Multivariate Analyse von qualitativen abhängigen Variablen mit verallgemeinerten linearen Modellen*

Gerhard Arminger

Universität Gesamthochschule Wuppertal, FB Wirtschaftswissenschaften
Gaußstraße 20, D-5600 Wuppertal

Zusammenfassung: Die bisher verwendeten Modelle und Programme (ECTA, NONMET) zur Analyse von qualitativen abhängigen Variablen werden auf verallgemeinerte lineare Modelle zurückgeführt. Damit werden auch die Probleme der Einbeziehung von quantitativen unabhängigen Variablen sowie der Berechnung von Freiheitsgraden und der Schätzung von Parametern bei fehlenden Zellen auf einfache Weise gelöst.

„Das Gewebe dieser Welt ist aus Zufall und Notwendigkeit gebildet.“

(Goethe 1796)

1. Problemumriß

In der vergangenen Dekade wurden der empirischen Sozialforschung zusätzlich zu den klassischen statistischen Verfahren – etwa Regressions-, Varianzanalyse und Faktorenanalyse – auch statistische Modelle zur Analyse von Nominaldaten zur Verfügung gestellt. Der Ansatz der loglinearen Modelle (z.B. Birch 1963; Goodman 1970, 1972, 1978; Haberman 1974) sowie die auf Prozentsätze oder Funktionen von Prozentsätzen angewandte gewichtete Regression (Grizzle et al. 1969) wurden bald nach ihrer Entwicklung auch im deutschen Sprachraum aufgegriffen (Arminger 1976, 1979; Küchler 1978, 1979; Langeheine 1979, 1980). Dabei haben sich vor allem die Programmpakete ECTA und NONMET durchgesetzt.

Kaum beachtet wurde hingegen die von Nelder und Wedderburn (1972) entwickelte Verallgemeinerung der gebräuchlichen linearen Modelle (Regressions-, Varianz-, Kovarianzanalyse) mit dem dazugehörigen Programmpaket GLIM (1978), die neben den linearen Modellen auch loglineare, logistische, probit und viele andere Modelle als Spezialfälle einschließt.

Wir konzentrieren uns im folgenden auf die Erklärung einer abhängigen qualitativen Variablen und werden zeigen, daß sich mit dem verallge-

meinerten linearen Modell (in Zukunft mit GLM-Ansatz oder GL-Modell bezeichnet) folgende Probleme lösen lassen, die in den bisher verwendeten Ansätzen Schwierigkeiten bereiten:

- Die korrekte Behandlung fehlender Zellenwerte in Kontingenztabellen. Sowohl in ECTA als auch in NONMET lassen sich Haupt- und Interaktionseffekte nur schätzen, wenn alle Zellen besetzt sind. Es werden daher bei nicht besetzten Zellen künstlich kleine Besetzungen (z.B. 0.5 im dichotomen Fall) vorgegeben, die zu einer falschen Anzahl von Freiheitsgraden führen.
- Die Einbeziehung von quantitativen unabhängigen Variablen. (Diese Einbeziehung kann auch auf NONMET übertragen werden.)
- Für loglineare Modelle kann die geschätzte Kovarianzmatrix der Haupt- und Interaktionseffekte angegeben werden, so daß beliebige lineare Kontraste – z.B. Differenzen zwischen zwei Effekten – getestet werden können.

Zusätzlich wird gezeigt, daß sowohl die in ECTA als auch die in NONMET verwendeten Modelle spezielle GL-Modelle sind und sich alle mit diesen Ansätzen erzeugten Ergebnisse auch mit GLIM reproduzieren lassen. Mit diesem Ergebnis ist die zwischen Küchler (1978) und Langeheine (1979) geführte Kontroverse um NONMET versus ECTA im Hegelschem Sinne aufgehoben.

2. Beispiel: Erwerbstätigkeit verheirateter Frauen

2.1 Darstellung und Interpretation eines logit Modells

Im Rahmen des VASMA Projektes an der Universität Mannheim wird unter anderem die Ent-

* Für die Möglichkeit, Daten des VASMA Projektes zu verwenden, und für zahlreiche anregende Diskussionen bin ich Walter Müller zu Dank verpflichtet.

wicklung der Frauenerwerbstätigkeit im zeitlichen Verlauf untersucht. Dem Datenbestand von VASMA wurde Tabelle 1 entnommen, die die Erwerbstätigkeit verheirateter Frauen der Geburtsjahrgänge 1931–1941 im Mikrozensus 1971 angibt. Die Ehemänner sind nicht selbständig.

Zur inhaltlichen Diskussion um die Erwerbstätigkeit von Frauen verweisen wir auf die Arbeiten im Rahmen des VASMA Projektes (Müller 1981; Handl 1981; Willms 1981) sowie auf Mincer und Polachek (1974) und Cramer (1980).

Um das Datenmaterial übersichtlich zu halten, wurden die im Mikrozensus angeführten Ausprägungen der folgenden Variablen auf die hier angegebenen Ausprägungen reduziert.

X Einkommen des Mannes (Monatsdurchschnitt)

- X1 2000 DM
- X2 1500 DM
- X3 1000 DM
- X4 700 DM
- X5 450 DM

A Schulbildung der Frau

- A1 Nur Volksschule
- A2 Mittlere Ausbildung
- A3 Höhere Ausbildung

B Kinder

- B1 Keine Kinder
- B2 Kinder, die älter als 6 Jahre sind
- B3 Kinder, die jünger als 6 Jahre sind

R Zahl der nicht erwerbstätigen Frauen in der Kombination XAB

N Zahl der Frauen insgesamt (Erwerbstätige und Nicht-Erwerbstätige) in der Kombination XAB.
(Erwerbstätigkeit ist dabei auf un/angelernte Arbeiterin und ausführende Angestellte oder Beamtin beschränkt.)

Z Einkommen des Mannes als quantitative Variable aufgefaßt (in hundert DM skaliert).

Man beachte, daß die Kombinationen X5 A3 (geringes Einkommen des Mannes, höhere Ausbildung der Frau) und X4 A3 B2 überhaupt nicht auftreten. Diese Kombinationen müssen wir als strukturelle Nullen auffassen, da aus alge-

TABELLE 1: Erwerbstätigkeit verheirateter Frauen im Mikrozensus 1971

X	A	B	R	N	Z
5	1	1	0016	0032	04.5
5	1	2	0052	0096	04.5
5	1	3	0043	0057	04.5
5	2	1	0005	0016	04.5
5	2	2	0013	0035	04.5
5	2	3	0017	0026	04.5
4	1	1	0132	0383	07.0
4	1	2	0640	1155	07.0
4	1	3	0607	0793	07.0
4	2	1	0047	0217	07.0
4	2	2	0260	0461	07.0
4	2	3	0265	0364	07.0
4	3	1	0001	0003	07.0
4	3	3	0000	0001	07.0
3	1	1	0329	0845	10.0
3	1	2	2925	4398	10.0
3	1	3	2838	3359	10.0
3	2	1	0242	0913	10.0
3	2	2	1874	2926	10.0
3	2	3	2384	2877	10.0
3	3	1	0001	0013	10.0
3	3	2	0009	0014	10.0
3	3	3	0013	0015	10.0
2	1	1	0100	0207	15.0
2	1	2	0927	1246	15.0
2	1	3	1022	1126	15.0
2	2	1	0178	0617	15.0
2	2	2	1581	2036	15.0
2	2	3	2118	2420	15.0
2	3	1	0010	0023	15.0
2	3	2	0039	0051	15.0
2	3	3	0095	0109	15.0
1	1	1	0016	0032	20.0
1	1	2	0143	0162	20.0
1	1	3	0147	0153	20.0
1	2	1	0106	0199	20.0
1	2	2	0722	0820	20.0
1	2	3	0908	0960	20.0
1	3	1	0016	0023	20.0
1	3	2	0094	0102	20.0
1	3	3	0209	0217	20.0

braischen Gründen keine Maximum Likelihood Lösung, die später allgemein angegeben wird, existiert. Die Kombination X4 A3 B3 tritt nur bei den Erwerbstätigen auf. Da die Stichprobe in dieser Kombination die Größe 1 hat, fassen wir die Null bei den Nicht-Erwerbstätigen als Stichproben-Null auf.

Wir wollen nun die Zahl der nicht erwerbstätigen Frauen erklären durch die qualitativen unabhängigen Variablen Ausbildung (A) und Kind (B) und durch die quantitative Variable Einkommen des Ehemanns (Z). Wir verwenden

zur Erklärung ein logit Modell mit der abhängigen Variablen

$\eta_i = \ln (R_i/(N_i-R_i))$ für jede Kombination ABZ, $i = 1, \dots, 41$

und rechnen ein GLM, das analog zu einer gewichteten Kovarianzanalyse aufgebaut und interpretierbar ist.

Wir verwenden ein logit Modell, da es – wie wir später an diesem Beispiel zeigen werden – bei gleicher Parameterstruktur – wesentlich besser mit den beobachteten Werten übereinstimmt als ein lineares Modell mit Prozentsätzen.

