Zur Entwicklung einer rotierenden Gasmasse

Von ELEONORE TREFFTZ

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. 7a, 99–103 [1952]; eingegangen am 6. September 1951)

Herrn Professor Werner Heisenberg zum 50. Geburtstag

Im Anschluß an v. Weizsäcker¹ wird die Entwicklung einer rotierenden Gasmasse unter der Wirkung ihrer Eigengravitation und turbulenter Reibung untersucht. Im Modell wird in einer zweidimensionalen Welt eine Anfangsdichte $\varrho = (1 + s^2)^{-2}$ (s Abstand von der Drehachse) zugrunde gelegt. Die numerische Integration der partiellen Differentialgleichung, welche das Problem beschreibt, zeigt die Tendenz der Gasmasse einen Kern endlicher Ausdehnung mit konstanter Dichte und Winkelgeschwindigkeit zu bilden, während die äußeren Teile ins Unendliche abfließen.

In der vorstehenden Arbeit von Lüst² wurde die Bewegung einer Gasmasse im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers unter der Wirkung turbulenter Reibung untersucht. Hier soll die Entwicklung einer Gasmasse ohne Zentralkörper verfolgt werden, die ihrer Eigengravitation und den turbulenten Reibungskräften unterliegt. Während die vorstehende Arbeit als Modell der Entstehung des Planetensystems gedacht werden kann, soll das Folgende ein modellmäßiges Bild der Entwicklung einer Galaxis geben. Im Anschluß an v. Weizsäcker¹ wird zur Vereinfachung das Modell auf eine zweidimensionale Welt beschränkt. In der v. Weizsäckerschen Arbeit ist weiter diskutiert, welche Größen als klein zu vernachlässigen sind. Wir schließen unsere Rechnung an seine Gleichungen I (2,1) ff. an, die, soweit sie nicht in der vorstehenden Arbeit von Lüst erwähnt sind, hier noch einmal kurz zusammenge stellt werden sollen.

Im Gegensatz zur vorstehenden Arbeit von Lüst² ist also nicht ein Gravitationsfeld, her rührend von einer Zentralmasse, fest vorgegeben, sondern die Gleichung für das Potential

$$1/s (s \Phi') = \kappa \varrho \quad (1)$$

muß zur Lösung des Problems wesentlich benutzt werden [Gl. II (13)]; dort sind auch die Bezeichnungen erklärt. Im übrigen sind aus II die Gl. (9) bis einschließlich (20) unverändert gültig. Wie in I gezeigt, folgt weiter aus der ersten Bewegungsgleichung II (9)

$$\frac{v_\varphi^2}{s} = \Phi' \quad (2)$$

(Zentrifugalkraft = gravitative Anziehung) und

mit $\zeta = s \Phi'$ aus der Gleichung für das Potential

$$\kappa \varrho s = \zeta' = (v_\varphi^2)'. \quad (3)$$

Die Gesamtmasse innerhalb eines Radius s ist damit

$$M_s = 2\pi \int \varrho s ds = \frac{2\pi}{\kappa} \zeta = \frac{2\pi}{\kappa} v_\varphi^2 \quad (4)$$

[vgl. Gl. I (2,5) ff.]. Wegen der Kontinuitätsgleichung II (12) ist

$$\dot{\zeta} = -v_s \zeta', \quad (5)$$

woraus sich Gl. I (2,21) unmittelbar ergibt:

$$v_s = -\frac{\dot{v}_\varphi}{v_\varphi}. \quad (6)$$

Von der zweiten Bewegungsgleichung II (11) bleibt Gl. II (22) übrig, und nach Einsetzen von v_s und ϱ aus (3), T_φ^R aus Gl. II (15) und II (19)

$$\begin{aligned} \dot{v}_\varphi &= -\frac{s T_\varphi^R v_\varphi'}{\varrho v_\varphi} = -\frac{s^2 T_\varphi^R \kappa}{2 v_\varphi^3} \\ &= -\frac{\kappa}{2 v_\varphi^3} \left[\eta s^3 \left(\frac{v_\varphi}{s} \right)' \right]' \\ &= \frac{f \delta}{2 v_\varphi^3} \left[s^3 \left(\frac{v_\varphi}{s} \right)' l^2 \left(\frac{v_\varphi}{s} \right)' (v_\varphi^2)' \right]'. \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei ist nach Gl. II (20) die turbulente Zähigkeit

$$\eta \text{ proportional zu } \varrho l^2 s (v_\varphi/s)' \quad (8)$$

gesetzt (l freie Weglänge). δ ist ein dimensionsloser Faktor, der die Größe der turbulenten Zähigkeit bestimmt, und $f = -\text{sign}(v_\varphi/s)'$ (es wird sich erweisen, daß $f = +1$ ist). Setzt man wie in II

$$l = \alpha s^n, \quad (9)$$

¹ C. F. v. Weizsäcker, Z. Naturforsch. 3a, 524 [1948]; im folgenden als I zitiert.

