimmte anschließend für jeden zu vermessenden Punkt, zum Beispiel die Eckpunkte des Grundstückes, die Koordinaten in nördlicher und östlicher Richtung bezüglich dieses Nullpunktes. Natürlich konnte man die Abstände dieser Punkte dann mittels des Satzes von Pythagoras berechnen, doch dies war für die Flächenformel gar nicht erforderlich, genauso wenig wie die Berechnung irgendeines Winkels. Er arbeitete nur mit den Koordinaten der Punkte; es waren dies die Zahlen x_i und y_i seiner Formel. Und er hatte nur deswegen so wenig Arbeit mit seiner Rechnung, weil er vorher umso mehr und umso genauer gemessen hatte.

Winfried Scharlau, *I megali istoria – die große Geschichte*.
2. Aufl. 2001, ISBN 3-00-006367-6.