$\eta_i = R_i/N_i, i = 1, \dots, 41$

Ist das aus einem logit Modell geschätzte η_i berechnet, erhalten wir den prognostizierten Wert $\hat{R}_i$ aus der Umkehrtransformation

$\hat{R}_i = N_i \hat{\pi}_i$ mit $\hat{\pi}_i = \exp (\eta_i)/(1 + \exp (\eta_i))$

Der Zusammenhang zwischen η und π wird durch folgendes Schaubild illustriert:

FIGUR 1: Graph der Funktion $\pi = \exp (n) / (1 + \exp (\eta))$

Auf Grund von Überlegungen über die Stärke der einzelnen Variablen, die anschließend angegeben werden, haben wir folgendes Modell gewählt:

$\eta_{ijk} = \beta_0 + \beta_i^A \delta_i^A + \beta_j^B \delta_j^B + \beta^Z Z_k + \beta_{ij}^{AB} \delta_i^A \delta_j^B + \beta_j^{BZ} \delta_j^B Z_k$

$i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1, \dots, 5$

δ_i^A, δ_j^B sind Dummy Variable

$\delta_i^A = \begin{cases} 1 & \text{wenn Ausprägung } i \text{ von } A \text{ auftritt} \\ 0 & \text{sonst und bei } i = 1 \text{ (Reparametrisierungsbedingung)} \end{cases}$

$\delta_j^B = \begin{cases} 1 & \text{wenn Ausprägung } j \text{ von } B \text{ auftritt} \\ 0 & \text{sonst und bei } j = 1 \text{ (Reparametrisierungsbedingung)} \end{cases}$

$Z_k =$ quantitative Variable

$\beta_0 =$ Regressionskonstante

$\beta_i^A, \beta_j^B, \beta_{ij}^{AB} =$ Haupt- und Interaktionseffekte der qualitativen Variablen

$\beta^Z =$ Regressionskoeffizient von Z

$\beta_j^{BZ} =$ Veränderung des Regressionskoeffizienten von Z in den Ausprägungen B2 und B3 gegenüber B1.

Die diesem Modell entsprechende GLIM Formulierung ist

$A + B + Z + A.B + B.Z,$

indem die unabhängigen Variablen angegeben werden, die zur Erklärung von η_i herangezogen werden.

Mit einem GLIM-Programm erhalten wir folgendes Ergebnis:

Der Wert DEVIANCE in GL-Modellen nimmt für loglineare bzw. logit-Modelle den Wert G^2 (Bishop et al. 1975) an und ist – falls die H_0 : die geschätzten Werte $\hat{R}_i$ unterscheiden sich nur zufällig von den beobachteten Werten R_i – asymptotisch χ^2 -verteilt mit DF Freiheitsgraden.

$n =$ Anzahl der Zellen ABZ, also $n = 41$
 $p =$ Anzahl der geschätzten Parameter, also $p = 12$
 $DF = n - p = 29$
 $G^2 = \sum_{i=1}^n \left[R_i \ln (R_i/\hat{R}_i) + (N_i - R_i) \ln ((N_i - R_i)/(N_i - \hat{R}_i)) \right]$

DEVIANCE = 71.73 > $\chi^2_{29;0.95} = 42.6$, d.h. das geschätzte Modell weicht noch von den Daten signifikant ab. Da DEVIANCE wesentlich von der Größe der Stichprobe abhängt, behalten wir trotzdem zunächst dieses Modell bei.

Die geschätzten Werte der einzelnen Parameter (ESTIMATE), ihre Standardabweichungen (S.E. = standard error) und Bezeichnungen sind angegeben, die untere Dreiecksmatrix enthält die Standardabweichungen aller Paare von Differenzen.

TABELLE 2 Schätzungen der Parameter, ihrer Standardabweichungen und der Standardabweichungen der Differenzen im Modell A + B + Z + A.B + B.Z

	Deviance 71.73	DF 29	
	ESTIMATE	S.E.	PARAMETER
1	-1.208	.1179	< GM
2	-.6325	.7753E-01	A (2)
3	-.1923	.2699	A (3)
4	.5938	.1361	B (2)
5	1.640	.1500	B (3)
6	.7784E-01	.1040E-01	Z
7	.6004	.8706E-01	A (2).B (2)
8	.4463	.9443E-01	A (2).B (3)
9	.3964	.3514	A (3).B (2)
10	.1457	.3482	A (3).B (3)
11	.4724E-01	.1211E-01	B (2).Z
12	.4569E-01	.1334E-01	B (3).Z

S.E. of Differences						
1	0.					
2	.1416	0.				
3	.2836	.2650	0.			
4	.2454	.1562	.3126	0.		
5	.2534	.1684	.3189	.1150	0.	
6	.1273	8.1639E-02	.2723	.1283	.1429	0.
7	.1461	.1600	.2984	.1619	.1738	8.4515E-02
8	.1506	.1642	.3007	.1661	.1787	9.2086E-02
9	.3790	.3716	.5848	.3631	.3737	.3498
10	.3761	.3686	.5829	.3653	.3614	.3466
11	.1089	7.4920E-02	.2680	.1471	.1576	2.1709E-02
12	.1090	7.5129E-02	.2681	.1446	.1621	2.2420E-02
	1	2	3	4	5	6
7	0.					
8	6.6882E-02	0.				
9	.3468	.3518	0.			
10	.3446	.3420	.3146	0.		
11	9.1668E-02	9.8022E-02	.3540	.3501	0.	
12	9.1119E-02	9.9424E-02	.3533	.3515	1.0401E-02	0.
	7	8	9	10	11	12

Auf Grund der Setzungen der Dummy Variablen δ_i^A, δ_j^B werden die Haupt- und Interaktionseffekte der jeweils ersten Ausprägungen gleich 0 gesetzt. Die erste Kategorie einer Variablen dient also jeweils als Bezugskategorie.

Die Interpretation ist daher folgende:

GM ist die Regressionskonstante. Sie gibt – nach Transformation – die Wahrscheinlichkeit an, daß eine Frau mit Volksschulbildung (A1) ohne Kind (B1) und keinem Einkommen des Ehemannes (Z = 0) nicht erwerbstätig ist.

$$\hat{\pi} = \exp(GM) / (1 + \exp(GM)) = \exp(-1.208) / (1 + \exp(-1.208)) = 0.229$$

Im Vergleich zu A1 – nur Volksschulbildung – wird die Wahrscheinlichkeit, nicht erwerbstätig zu sein, verringert, wenn die Frau mittlere Ausbildung (A(2) = -0.6325) oder höhere Ausbildung (A(3) = -0.1923) besitzt. Allerdings ist A(3) nicht signifikant von 0 verschieden. (Die Koeffizienten $\beta_i^A, \beta_j^B, \beta^Z$ usw. werden jeweils mit den Variablennamen in GLIM bezeichnet.)

Man kann nämlich davon ausgehen, daß die Parameter in guter Näherung normalverteilt sind mit

der angegebenen Standardabweichung. Das 95% Konfidenzintervall um -0.1923 ist daher (S.E. = 0.2699):

$$P(-0.1923 - 1.96 \cdot 0.2699 \leq A(3) \leq -0.1923 + 1.96 \cdot 0.2699) \geq 0.95$$

Da der Wert 0 in diesem Intervall enthalten ist, läßt sich die $H_0: A(3) = 0$ gegen $H_1: A(3) \neq 0$ nicht mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ verwerfen.

Die Variable B beeinflusst die Erwerbstätigkeit wie folgt:

Kinder über 6 ($B(2) = .5938$) und Kinder unter 6 ($B(3) = 1.640$) erhöhen die Wahrscheinlichkeit, nicht erwerbstätig zu sein, beträchtlich.

Als Beispiel berechnen wir die Wahrscheinlichkeit der Nicht-Erwerbstätigkeit, wenn eine Frau Volksschulbildung hat, Kinder unter 6 im Haus sind und der Ehemann ein Einkommen von $Z = 10 = 1000$ DM hat.

$$\begin{aligned} \eta &= GM + A(1) + B(3) + \hat{\beta}^Z \cdot Z \\ &= -1.208 + 0 + 1.640 + 0.07784 \cdot 10 = 1.2104 \end{aligned}$$

$$\hat{\pi} = \exp(1.2104) / (1 + \exp(1.2104)) = 0.77$$

Der Parameter $\hat{\beta}^Z = 0.07784$ gibt den Einfluß des Einkommens an. Der Regressionskoeffizient ist positiv, d.h. je höher das Einkommen, um so höher ist die Wahrscheinlichkeit der Nichterwerbstätigkeit. Der Effekt von Z ist ebenfalls beträchtlich, da ja jeweils das Einkommen mit diesem Koeffizienten multipliziert werden muß.

Die Interaktionen erhöhen jeweils die Wahrscheinlichkeit der Nichterwerbstätigkeit. Die Kombination A2B2, also mittlere Ausbildung und Kinder über 6 Jahre, erhöht die Wahrscheinlichkeit, nicht erwerbstätig zu sein, im Ausmaß von $A(2) \cdot B(2) = 0.6004$. Dies bedeutet, daß der negative Effekt der mittleren Ausbildung auf Nichterwerbstätigkeit zurückgenommen wird, sobald Kinder in der Familie sind.

Die Interaktionen $B(2) \cdot Z = 0.04724$ und $B(3) \cdot Z = 0.04569$ zeigen auf, daß der Regressionskoeffizient von Z erhöht wird, wenn die Familie Kinder hat. Der positive Einfluß des Einkommens auf Nichterwerbstätigkeit wird also noch verstärkt.