² R. Lüst, Z. Naturforsch. 7a, 87 [1952], im folgenden als II zitiert.

so kann man mit $\omega = v_\varphi/s$ schreiben

$$v_\varphi = \frac{f\beta}{v_\varphi^2} \frac{\partial A}{\partial s}; A = s^{3+2n} \cdot v_\varphi v'_\varphi (\omega')^2; \beta = \delta \alpha^2. \quad (10)$$

[Vgl. Gl. I (2,25), wobei $n = 1$ gesetzt ist.] Die Gleichung wurde für die Anfangsverteilung

$$v_0 = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \quad (11)$$

für $n = 0$ numerisch gelöst. $s = 1$ ist etwa der Radius des Nebels und entspricht rund 10^{23} cm. $v = 1$ ist die Tangentialgeschwindigkeit im Unendlichen. Sie hängt nach Gl. (4) mit der Gesamtmasse des Nebels zusammen. Da die Rechnung hier zweidimensional geführt wird, ist M_s eine Masse je Längeneinheit der Höhe des Nebels. Es ist also die Gesamtmasse des Nebels (etwa 10^{11} Sonnenmassen = 10^{44} g) zu dividieren durch die Dicke der Scheibe (etwa 10^{22} cm). Damit wird $v(s = \infty)$, die Einheit der Geschwindigkeit in der dimensionslosen Schreibweise von Gl. (11), ungefähr gleich 10^7 cm/sec. Dieser Wert hat dieselbe Größenordnung wie die tatsächlich beobachteten Geschwindigkeiten in den äußeren Teilen des Andromeda-Nebels und anderer. Mit s und v ist die Zeiteinheit festgelegt. Sie ergibt sich zu 10^{16} sec oder $10^{8,5}$ a. In Gl. (10) tritt t in der Verbindung βt auf. v. Weizsäcker gibt eine Abschätzung von β für $n = 1$ zu $\beta \approx 0,025$. Wir übernehmen sie für den Fall $n = 0$; d. h. unser konstanter Mischungsweg ist dem Mischungsweg von $s = 1$ bei v. Weizsäcker gleichgesetzt. Wie sich zeigen wird, erstreckt sich unsere Rechnung über einen Zeitraum von $\beta t \approx 0,1$, das sind etwa 10^9 a.

Zunächst einige allgemeine Überlegungen: Die Hilfsgröße A hängt mit der Drehimpulsdichte

$$\vartheta = \varrho s v_\varphi \quad (12)$$

durch die Gleichung

$$\dot{\vartheta} = \frac{2f\beta}{\kappa} A'' \quad (13)$$

zusammen. Sie erfaßt im wesentlichen den Reibungsanteil des Drehimpulsstromes K der nach Gl. II (64) durch

$$K = \varrho s^2 v_s v_\varphi - \eta s^3 \omega'$$

gegeben ist. Der zweite Term läßt sich nach Gl. II (20) bzw. nach Gln. (8), (9) und (3) umformen zu

$$\eta s^3 \omega' = \delta f \varrho l^2 s^4 (\omega')^2 = 2\beta f \kappa^{-1} \cdot A.$$

Die zu v_0 gehörige Anfangsdichte ist

$$\varrho_0 = \frac{2}{(1+s^2)^2}. \quad (14)$$

Die Erhaltung der Gesamtmasse verlangt nach (4), daß

$$v_\varphi \Big|_{s \rightarrow \infty} = \text{const} = 1 \quad (15)$$

für alle t ist. Andererseits ist für $s = 0$

$$\omega(0, t) = 1. \quad (16)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} \leq 0 \quad (17)$$

für alle t und s gilt, daß also der Vorzeichenfaktor $f = +1$ weggelassen werden kann. Zunächst gilt (17) für $t = 0$. Für $s = 0$ und $s = \infty$ bleibt ω' konstant gleich 0. Soll es nun an einer Stelle > 0 werden, so muß dort ein Maximum von ω' , also $\omega'' = 0$, $\omega''' \leq 0$ sein. Da wir uns für den Vorzeichenwechsel von ω' interessieren, wo $|\omega'|$ klein ist, läßt sich die zeitliche Änderung von ω' aus der Differentialgleichung (10) entwickeln:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega' = 2s\omega' \omega''' + \text{höhere Glieder in } \omega'. \quad (18)$$