Wir testen noch, ob sich $B(2) \cdot Z$ und $B(3) \cdot Z$ voneinander unterscheiden:

$$H_0: \Delta = B(2) \cdot Z - B(3) \cdot Z \text{ gegen } H_1: \Delta \neq 0$$

Da $\Delta = 0.04724 - 0.04569 = 0.00165$ und die Standardabweichung der Differenz zwischen Parameter 11 und 12 = 0.00104 beträgt, kann H_0 nicht mit $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden.

Insgesamt ist die Interpretation dieser Werte völlig analog zur Kovarianzanalyse zu bewerkstelligen. Ungewohnt ist zunächst nur die logit Transformation; sie verhindert jedoch, daß z.B. bei sehr hohem Einkommen Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit der Nichterwerbstätigkeit auftreten können, die größer als 1 sind.

Einen weiteren Begriff von der Güte der Anpassung erhalten wir, wenn wir die beobachteten Werte von R (observed) mit den unter dem Modell erwarteten Werten (fitted) von $\hat{R}$ vergleichen. Die Residuen sind standardisiert und – wenn das Modell zutrifft – annähernd $N(0,1)$ verteilt. Als Faustregel bedeutet dies, daß Werte, die dem Betrag nach größer als 2 sind, nur ca. 5% aller Residuen ausmachen sollen.

In unserem Beispiel ist diese Faustregel verletzt, wie bereits aus der mangelnden Anpassung zu erwarten war.

2.2 Wahl eines passenden Modells

Für die Wahl eines bestimmten Modells müssen selbstverständlich primär theoretische Überlegungen herangezogen werden. Sind jedoch noch keine ausgereiften theoretischen Vorstellungen vorhanden, halte ich es für empfehlenswert, zunächst große Variablenblöcke, etwa alle Haupteffekte, dann alle Interaktionseffekte erster Ordnung, dann die zweiter Ordnung usw. auf ihren Erklärungsbeitrag zu überprüfen und dann innerhalb einer Komplexitätsebene ein passendes Modell durch Elimination einzelner Variablen zu suchen. Diese Vorgehensweise wurde bereits in dem Programm LOGIT (Arminge 1976) für loglineare Modelle verwendet. Wir zeigen dies am Beispiel mit Hilfe von Tabelle 4.

Unter der Rubrik Modelle sind jeweils die am Modell beteiligten Variablen angegeben, wobei

TABELLE 3 Beobachtete und erwartete Werte und standardisierte Fehler im Modell $A + B + Z + A.B + B.Z$

UNIT OBSERVED		OUT OF	FITTED	RESIDUAL
1	16	32	9.529	2.502
2	52	96	46.76	1.069
3	43	57	41.54	.4363
4	5	16	2.942	1.328
5	13	35	16.77	-1.275
6	17	26	17.95	-4.027
7	132	383	130.2	.1919
8	640	1155	652.5	-.7407
9	607	793	622.7	-1.361
10	47	217	46.63	.6160E-01
11	260	461	256.8	.3023
12	265	364	273.8	-1.070
13	1	3	.8948	.1328
14	0	1	.7773	-1.868
15	329	845	333.1	-.2877
16	2925	4398	2876.	1.553
17	2838	3359	2826.	.5812
18	242	913	234.5	.5660
19	1874	2926	1892.	-.6969
20	2384	2877	2344.	1.917
21	1	13	4.541	-2.060
22	9	14	9.780	-.4543
23	13	15	12.52	.3314
24	100	207	101.4	-.1950
25	927	1246	971.1	-3.009
26	1022	1126	1022.	.7683E-03
27	178	617	208.4	-2.590
28	1581	2036	1575.	.2984
29	2118	2420	2156.	-2.458
30	10	23	10.17	-.7013E-01
31	39	51	41.43	-.8732
32	95	109	98.50	-1.135
33	16	32	18.76	-.9912
34	143	162	140.7	.5377
35	147	153	145.0	.7132
36	106	199	85.47	2.940
37	722	820	709.1	1.320
38	908	960	900.5	1.007
39	16	23	12.40	1.507
40	94	102	90.79	1.017
41	209	217	205.2	1.137

A, B, Z die Variablen selbst und A.B, A.Z etc. die Interaktionen sind.

Als Basismodelle fungieren

- BM1 – alle Interaktionen sind zugelassen
- BM2 – alle Zweier Interaktionen sind zugelassen
- BM3 – nur Haupteffekte sind zugelassen
- BM4 – nur die Regressionskonstante GM ist zugelassen.

Die einzelnen Variablen bzw. ihre Interaktionen werden jeweils auf das kleinste, sie einschließende Basismodell bezogen.

Die Devianzen geben die Abweichungen der erwarteten von den beobachteten Häufigkeiten an. Die Devianzen sind – wenn die unter dem Modell erwarteten Häufigkeiten nur zufällig von den beobachteten Werten abweichen – χ^2 -verteilt mit den jeweils angegebenen Freiheitsgraden.

Einzelne Interaktionen, Variable und Variablengruppen können in ihrer Einflußstärke überprüft werden, indem die Basismodelle ohne die jeweiligen Variablen gerechnet werden. Die Differenz der Devianzen ist – wenn das Basismodell zutrifft und die überprüfte Variable keinen Einfluß hat – wiederum χ^2 -verteilt mit der neben der Differenz stehenden Zahl von Freiheitsgraden.

Werden die durch die einzelnen Variablen erzeugten Devianzen durch die Gesamtdevianz – die durch BM4 erzeugt wird – dividiert, erhalten wir den Anteil an erklärter Devianz, analog zum Anteil an erklärter Varianz.

Im obigen Beispiel liefert keines der Modelle eine ausreichende Anpassung an die Daten. Dies bedeutet, daß die quantitative Variable Z keinen linearen Zusammenhang mit den logits aufweist:

TABELLE 4 Modelle zur Erklärung der Daten in Tabelle 1

Modell	Devianz	Freiheitsgrade	Effekt der Variablen	Devianz gegenüber Basismodell BM	Freiheitsgrade	erklärte Devianz B
BM1: $A+B+Z+A.B+A.Z+B.Z+A.B.Z$	54.08	23	–	–	–	–
BM2: $A+B+Z+A.B+A.Z+B.Z$	60.93	27	A.B.Z	BM1: 6.85	4	0.001
$A+B+Z+A.Z+B.Z$	109.1	31	A.B	BM2: 48.17	4	0.011
$A+B+Z+A.B+B.Z$	71.73	29	A.Z	BM2: 10.8	2	0.002
$A+B+Z+A.B+A.Z$	78.61	29	B.Z	BM2: 17.68	2	0.004
BM3: $A+B+Z$	163.2	35	A.B.A.Z,B.Z, A.B.Z	BM1:	12	
$B+Z$	196.8	37	A	BM3: 33.6	2	0.007
$A+Z$	3.502.0	37	B	BM3: 3.338.6	2	0.747
$A+B$	883.5	36	Z	BM3: 720.3	1	0.161
BM4: GM	4.469.0	40	–	–	–	–

Wir werden das zeigen können, wenn wir das Einkommen als qualitative Variable auffassen.

Die einzelnen Variablen und Interaktionen haben alle signifikanten Einfluß, wenn wir eine Irrtumswahrscheinlichkeit von z.B. $\alpha = 0,05$ ansetzen und die Problematik nacheinander durchgeführter statistischer Tests im Moment außer acht lassen. Die Einflußstärke der einzelnen Variablen ist jedoch höchst unterschiedlich, wie die erklärten Devianzen zeigen. Den überragenden Einfluß nimmt die Variable B (Kind) mit $B_B = 0.748$ ein, wesentlich geringer sind die Stärken von Z (Einkommen des Mannes) mit $B_Z = 0.16$ und A (Ausbildung) mit $B_A = 0.024$.

2.3 Alternative Modelle

Um die Hypothese, daß der Einfluß von Einkommen nicht linear ist, zu überprüfen, fassen wir das Einkommen als qualitative Variable mit 5 Ausprägungen auf und berechnen das Modell $A+B+X+A.B+B.X$ für die logits, das bis auf X an Stelle von Z dem vorigen Modell entspricht.

DEVIANCE = 31.51 > $\chi^2_{20,0.95} = 31.4$. Trotzdem weist dieses Modell einen wesentlich höheren An-

TABELLE 5 Parameter und Standardabweichungen im Modell $A+B+X+A.B+B.X$ (Logit Modell)

	DEVIANCE 31.51	DF 20	
	ESTIMATE	S.E.	PARAMETER
1	.6873	.1452	< GM
2	-.6216	.7775E-01	A (2)
3	-.2557	.2749	A (3)
4	1.361	.1776	B (2)
5	2.415	.2008	B (3)
6	-.9009	.1476	X (2)
7	-1.122	.1417	X (3)
8	-1.335	.1627	X (4)
9	-.7381	.3238	X (5)
10	.5901	.8724E-01	A (2). B (2)
11	.4364	.9465E-01	A (2). B (3)
12	.4095	.3568	A (3). B (2)
13	.1643	.3537	A (3). B (3)
14	.4567E-01	.1811	B (2). X (2)
15	-.2717	.1742	B (2). X (3)
16	-.4751	.1971	8 (2). X (4)
17	-1.317	.3811	B (2). X (5)
18	-.3220E-01	.2031	8 (3). X (2)
19	-.2530	.1968	B (3). X (3)
20	-.5926	.2214	B (3). X (4)
21	-1.346	.4278	B (3). X (5)

passungsgrad als das vorige auf. Der Unterschied liegt in X. Hätte das Einkommen einen linearen Effekt, müßte $X(1) = 0 > X(2) > X(3) > X(4) > X(5)$ gelten. Tatsächlich ist jedoch $X(5) > X(2)$, d.h. die unterste Einkommensstufe X5 des Mannes hat einen weniger negativen Effekt auf die Nichterwerbstätigkeit der Frau als die zweite Einkommensstufe. Die Interpretation der anderen Variablen bleibt gleich.