Daraus folgt, daß $\omega' = 0$ asymptotisch erreicht wird:

$$\omega' \sim e^{-2s \int |\omega'''| dt},$$

$\omega' > 0$ kommt nicht vor. Wegen $\omega' \leq 0$ und $\omega|_{s=0} = 1$ ist $\omega \leq 1$ für alle s und t , wegen $s\varrho = 2v_\varphi v'_\varphi \geq 0$, $v'_\varphi = \omega + s\omega'$ ist $0 \leq v'_\varphi \leq 1$ und damit auch $0 \leq v_\varphi \leq 1$ [vgl. dazu (15)].

Stationäre Lösungen sind

1. $\omega = \text{const.}, A = 0$,
2. $v_\varphi = \text{const.}, A = 0$,
3. $A = \text{const.},$ z. B. mit $v_\varphi = a\sqrt{s}; A = a^4/8$.

Der 1. Fall ist in der Nähe von $s = 0$ verwirklicht. Er ist dort stabil, denn für kleine Abweichungen

$$0 < 1 - \omega \ll 1, \left| s \frac{\partial \omega}{\partial s} \right| \ll 1 \text{ wird } \frac{\partial A}{\partial s} = \left(\frac{4}{s} + \frac{2}{\omega'} \omega'' \right) A.$$

Da in diesem Gebiet neben ω' auch $\omega'' < 0$ ist, sind $\partial A / \partial s$ und damit $\dot{\omega} > 0$, ω nähert sich also der Grenzkurve $\omega = 1$. Wegen $v_\varphi \leq 1$ kann diese Lösung jedoch höchstens bis $s = 1$ gültig sein.

Der zweite Fall wird für große s angenähert mit $v_\varphi = 1$. Er entspricht verschwindender Dichte und ist nicht stabil. Denn tritt eine kleine Abweichung $\omega = 1 - v_\varphi$ auf, so ist

$$\dot{\omega} \approx \beta (s\omega'' - \omega')/s^2 > 0, \quad (19)$$

sobald

$$s\omega'' > \omega' \quad (20)$$

ist ($|s\omega'|, |s^2\omega''| \ll 1$). Das ist aber bei einer Abweichung ω , die nach außen abfällt ($\omega' < 0$) und zur Abszisse konvex ist ($\omega'' > 0$), erfüllt. Zugleich mit ω wächst auch die Dichte an der betrachteten Stelle

$$\varrho = -\frac{2}{\pi} (1 - \omega) \omega' \approx -\frac{2}{\pi} \omega',$$

$$\dot{\varrho} \approx -\frac{2}{\pi} \dot{\omega} \approx \frac{\beta}{\pi s^3} (-s^2 \omega'' + 2s\omega' - 2\omega) > 0$$

unter den gleichen Bedingungen wie oben. Es fließt ein Massenstrom (durch den Einheitswinkel)

$$J = s \varrho v_s = -\frac{2}{\pi} v_\varphi \dot{v}_\varphi \approx \frac{2}{\pi} \dot{\omega} \quad (21)$$

[nach Gl. (3) und (6)] nach außen, der mit wachsendem s schwächer wird und dadurch ein Anwachsen der Dichte verursacht. Stabil kann die Lösung erst werden, wenn von innen keine Masse mehr nachgeliefert wird. Dann wird die Abweichung von der stationären Lösung außen größer sein als innen, ω' wird genügend positiv, um die Labilitätsbedingung (20) zu verletzen.

Schließlich bleibt noch die 3. Lösung zu diskutieren. Daß gerade $v_\varphi = a/\sqrt{s}$ die Bedingung $A = \text{const.}$ erfüllt, liegt an dem speziellen Ansatz für den Mischungsweg. Im allgemeineren Fall $l = \alpha s^n$ müßte v_φ proportional $s^{(1+n)/2}$ sein (was aber für $n = 1$ nichts Neues liefert). Die Lösung kann nur für mittlere s verwirklicht sein, und muß für kleinere s ($s \leq a^2$) bzw. größere s ($s \geq 1/a^2$) in die 1. bzw. 2. Lösung übergehen. Eine im ganzen Gebiet mögliche stationäre Lösung, die bis zu den zweiten Ableitungen stetig ist, läßt sich nicht angeben.

Die endgültige Rechnung wurde in Schritten $\Delta s = 0,1$; $\beta \Delta t = 0,01$ mit Formeln zweiten und dritten Grades durchgeführt. Aus den gegebenen

Werten für $t = 0$ wurden mit Hilfe der Differentialgleichung Reihenentwicklungen in t abgeleitet zur Berechnung von v ($\beta t = 0,01$) und v ($\beta t = -0,01$), mit denen das Näherungsverfahren gestartet werden konnte. Wegen des parabolischen Charakters der Gleichung muß $\beta \Delta t \leq (\Delta s)^2$ sein, da sonst das numerische Verfahren instabil wird³. Das bedingt eine untere Grenze für Δs . Da die Differentialgleichung die Bildung zweiter Ableitungen verlangt, andererseits einige Funktionen, insbesondere $\dot{v}_\varphi$, sich im Bereich einer Schrittlänge wesentlich ändern, müssen die numerischen Werte geglättet werden. Die dadurch entstehende Unsicherheit betrifft die Höhe des Maximums von $\dot{v}_\varphi$ in den letzten Schritten $\beta t = 0,10$ und $0,11$, wo auch physikalische Ursachen die Weiterführung der Rechnung fragwürdig machen (vgl. den Schluß der Arbeit).

Die Ergebnisse sind in den Abb. 1 bis 4 dargestellt. Sie zeigen, daß die Anfangsverteilung einen Massenstrom J bedingt, der innerhalb $s = 1,22$ nach innen gerichtet ist, außerhalb dessen nach außen (Abb. 2). Er hat bei $s = 0,64$ ein Minimum, um für kleine s wie s^4 zu verschwinden. Zunächst steigt darum die Dichte innerhalb $s = 0,64$ an, fällt zwischen $s = 0,64$ und $s = 1,70$ (Maximum des nach außen fließenden Massenstromes) ab, um für größere s wieder langsam anzusteigen. Mit der Zeit verschiebt sich das Minimum von J auf $s = 0,60$. Abb. 1 zeigt deshalb eine Dichteabnahme für $s \geq 0,60$. Qualitativ den gleichen Verlauf wie J hat $\dot{v}_\varphi$ [vgl. Gl. (21)] mit einem Maximum bei $s = 0,57$ (Abb. 3). Diese Stelle $s \approx 0,6$ gewinnt nun im weiteren Verlauf der Rechnung, d. h. mit fortschreitender Zeit, an Bedeutung. Das Maximum in $\dot{v}_\varphi$ wird schnell steiler und höher, entsprechend auch das Minimum von J . Innerhalb der kritischen Stelle nimmt ϱ immer stärker zu, außerhalb nimmt es ab (Abb. 1). Es scheint, als sollte sich ein Sprung in ϱ ausbilden und ein Knick in v_φ und ω (Abb. 1). Deutlich ausgeprägt ist dieser Sachverhalt auch in der Hilfsgröße A (Abb. 4), die für kleine s mit der Zeit gegen 0 abnimmt, um bei $s \approx 0,6$ anzusteigen auf etwa $A \approx 0,035$. Unsere Gleichung scheint einer Lösung

Hat ein y -Wert den Fehler ε , so geht dieser in $\Delta_s^2 y$ in derselben Größenordnung ein. Der zeitliche Zuwachs von y wird um etwa $f(x, y) \frac{\Delta t}{(\Delta s)^2} \varepsilon$ verfälscht. $f(x, y)$ hat in unserm Fall die Größenordnung β . Ist nun $\beta \Delta t / (\Delta s)^2 > 1$, so schaukelt sich der Fehler im Lauf der Zeit auf.

³ Vgl. L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Kap. III, S. 35 (1951). Man macht sich das leicht folgendermaßen klar: $\dot{y} = f(x, y)y''$ bedeutet näherungsweise

$$\Delta_t y = f(x, y) \Delta_s^2 y \frac{\Delta t}{(\Delta s^2)}.$$

Abb. 1. Winkelgeschwindigkeit (I) und Dichte (II).

Abb. 2. Radiale Strömungsgeschwindigkeit (I) und Massenstrom durch den Einheitswinkel (II).

Abb. 3. Zeitliche Änderung der Tangentialgeschwindigkeit.