Man beachte, daß die Parameter dieses Modells nicht mit ECTA geschätzt werden können, da die oben angegebenen leeren Zellen vorliegen.

TABELLE 6 Beobachtete und erwartete Häufigkeiten und standardisierte Fehler im Modell $A+B+X+A.B+B.X$ (Logit Modell)

UNIT	OBSERVED	OUT OF	FITTED	RESIDUAL
1	16	32	15.59	.1439
2	52	96	47.84	.8500
3	43	57	41.88	.3370
4	5	16	5.407	-.2151
5	13	35	17.16	-1.408
6	17	26	18.12	-.4794
7	132	383	131.5	.4945E-01
8	640	1155	645.8	-.3449
9	607	793	605.9	.9338E-01
10	47	217	47.59	-9.755E-01
11	260	461	254.2	.5450
12	265	364	265.4	-.4355E-01
13	1	3	.8649	.1722
14	0	1	.7472	-1.719
15	329	845	332.1	-.2176
16	2925	4398	2894.	.9895
17	2838	3359	2852.	-.6866
18	242	913	235.6	.4864
19	1874	2926	1904.	-1.181
20	2384	2877	2370.	.6753
21	1	13	4.341	-1.965
22	9	14	9.684	-.3961
23	13	15	12.56	.3105
24	100	207	92.49	1.051
25	927	1246	956.0	-1.943
26	1022	1126	1011.	1.123
27	178	617	186.7	-.7594
28	1581	2036	1551.	1.584
29	2118	2420	2128.	-.5955
30	10	23	8.850	.4929
31	39	51	40.47	-.5096
32	95	109	96.88	-.5718
33	16	32	21.29	-1.982
34	143	162	143.5	-.1213
35	147	153	146.4	.2304
36	106	199	102.8	.4589
37	722	820	723.7	-.1807
38	908	960	910.8	-.4035
39	16	23	13.94	.8775
40	94	102	91.84	.7133
41	209	217	206.8	.6999

Wir schätzen nun die gleichen Parameter mit einem linearen Modell an Stelle eines logit-Modells.

Dieses Schätzverfahren ist ebenfalls ein Untermodell des GLM-Ansatzes und ist formal identisch mit dem linearen Ansatz in NONMET.

Die abhängige Variable ist der Anteilswert η_i

$\eta_i = R_i/N_i$ $i = 1, \dots, 41$ bzw. $0.5/N_i$ für $R_i = 0$

$\eta_{ijk} = \beta_0 + \beta_i^A A_i + \beta_j^B B_j + \beta_k^X X_k + \beta_{ij}^{AB} A_i B_j +$

$\beta_{jk}^{BX} B_j X_k$

η_i ist ein erwarteter Anteil mit Varianz

$V_i = (\eta_i (1 - \eta_i))/N_i$

Faßt man η_i , $i = 1, \dots, 41$, die β_j , $j = 1, \dots, 21$ in Vektoren $\underline{\eta}$, $\underline{\beta}$ und die Dummy Variablen in einer Matrix $\underline{X}$ sowie die Varianzen V_i , $i = 1, \dots, 41$ in einer Diagonalmatrix $\underline{V} = \text{diag}\{V_i\}$ zusammen, besteht der GSK-Ansatz in der Schätzung von $\underline{\beta}$ durch eine gewichtete Regression (vgl. Küchler 1978).

$\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}' \underline{V}^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{V}^{-1} \underline{\eta}$

Schreibt man $\underline{W} = \underline{V}^{-1}$ erhalten wir

$\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}' \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{W} \underline{\eta}$

Als Ergebnis erhalten wir Tabelle 7.

TABELLE 7 Parameter und Standardabweichungen im Modell A+B+X+A.B+X (Lineares Modell)

	DEVIANCE	DF	
	147.8	20	
	ESTIMATE	S.E.	PARAMETER
1	.6661	.6633E-01	<GM
2	-.1370	.3659E-01	A (2)
3	-.7237E-01	.1077	A (3)
4	.2158	.6772E-01	B (2)
5	.3008	.6659E-01	B (3)
6	-.2229	.6788E-01	X (2)
7	-.2740	.6421E-01	X (3)
8	-.3177	.7381E-01	X (4)
9	-.1811	.1554	X (5)
10	.1366	.3843E-01	A (2). B (2)
11	.1148	.3702E-01	A (2). B (3)
12	.1091	.1102	A (3). B (2)
13	.6718E-01	.1080	A (3). B (3)
14	.1066	.6924E-01	B (2). X (2)
15	.4806E-01	.6573E-01	B (2). X (3)
16	-.7084E-02	.7798E-01	B (2). X (4)
17	-.1966	.1764	B (2). X (5)
18	.1575	.6817E-01	B (3). X (2)
19	.1546	.6456E-01	B (3). X (3)
20	.1093	.7589E-01	B (3). X (4)
21	-.4782E-01	.1698	B (3). X (5)

Betrachtet man die standardisierten Residuen, ist die Anpassung erheblich schlechter als im logit-Modell. Dies ist eine Folge der relativ großen Anzahl von relativen Häufigkeiten, die über den Wert 0.8 hinausgehen. Zwischen 0.2 und 0.8 ist – wie in Figur 1 ersichtlich – die Funktion $\pi = \exp(\eta)/(1 + \exp(\eta))$ durch eine lineare Funktion gut angenähert.

Interpretiert man die geschätzten Parameter, kommt man zum gleichen Ergebnis wie in der logit-Analyse. Mittlere (A (2) = -.1370) und höhere Ausbildung (A (3) = -.07237) verrin-

TABELLE 8 Beobachtete und erwartete Anteilswerte und standardisierte Fehler im Modell A+B+X+A.B+X (Lineares Modell)

UNIT	OBSERVED	FITTED	RESIDUAL
1	.5000	.4850	.2402
2	.5417	.5042	1.087
3	.7544	.7380	.5808
4	.3125	.3480	-.3693
5	.3714	.5038	-.2045
6	.6538	.7158	-1.128
7	.3446	.3484	-.1900
8	.5541	.5571	-.3062
9	.7654	.7585	.9589
10	.2166	.2114	.2104
11	.5640	.5567	.4782
12	.7280	.7363	-.6781
13	.3333	.2760	.2580
14	.1000E-01	.7533	-7.508
15	.3893	.3920	-.2058
16	.6651	.6559	2.225
17	.8449	.8475	-1.041
18	.2651	.2550	.7996
19	.6405	.6555	-2.828
20	.8286	.8253	1.161
21	.7692E-01	.3197	-3.419
22	.6429	.6926	-.6501
23	.8667	.8423	.7616
24	.4831	.4432	1.599
25	.7440	.7656	-3.450
26	.2885	.3062	-1.148
28	.7765	.7652	2.604
29	.8752	.8792	-1.699
30	.4348	.3708	.8235
31	.7647	.8023	-1.303
32	.8716	.8962	-2.148
33	.5000	.6661	-2.657
34	.8827	.8819	.9582E-01
35	.9608	.9669	-1.964
36	.5327	.5291	1.482
37	.8805	.8815	-.2538
38	.9458	.9447	.6680
39	.6957	.5937	1.926
40	.9216	.9186	.4006
41	.9631	.9617	.5873

gern gegenüber keiner Ausbildung die Wahrscheinlichkeit, nicht erwerbstätig zu sein.

Kinder über 6 ($B(2) = .2158$) und unter 6 ($B(3) = .3008$) erhöhen die Wahrscheinlichkeit der Nichterwerbstätigkeit beträchtlich. Das Einkommen zeigt den gleichen nichtlinearen Effekt wie zuvor.

3. Struktur verallgemeinerter linearer Modelle

3.1 Modellformulierung

Wir zeigen nun lineare, loglineare und logit-Modelle als Spezialfälle verallgemeinerter linearer Modelle auf. Der an den mathematischen Beweisen interessierte Leser sei auf Arminger (1982) verwiesen.

Wir gehen vom einfachen Modell klassischer univariater Regressionsanalyse aus:

$$(3.1) y_i = \mu_i + e_i, i = 1, \dots, n$$

$$y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), \sigma_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}, x_{i1} = 1$$

y_i = voneinander stochastisch unabhängige normalverteilte Beobachtungen

μ_i = Erwartungswert oder systematische Komponente

e_i = Fehler oder zufällige Komponente

x_{ij} = feste Werte der unabhängigen Variablen

β_j = Regressionskoeffizienten

β_1 wird als Regressionskonstante bezeichnet. Können die x_{ij} , $j = 2, \dots, p$ beliebige Werte annehmen, sprechen wir von Regressionsanalyse.

Wenn die x_{ij} , $j = 1, \dots, p$ die einzelnen Ausprägungen von qualitativen unabhängigen Variablen in Form von Dummy Variablen darstellen, werden die zugehörigen β_j als Haupt- und Interaktionseffekte der Varianzanalyse bezeichnet. Treten sowohl quantitative als auch qualitative unabhängige Variable auf, sprechen wir von Kovarianzanalyse.

In Matrixschreibweise läßt sich (3.1) so ausdrücken:

$$(3.2) \frac{y}{n \times 1} = \frac{\mu}{n \times 1} + \frac{e}{n \times 1}, y \sim N\left(\frac{\mu}{n \times 1}, \sigma^2 \cdot \frac{I}{n \times n}\right),$$

$$\frac{\mu}{n \times 1} = \frac{X}{n \times p} \frac{\beta}{p \times 1}$$

Die Matrix X wird bei Vorliegen von Dummy Variablen auch als Designmatrix bezeichnet. X muß von vollem Rang, also $Rg X = p$, sein, da sonst keine eindeutige Lösung für β existiert. Bekanntlich fallen bei (3.2) Maximum Likelihood-Schätzung und Kleinste-Quadrate-Lösung zusammen, so daß gilt:

$$(3.3) \hat{\beta} = \underline{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

$$(3.4) \underline{b} \sim N(\underline{\beta}, \sigma^2 (X'X)^{-1}) \text{ exakt}$$

Aus (3.4) lassen sich die üblichen t- und F-Tests der Regressions- bzw. (Ko)varianzanalyse ableiten.

In der Theorie verallgemeinerter linearer Modelle wird (3.1) in zweierlei Hinsicht erweitert. An die Stelle der Normalverteilung von y_i tritt die einparametrische exponentielle Familie.

$$(3.5) y_i, i = 1, \dots, n \text{ stochastisch unabhängig}$$

$$y_i = \mu_i + e_i \text{ mit } E y_i = \mu_i, V(y_i) = \sigma_i^2$$

$$f(y_i) = \exp \left\{ [y_i \theta_i - b(\theta_i)] / a_i(\phi) + c(y_i, \phi) \right\}$$

$$V(y_i) = \text{Varianz von } y_i$$

$$f(y_i) = \text{Dichtefunktion von } y_i$$

$$b(\theta_i), a_i(\phi), c(y_i, \phi) \text{ sind Funktionen, die gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen}$$

$$\theta_i \text{ wird als kanonischer und } \phi \text{ als Skalenparameter bezeichnet.}$$

Zwischen den Erwartungswert μ_i und den linearen Prädiktor

$$\sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}$$

tritt eine Verbindungs- (link) Funktion g .

$$(3.6) \eta_i = g(\mu_i), \mu_i = g^{-1}(\eta_i) = h(\eta_i)$$

$$\eta_i = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}$$

g ist monoton und zweimal differenzierbar.

(3.5) und (3.6) lassen sich kompakt darstellen mit

$$(3.7) \quad \frac{y}{n!} = \frac{\mu}{n!} + \frac{e}{n!}, \quad \eta_i = g(\eta_i),$$

$$\frac{\eta}{n!} = \frac{X}{n!} \frac{\beta}{p!}$$

3.2 Eigenschaften und spezielle Verteilungen der exponentiellen Familie

Es läßt sich zeigen, daß allgemein für die exponentielle Familie gilt:

$$(3.8) \quad E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) = \frac{db(\theta_i)}{d\theta_i}$$

$$(3.9) \quad V(y_i) = b''(\theta_i) a_i(\phi)$$

$b''(\theta_i)$ wird als Varianzfunktion bezeichnet.

(3.8) und (3.9) stellen die Verbindung zwischen μ_i , $V(y_i)$ und θ_i , ϕ her.

In Tabelle 9 sind einige wichtige Spezialfälle der einparametrischen exponentiellen Familie angegeben.

3.3 Link-Funktionen

Für die obigen Verteilungen bieten sich als Link-Funktionen solche Funktionen an, in denen der lineare Prädiktor gleich dem kanonischen Parameter θ gesetzt wird.

TABELLE 9 Einige spezielle Dichtefunktionen der exponentiellen Familie (m ist die Stichprobengröße und y ist der beobachtete Anteil in der Binomialverteilung)

	Normal	Poisson	Binomial	Gamma
Wertebereich von y	$(-\infty, \infty)$	$0, 1, 2, \dots$	$(0, 1)$	$(0, \infty)$
$a(\phi)$	ϕ	1	$\frac{1}{m}$	ϕ
$b(\theta)$	$\frac{1}{2} \theta^2$	e^θ	$\ln(1+e^\theta)$	$\ln \theta$
$c(y, \phi)$	$\frac{1}{2} (y^2 + \pi^2 n 2\phi)$	$-\ln y$	$\ln \binom{m}{my} + \phi^{-1} \ln \phi^{-1}$	$(\phi^{-1} - 1) \ln y + \phi^{-1} \ln \phi^{-1}$
$\mu = Ey$	θ	e^θ	$e^\theta / (1+e^\theta)$	$\frac{1}{\theta}$
Varianzfunktion $b''(\theta)$	1	μ	$\mu(1-\mu)$	$-\mu^2$

Normalverteilung: $\eta = \theta = \mu$ also $g(\mu) = \text{id}$
 Poissonverteilung: $\eta = \theta = \ln \mu$ also $g(\mu) = \ln \mu$
 Binomialverteilung:

$$\eta = \theta = \ln(\mu/(1-\mu)) \text{ also } g(\mu) = \ln(\mu/(1-\mu))$$

Γ -Verteilung: $\mu = \theta = 1/\mu$ also $g(\mu) = 1/\mu$

Da sich ein multinomial verteilter Zufallsvektor, der z.B. eine Kontingenztafel beschreibt, als Produkt unabhängiger poissonverteilter Zufallsvariablen darstellen läßt (Birch 1963), ist mit der link-Funktion $\eta = \ln \mu$ und der Poissonverteilung die Klasse der loglinearen Modelle definiert.

Mit der link-Funktion $\eta = \ln(\mu/(1-\mu))$ und der Binomialverteilung ist die Klasse der logit Modelle beschrieben.

Es ist nicht erforderlich, $\eta = \theta$ zu setzen. Gegenbeispiele sind etwa bei der Binomialverteilung die links

probit: $\eta = \phi^{-1}(\mu)$. (ϕ = Verteilungsfunktion der $N(0,1)$ Verteilung)

Komplementäre log log Funktion: $\eta = \ln(-\ln(1-\mu))$.

3.4 Designmatrix X , fehlende Beobachtungen, Freiheitsgrade

Wie im einfachen Modell (3.1) können auch im GLM Ansatz Dummy Variable auftreten. Ebenso muß X von vollem Spaltenrang sein. Zum allgemeinen Aufbau von Designmatrizen sei auf Bock (1975) und Küchler (1979) verwiesen.

Wir merken an dieser Stelle nur folgende Punkte an:

In GLIM wird die Reparametrisierung der cornered effects verwendet; der Haupteffekt der ersten Ausprägung jeder qualitativen Variablen wird 0 gesetzt. Die Haupteffekte aller anderen Ausprägungen sind daher als Differenzen zur ersten Ausprägung zu interpretieren. Formal wird dies dadurch erzeugt, daß – wie im Beispiel angegeben – die Dummy Variable δ_1 der ersten Ausprägung immer 0 ist. Da die Dummy Variablen der Interaktionseffekte als Produkte der Dummy Variablen der Haupteffekte gebildet werden, sind auch die entsprechenden Interaktionseffekte, an denen eine erste Ausprägung beteiligt ist, gleich 0. Die „cornered effects“ lassen sich leicht auf die gewohnten zentrierten Effekte umrechnen und umgekehrt. Wie in

NONMET können auch in GLIM konditionale Effekte mit speziellen Dummy Variablen beschrieben werden.

Sowohl bei der klassischen Varianzanalyse als auch in Kontingenztabellen treten häufig Kombinationen auf, für die Beobachtungen fehlen. Wir bezeichnen Kombinationen, die aus inhaltlichen oder logischen Gründen nicht auftreten können, als fehlende Zellen oder strukturelle Nullen. Ist die Kombination inhaltlich sinnvoll, aber die Stichprobe zu klein, wird die fehlende Beobachtung als Stichproben-Null bezeichnet. In beiden Fällen können die fehlenden Beobachtungen dazu führen, daß trotz Reparametrisierung der Rang $\underline{X} = k < p$ ist.

Um wieder zu einer eindeutig bestimmten Schätzung zu gelangen, müssen zusätzliche, nämlich $p - k$ lineare Restriktionen eingeführt werden.

Inhaltlich bedeutet das, daß nicht alle gewünschten p Parameter $\beta_1 - \beta_p$ geschätzt werden können, da zu wenige Informationen vorliegen.

Beispiel: Wir gehen von der Kontingenztafel

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	y ₁₁	y ₁₂	y ₁₃
A ₂	y ₂₁	y ₂₂	y ₂₃

aus, die bei Reparametrisierung durch cornered effects im saturierten Modell wie folgt beschrieben wird:

$$E y_{jk} = \mu_{jk}, \quad \eta_{jk} = \ln \mu_{jk} = \beta_0 + \beta_j^A + \beta_k^B + \beta_{jk}^{AB}$$

$$\text{mit } \beta_1^A = \beta_1^B = \beta_{11}^{AB} = \beta_{12}^{AB} = \beta_{13}^{AB} = \beta_{21}^{AB} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{13} \\ \eta_{21} \\ \eta_{22} \\ \eta_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_2^A & \beta_2^B & \beta_3^B & \beta_{22}^{AB} & \beta_{23}^{AB} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_2^A \\ \beta_2^B \\ \beta_3^B \\ \beta_{22}^{AB} \\ \beta_{23}^{AB} \end{bmatrix}$$

Wenn nun eine Beobachtung fehlt, z.B. y_{12} , wird die entsprechende Zeile von $\underline{\eta}$ und $\underline{X}$ gestrichen; die Matrix $\underline{X}$ ohne die zweite Zeile ist dann

$$\frac{\underline{X}^*}{5 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die 5. Spalte – die mit β_{22}^{AB} multipliziert wird – ist dann identisch mit der 2. Spalte – die mit β_2^B multipliziert wird. Der Rang der Matrix ist daher Rang $\underline{X}^* = 5$. Als Folge der fehlenden Beobachtung können wir β_{22}^{AB} nicht mehr schätzen, wir setzen diesen Wert daher = 0. Im Programmsystem GLIM wird ein Wert, der auf Grund fehlender Beobachtungen nicht mehr berechnet werden kann, als ALIASED ausgewiesen.

Liegt eine Matrix $\underline{X}$ vor oder wird sie mit Hilfe der oben genannten Produkte aus den Spalten für die Haupteffekte aufgebaut, muß für jede Spalte – etwa durch Berechnung von $|\underline{X}'\underline{X}|$ – geprüft werden, ob sie von den vorhergehenden Spalten auf Grund fehlender Beobachtungen linear abhängig ist, oder nicht. Liegt lineare Abhängigkeit vor, wird diese Spalte weggelassen und der entsprechende Parameter = 0 gesetzt. Diese Prozedur wird sowohl in GLIM als auch in ALMO von Holm (1979) durchgeführt, fehlt aber sowohl in ECTA als auch in NONMET.

Bei der Berechnung der Freiheitsgrade müssen bei fehlenden Beobachtungen die Koeffizienten, die nicht geschätzt werden können, von der Zahl aller Koeffizienten abgezogen werden. Die Anzahl DF der Freiheitsgrade ist daher gegeben durch

$$(3.10) \quad \begin{aligned} DF &= n - p \\ n &= \text{Anzahl der Beobachtungen} \\ p &= \text{Rang von } \underline{X} \end{aligned}$$

Diese Formulierung erspart bei loglinearen Modellen die komplizierte Berechnung der Freiheitsgrade bei fehlenden Zellen durch die Berücksichtigung von Marginaltabellen, wie sie etwa noch bei Langeheine (1979) empfohlen wird.

4. Schätzen und Testen im GLM-Ansatz

4.1 ML-Schätzung von $\underline{\beta}$

Wir maximieren die log likelihood-Funktion

$$(4.1) \quad L(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^n (y_i \theta_i - b(\theta_i)) / a_i(\phi) + c(y_i, \phi)$$

in Abhängigkeit von β_j , $j = 1, \dots, p$, indem wir den Vektor der ersten Ableitungen $\frac{\partial L}{\partial \underline{\beta}}$ sowie die Matrix der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 L}{\partial \underline{\beta} \partial \underline{\beta}}$

bilden und $\frac{\partial L}{\partial \underline{\beta}} = \underline{0}$ setzen.

Das als Optimierungsverfahren verwendete Fisher's scoring ergibt folgenden Algorithmus zur Berechnung von $\underline{\beta} = \underline{\beta}_q$, der als iterative gewichtete Regression aufgefaßt werden kann.

$q = 0, 1, \dots$ ist der Laufindex der Iteration

$$(4.2) \quad \underline{b}^{q+1} = (\underline{X}' \underline{W}^q \underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{W}^q (\underline{\eta}^q + \underline{r}^q)$$

$$\underline{\eta}^q = \underline{X} \underline{b}^q$$

$$\underline{r}^q = (\underline{r}_i^q \mid i = 1, \dots, n \text{ mit } r_i^q = (y_i - \mu_i^q) \frac{d\mu_i^q}{d\eta_i^q})$$

$$\mu_i^q = g^{-1}(\eta_i^q)$$

$$\underline{W}^q = \text{diag} \{w_i^q \mid i = 1, \dots, n\}$$

$$w_i^q = \frac{1}{V^q(y_i)} \left(\frac{d\mu_i^q}{d\eta_i^q} \right)^2$$

Die Iteration wird beendet, sobald

$$\sum_{j=1}^p |b_j^{q+1} - b_j^q| < \epsilon, \text{ z.B. } \epsilon = 0.0001$$

Spezialfälle:

I) Normalverteilung für Anteilswerte p_i bei Stichprobengröße m_i in Gruppe i .

$$p_i = \pi_i + e_i, \quad p_i \sim N(\pi_i, V(p_i)), \quad V(p_i) = (\pi_i(1-\pi_i))/m_i$$

$$\eta_i^q = \pi_i^q, \quad \eta_i^q = \sum_{j=1}^p b_j^q x_{ij}$$

$$\frac{d\eta_i^q}{d\pi_i^q} = 1 \Rightarrow \eta_i^q + r_i^q = \pi_i^q + p_i - \pi_i^q = p_i$$

$$W_i^q = \frac{1}{V^q(p_i)} = m_i / (\pi_i^q (1-\pi_i^q))$$

Diese Zuordnung definiert für $q = 0$ genau den GSK-Ansatz für das lineare Modell.

II) Binomialverteilung, logit-Funktion für Anteilswerte p_i bei Stichprobengröße m_i in Gruppe i .

$$p_i = \pi_i + e_i, \quad V(p_i) = \pi_i(1-\pi_i) / m_i$$

$$\eta_i^q = \ln(\pi_i^q / (1-\pi_i^q)),$$

$$\frac{d\eta_i^q}{d\pi_i^q} = \frac{1}{\pi_i^q (1-\pi_i^q)}, \quad \frac{d\pi_i^q}{d\eta_i^q} = \pi_i^q (1-\pi_i^q)$$

$$W_i^q = m_i / \pi_i^q (1-\pi_i^q)$$

Diese Zuordnung definiert für $q = 0$ das logit-Modell im GSK-Ansatz, in dem allerdings im Gegensatz zum GLM-Ansatz die Iteration nach dem ersten Schritt abgebrochen wird. Die gewichtete Regression in NONMET ist daher identisch mit dem ersten Iterationsschritt im GLM-Ansatz.

Im Unterschied zu dem in ECTA verwendeten Iterationsverfahren werden in diesem Algorithmus sofort die Koeffizienten β_j geschätzt (λ_j in Goodman Terminologie), in ECTA werden nacheinander die das Modell definierenden Randverteilungen iterativ angepaßt und dann erst die Parameter λ_j berechnet.

4.2 Tests und Konfidenzintervalle für $\underline{\beta}$

Auf Grund allgemeiner Ergebnisse der ML-Schätzung gilt unter Regularitätsbedingungen

$$(4.3) \quad \underline{b} \sim N(\underline{\beta}, (\underline{X}' \underline{W} \underline{X})^{-1}) \text{ asymptotisch}$$

Ist $\underline{c} = (c_j) \mid j = 1, \dots, p$ ein linearer Kontrast, also

$$\sum_{j=1}^p c_j = 0, \text{ dann gilt asymptotisch}$$

$$(4.4) \quad \underline{c}' \underline{b} \sim N(\underline{c}' \underline{\beta}, \underline{c}' (\underline{X}' \underline{W} \underline{X})^{-1} \underline{c})$$

$$(\underline{c}' \underline{b})^2 / \underline{c}' \underline{\Sigma} \underline{c} \sim \chi_1^2 \text{ wenn } H_0: \underline{c}' \underline{\beta} = 0 \text{ zutrifft. } \underline{\Sigma} = (\underline{X}' \underline{W} \underline{X})^{-1}$$

Dies ist die Grundlage für die im Beispiel verwendeten Konfidenzintervalle und Tests.

4.3 Güte der Anpassung, Analoga zu partiellen Bestimmtheitsmaßen und Residuen

Unser Ziel ist es, die n Beobachtungen y_i durch wenige Variable x_{ij} , $j = 1, \dots, p$ zu erklären.

$\mu_i = \mu$, also $p = 1$, ist das Minimalmodell M_m

$\mu_i = y_i$, also $p = n$, ist das saturierte Modell M_f

$1 < p < n$ definiert das laufende Modell M_c

Zur Überprüfung, ob ein Modell den Daten hinreichend angepaßt ist, wird generell der Likelihood Ratio-Test verwendet:

Trifft $H_0: \beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \dots \beta_n = 0$ zu – unterscheiden sich also M_c und M_f nur zufällig – ist die LR-Teststatistik

$$S(c, f) = -2 (L(M_c) - L(M_f))$$

$$(4.5) S(c, f) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i(\phi)} [y_i (f\theta_i - c\theta_i) + b(c\theta_i) - b(f\theta_i)]$$

asymptotisch χ^2 -verteilt mit $n-p$ df.

Spezialfall Normalverteilung:

$$S(c, f) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - c\mu_i)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SSE}$$

ist unter H_0 exakt χ^2 -verteilt mit $n-p$ df.

$S(c, f)$ heißt skalierte Devianz.

Für Modelle mit $a_i(\phi) = \phi/W_i$, W_i bekannte Gewichte, enthält $D(c, f) = S(c, f)$ (Devianz) keine Unbekannten mehr.

Spezialfälle:

Normalverteilung: $D(c, f) = \sum_{i=1}^n (y_i - c\mu_i)^2 = \text{SSE}$

Poissonverteilung: $D(c, f) = 2 \sum_{i=1}^n y_i \ln \frac{y_i}{c\mu_i} =$

$$G^2 = 2I = S(c, f)$$

Binomialverteilung: $D(c, f) = 2 \sum_{i=1}^n m_i y_i \ln \frac{y_i}{c\mu_i} + (m_i - m_i y_i) \ln \frac{1 - y_i}{1 - c\mu_i} = S(c, f)$

Hat man ein passendes Modell M_{c_2} mit Parameter $\{\beta_1 \dots \beta_p\}$ gefunden, lassen sich sofort Tests zur Überprüfung, ob einzelne oder mehrere Parameter $\beta_j \in \{\beta_1 \dots \beta_p\}$ gleich 0 sind, mit folgendem Likelihood Ratio-Test durchführen.

Sei $M_{c_1} \subset M_{c_2}$, d.h. $\{\beta_1 \dots \beta_k\}_{M_{c_1}} \subset$

$\{\beta_1 \dots \beta_p\}_{M_{c_2}}$, so ist

$$(4.6) S(c_1, c_2) = S(c_1, f) - S(c_2, f)$$

asymptotisch χ^2_{p-k} -verteilt unter $H_0: \beta_{k+1} \dots$

$$\beta_n = 0$$

Spezialfall Normalverteilung:

$$S(c_1, c_2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (c\mu_{1j} - c\mu_{2j})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \text{SSR für } M_{c_1}$$

Minimalmodell

(4.6) ermöglicht das Aufstellen einer Tabelle zur Zerlegung der Devianz analog zur Varianzanalyse (ANODEV statt ANOVA?), wie sie in Tabelle 4 angegeben wurde.

Analog zu quadrierten multiplen partiellen Korrelationskoeffizienten läßt sich ein PRD-Koeffizient definieren (PRD = Proportional Reduction of Deviance), der als Spezialfälle den PRE-Koeffizienten und die η^2 -Koeffizienten von Arminger (1979) beinhaltet und gleich wie ein PRE-Koeffizient interpretiert wird.

$$(4.7) \text{PRD} = (D(c_1, f) - D(c_2, f)) / D(c_1, f) = D(c_1, c_2) / D(c_1, f)$$

Für die Analyse von Residuen $e_i = y_i - \mu_i$ verwenden wir die standardisierten Pearson-Residuen:

$$(4.8) p e_i = (y_i - \mu_i) / \sqrt{V(y_i)}$$

$p e_i \sim N(0, 1)$ asymptotisch bei korrekt spezifiziertem Modell

Spezialfall Poissonverteilung:

$$(4.9) p e_i = (y_i - \hat{\mu}_i)^2 / \hat{\mu}_i$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n p e_i^2 \text{ ist die Testgröße des } \chi^2\text{-}$$

Anpassungstests.

5. Polytome abhängige Variable

Ein spezielles Problem stellen häufig Modelle für abhängige nominale Variable mit mehr als zwei Kategorien dar.

Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, dieses Analogon zur multivariaten Regression zu betrachten. Sie werden in der Regel unter der Rubrik „multivariate logits“ abgehandelt, da sie Verall-

gemeinerungen der in 2.3 eingeführten logits darstellen.

Eine besonders einfache Möglichkeit, multivariate logits zu definieren, wollen wir an folgendem Beispiel demonstrieren:

Wir nehmen an, daß eine abhängige qualitative Variable C mit Ausprägungen C_k , $k = 1, \dots, K$ von zwei unabhängigen qualitativen Variablen A mit A_i , $i = 1, \dots, I$ und B mit B_j , $j = 1, \dots, J$ beeinflusst wird. Die Häufigkeiten der Kombinationen $A_i B_j C_k$ sind in einer Kontingenztafel $\{ABC\}$ zusammengefaßt. Wir nehmen an, daß die zweidimensionalen Randverteilungen $\{AB\}$, $\{AC\}$, $\{BC\}$ eine gute Anpassung an $\{ABC\}$ erzeugen. Dem entspricht das loglineare Modell

y_{ijk} = Häufigkeit von $A_i B_j C_k$

$E y_{ijk} = \mu_{ijk}$

$$\eta_{ijk} = \ln \mu_{ijk} = \beta_0 + \beta_i^A + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_{ij}^{AB} + \beta_{ik}^{AC} + \beta_{jk}^{BC}$$

In Parametern lautet das Modell

$$\eta_{ijk} = \ln \mu_{ijk} = \beta_0 + \beta_i^A + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_{ij}^{AB} + \beta_{ik}^{AC} + \beta_{jk}^{BC}$$

Wenn wir C als abhängige Variable betrachten, können wir z.B. jede Kategorie C_k $k = 2, \dots, K$ mit der ersten Kategorie C_1 vergleichen.

$$\begin{aligned} (5.1) \ln(\mu_{ijk}/\mu_{ij1}) &= \eta_{ijk} - \eta_{ij1} = \beta_0 + \beta_i^A + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_{ij}^{AB} + \beta_{ik}^{AC} + \beta_{jk}^{BC} - \beta_0 - \beta_i^A - \beta_j^B - \beta_1^C - \beta_{ij}^{AB} - \beta_{i1}^{AC} - \beta_{j1}^{BC} \\ &= \underbrace{\beta_k^C - \beta_1^C}_{\lambda} + \underbrace{\beta_{ik}^{AC} - \beta_{i1}^{AC}}_{\lambda_i^A} + \underbrace{\beta_{jk}^{BC} - \beta_{j1}^{BC}}_{\lambda_j^B} \\ &= \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist besonders günstig, wenn wir für das loglineare Modell cornered effects als Reparametrisierung gewählt haben. Da in diesem Fall $\beta_1^C = \beta_{i1}^{AC} = \beta_{j1}^{BC} = 0$ sind, gilt

$$(5.2) \eta_{ijk} - \eta_{ij1} = \beta_k^C + \beta_{ik}^{AC} + \beta_{jk}^{BC} \quad k = 2, \dots, K$$

Wir erläutern die Interpretation wiederum an dem in 2. angeführten Beispiel. Die Variablen A (Ausbildung der Frau), B (Kinder) und C (Art der Beschäftigung) sind wie oben definiert. Im Unterschied zu vorher betrachten wir jetzt

C mit allen drei Ausprägungen als abhängige Variable

C1 Nicht erwerbstätig

C2 Un/angelernte Arbeiterin

C3 Ausführende Angestellte und Beamte

Um die Tabelle zu vereinfachen, lassen wir das Einkommen des Mannes als unabhängige Variable unberücksichtigt.

Die Tabelle der einzelnen Kombinationen für A, B, C hat folgende Gestalt (Tabelle 10):

TABELLE 10 Art der Erwerbstätigkeit von Frauen
N = Häufigkeit in der Kombination ABC

A	B	C	N
1	1	1	593
1	1	2	731
1	1	3	175
1	2	1	4697
1	2	2	2045
1	2	3	325
1	3	1	4657
1	3	1	713
1	3	3	118
2	1	1	478
2	1	2	190
2	1	3	1194
2	2	1	4460
2	2	2	609
2	2	3	1324
2	3	1	5692
2	3	2	247
2	3	3	708
3	1	1	28
3	1	3	34
3	2	1	142
3	2	2	1
3	2	3	24
3	3	1	317
3	3	3	25

Man beachte, daß die Kombinationen A3 B1 C2 fehlen; hier liegen keine Beobachtungen vor; wir behandeln sie als strukturelle Nullen.

Da uns nur der Einfluß von A und B auf C interessiert, nicht aber der Zusammenhang von A und B, geben wir die Randverteilung von AB als gegeben vor und passen zunächst das Modell

$$E y_{ijk} = \mu_{ijk}, \mu_{ijk} = \ln \mu_{ijk}$$

$$(5.3) \eta_{ijk} = \beta_0 + \beta_i^A + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_{ij}^{AB} + \beta_{ik}^{AC} +$$

$$\beta_{jk}^{BC}, i, j, k = 1, 2, 3$$

an.

Auf Grund der großen Stichprobe erhalten wir

$$D(c, f) = 36.53 \text{ mit } df = 6,$$

so daß dieses Modell mit $\alpha = 0.05$ verworfen werden muß. Wir berechnen daher die Parameter des saturierten Modells

$$(5.4) \eta_{ijk} = \beta_0 + \beta_i^A + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_{ij}^{AB} + \beta_{ik}^{AC} +$$

$$\beta_{jk}^{BC} + \beta_{ijk}^{ABC}, i, j, k = 1, 2, 3$$

und erhalten bei Reparametrisierung durch correlated effects bezogen auf die jeweils erste Kategorie:

TABELLE 11 Geschätzte Parameter des saturierten Modells

Error Poisson Link Log
Linear Predictor
GM A B C A.B A.C B.C A.B.C

1	ESTIMATE	S.E	PARAMETER
1	6.385	.4107E-01	GM
2	-.2156	.6147E-01	A (2)
3	-3.053	.1934	A (3)
4	2.069	.4350E-01	B (2)
5	2.061	.4360E-01	B (3)
6	.2092	.5527E-01	C (2)
7	-1.220	.8603E-01	C (3)
8	.1616	.6493E-01	A (2) . B (2)
9	.4163	.6457E-01	A (2) . B (3)
10	-.4459	.2213	A (3) . B (2)
11	.3658	.2019	A (3) . B (3)
12	-1.132	.1020	A (2) . C (2)
13	2.136	.1016	A (2) . C (3)
14	-4.124	1.003	A (3) . C (2)
15	1.415	.2693	A (3) . C (3)
16	-1.041	.6129E-01	B (2) . C (2)
17	-1.450	.1034	B (2) . C (3)
18	-2.086	.6835E-01	B (3) . C (2)
19	-2.455	.1268	B (3) . C (3)
20	-.2551E-01	.1139	A (2) . B (2) . C (2)
21	-.6773	.1208	A (2) . B (2) . C (3)
22	-.1290	.1275	A (2) . B (3) . C (2)
23	-.5448	.1436	A (2) . B (3) . C (3)
24	ZERO	ALIASED	A (3) . B (2) . C (2)
25	-.5215	.3529	A (3) . B (2) . C (3)
26	ZERO	ALIASED	A (3) . B (3) . C (2)
27	-.2791	.3527	A (3) . B (3) . C (3)

Auf Grund der fehlenden Beobachtungen werden $\beta_{322}^{ABC} = \beta_{332}^{ABC} = 0$ gesetzt und als nicht schätzbar durch ALIASED ausgewiesen.

Zur Analyse der Wirkung von A,B auf C betrachten wir, wie oben vorgeschlagen, zunächst das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, un/angelernte Arbeiterin zu sein, zur Wahrscheinlichkeit, nicht erwerbstätig zu sein.

$$\eta_{ij2} - \eta_{ij1} = \beta_2^C + \beta_{i2}^{AC} + \beta_{j2}^{BC} + \beta_{ij2}^{ABC}$$

$$\beta_2^C = .2092$$

$$\beta_{22}^{AC} = -1.132$$

$$\beta_{32}^{AC} = -4.124$$

$$\beta_{22}^{BC} = -1.041$$

$$\beta_{32}^{BC} = -2.086$$

Interpretiert man nun die Haupteffekte, wird die Wahrscheinlichkeit – im Vergleich zu Nicht-erwerbstätigen – an/ungelernte Arbeiterin zu sein, bei mittlerer bzw. höherer Ausbildung und bei Versorgung von Kindern wesentlich vermindert. Vergleicht man die Größe dieser Haupteffekte im logit-Modell mit den Interaktionseffekten, erkennt man sofort die relativ geringe Bedeutung der Interaktionswirkung von A.B auf C.

Ähnlich verhält es sich mit den logits, die das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, Angestellte oder Beamte zu sein, zur Wahrscheinlichkeit, nicht erwerbstätig zu sein, angeben.

$$\eta_{ij3} - \eta_{ij1} = \beta_3^C + \beta_{i3}^{AC} + \beta_{j3}^{BC} + \beta_{ij3}^{ABC}$$

$$\beta_3^C = -.1220$$

$$\beta_{23}^{AC} = 2.136$$

$$\beta_{33}^{AC} = 1.415$$

$$\beta_{23}^{BC} = -1.450$$

$$\beta_{33}^{BC} = -2.455$$

Wie zu erwarten war, wirkt B in gleicher Weise auf C3 wie auf C2. Die Wahrscheinlichkeit der Berufstätigkeit vermindert sich, wenn Kinder zu versorgen sind.

Genau in die andere Richtung wirkt jedoch Variable A auf C3. Die Wahrscheinlichkeit, als An-

gestellte oder Beamte tätig zu sein, wird bei mittlerer oder höherer Ausbildung beträchtlich erhöht.

6. Weitere Anwendungen

Neben den hier angegebenen Anwendungen des GLM-Ansatzes lassen sich auch folgende, in der sozialwissenschaftlichen Forschung mehrfach diskutierte Probleme und Verfahren mit GL-Modellen und geringfügigen Erweiterungen lösen:

- die Behandlung von ordinalen abhängigen Variablen,
- die Analyse von Verweildauern und Übergangsraten bei inhomogenen Markoffprozessen, die in der Lebenszyklusforschung eine bedeutende Rolle spielen (Tuma et al. 1979),
- die Maximum Likelihood-Schätzung von latent structure-Modellen (Goodman 1978).

Literatur:

- Arminger, G., 1976: Loglineare Modelle zur Analyse nominal skaliert Variablen. Wien: Verband der wissenschaftlichen Gesellschaften Österreichs.
- Arminger, G., 1979: Loglineare Weise zur Analyse des Zusammenhangs zwischen nominalen Variablen. S. 218–261 in: K. Holm (Hrsg.), Die Befragung 6. München: Francke.
- Arminger, G., 1982: Klassische Anwendungen verallgemeinerter linearer Modelle in der empirischen Sozialforschung. S. 1–124 in: ZUMA – Arbeitsbericht Nr. 1982/03, Verallgemeinerte lineare Modelle in der empirischen Sozialforschung. NONMET/GLIM Workshop. Mannheim: ZUMA.
- Birch, M.W., 1963: Maximum likelihood in three-way contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.*, 25: 220–233.
- Bishop, Y.M.M./S.E. Fienberg/P.W. Holland, 1975: Discrete multivariate analysis: Theory and Practice. Cambridge: MIT Press.
- Bock, R.D., 1975: Multivariate statistical methods in behavioral research. New York: McGraw-Hill.
- Cramer, J.C., 1980: Fertility and female employment: problems of causal direction. *American Sociological Review* 45: 167–190.
- GLIM Manual, 1978: Oxford: Numerical Algorithm Group.
- Goethe, J.W., von, 1796: Wilhelm Meisters Lehrjahre. Leipzig: Insel (1914).
- Goodman, L.A., 1970: The multivariate analysis of qualitative data: Interactions among multiple classifications. *Journal of the American Statistical Association* 65: 226–256.
- Goodman, L.A., 1972: A general model for the analysis of surveys. *American Journal of Sociology* 77: 1035–1086.
- Goodman, L.A., 1978: Analyzing qualitative/categorical data: Log-linear models and latent structure analysis. Cambridge: Abt Books.
- Grizzle, J.E./C.F. Starmer/G.G. Koch, 1969: Analysis of categorical data by linear models. *Biometrics* 25: 489–504.
- Haberman, S.H., 1974: The analysis of frequency data. Chicago: University of Chicago Press.
- Handl, J., 1981: Bildungsexpansion und berufliche Statuschancen von Frauen: Ein sozialhistorischer Versuch. Mannheim: Arbeitspapier Nr. 20 des VASMA Projekts an der Universität Mannheim.
- Holm, K., 1979: Das allgemeine lineare Modell. S. 1–261 in: K. Holm (Hrsg.), Die Befragung 6. München: Francke.
- Küchler, M., 1978: Alternativen in der Kreuztabellenanalyse – Ein Vergleich zwischen Goodmans „General Model“ (ECTA) und dem Verfahren gewichteter Regression nach Grizzle et al. (NONMET II). *Zeitschrift für Soziologie* 7: 347–365.
- Küchler, M., 1979: Multivariate Analyseverfahren. Stuttgart: Teubner.
- Langeheine, R., 1979: Multivariate Analyse nominal skaliert Daten via Goodmans Modell: Sehr wohl eine Alternative. *Zeitschrift für Soziologie* 8: 380–390.
- Langeheine, R., 1980: Log-lineare Modelle zur multivariaten Analyse qualitativer Daten. Eine Einführung. München: Oldenbourg.
- Mincer, J., S. Polachek, 1974: Family investment investment in human capital: Earnings of women. *Journal of Political Economy* 82: 76–108.
- Müller, W., 1981: Familienzyklus und Frauenerwerbstätigkeit: Eine Analyse sozialen Wandels aus der Perspektive des Lebenslaufs. Mannheim: Arbeitspapier Nr. 21 des VASMA Projekts an der Universität Mannheim.
- Nelder, J.A./R.W.M. Wedderburn, 1972: Generalized linear models, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A.* 135: 370–384.
- Tuma, N.B./M.T. Hannan/L.P. Groeneveld, 1979: Dynamic Analysis of Event Histories in American *Journal of Sociology* 84: No. 4, 820–854.
- Willms, A., 1981: Integration auf Widerruf? Ein Beitrag zur Entwicklung des Verhältnisses von Frauenarbeit und Männerarbeit in Deutschland, 1882–1970. Mannheim: Arbeitspapier Nr. 22 des VASMA Projekts an der Universität Mannheim.