Abb. 4. Hilfsgröße A nach Gl. (8) und (11).

zuzustreben, die innerhalb von $s \approx 0,6$ dem 1. Fall entspricht und für $s \geq 0,6$ in den 3. Fall übergeht. Soll $\omega = 1$ und $\omega = a/\sqrt{s}$ bei $s = s_{kr} = 0,57$ stetig aneinander schließen, so muß $A = s_{kr}^2/8 = 0,040$ sein. Die Dichte ρ fällt an dieser Stelle von $\rho = 2$ auf $\rho = 1$ ab. Es bildet sich also eine Art Kern mit dem Radius $s \approx 0,6$ und konstanter Dichte, die gleich der ursprünglichen Mittelpunktsdichte ist, aus. Die nicht zum Aufbau dieses Kerns benötigte Masse wird schließlich nach außen abfließen (vgl. Verlauf von J , Abb. 2).

In den hier betrachteten Zeiträumen ($\beta t \lesssim 0,1$) kann für größere s ($s \geq 1,5$) noch keine wesentliche Veränderung der Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung beobachtet werden. Und auch über

längere Zeiten hin sind die Veränderungen der Kurven so gering, daß die Störungen von der kritischen Stelle her nicht zu vernachlässigen sind. Die Rechnungen wurden für $s \geq 1,0$ bis $\beta t = 0,4$ durchgeführt, wobei Unregelmäßigkeiten an den Rändern ausgeglichen wurden.

An der kritischen Stelle selbst wird mit $\dot{v}_\varphi$ auch $v_s = -\dot{v}_\varphi/v'_\varphi$ groß (Abb. 2). Das hat zur Folge, daß die Annahme $v_s \ll v_\varphi$, $v'_s \ll s\omega'$ [vgl. Gl. II (16)] nicht mehr gültig bleibt (bei $\beta t = 0,10$ ist $v_s \approx 6\beta \approx 0,15$, während $s\omega'$ ungefähr 0,25 beträgt). Es tritt zusätzliche Reibung auf, die wohl die Unstetigkeiten an der kritischen Stelle auszugleichen strebt. Wieweit sie die Bildung eines Kerns beeinflußt, ist schwer zu sagen.

Der Rotationszustand der Sonne

VON STEFAN TEMESVÁRY

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 7a, 103–120 [1952]; eingegangen am 24. September 1951)

Herrn Professor Werner Heisenberg zum 50. Geburtstag

Die Gesetzmäßigkeiten der Sonnenrotation werden untersucht unter besonderer Berücksichtigung der Folgerungen, die sich aus dem ständigen Verlust an Rotationsmoment ergeben. Es wird gezeigt, daß, wenn zu dem durch die Strahlung bedingten Anteil noch eine Abbremsung durch das interplanetarische Medium hinzukommt, anschließend an die Wasserstoffkonvektionszone noch eine Zone existieren kann, in der Rotationsinstabilität herrscht. Ob diese Instabilität eine turbulente Strömungsform bedingt oder das Auftreten von stationären Zirkulationen zur Folge hat, läßt sich theoretisch nicht streng entscheiden. Die Existenz und die Gesetzmäßigkeiten der Sonnenflecken sprechen aber eher für die letztere Annahme. Die Wanderung der bevorzugten Fleckenzone innerhalb des elfjährigen Zyklus kann als die Folge einer großräumigen Zirkulation gedeutet werden, deren Geschwindigkeit zusammen mit der kinematischen Zähigkeit in der Wasserstoffkonvektionszone das an der Oberfläche beobachtete Rotationsgesetz bestimmt.

Insgesamt ergibt sich für die äußeren Teile der Sonne eine Zunahme der Winkelgeschwindigkeit nach innen hin. Im tieferen Innern dagegen hängt deren Verteilung mit ab von dem unbekannten Anfangszustand der Sonne, die noch nicht so alt ist, als daß die dort herrschende Viskosität sowie der Strahlungsstrom einen definierten Endzustand herbeigeführt haben könnten. Aus diesem Grund werden noch einige andere Kriterien herangezogen, um eine obere Grenze für die Winkelgeschwindigkeit im tieferen Innern und damit für den Gesamtdrehimpuls der Sonne zu erhalten.

Der Rotationszustand der Sonne ist bisher meist im Anschluß an allgemeinere Untersuchungen über die Sternrotation behandelt worden mit dem Ziel, die an der Oberfläche beobachtete differentielle Rotation zu erklären. Den Anlaß zu der vorliegenden Untersuchung gaben dagegen zwei Probleme der Sonnenphysik, die in letzter Zeit wieder in den Vordergrund des Interesses getreten sind, und die nicht so sehr nach dem

Rotationsgesetz an der Oberfläche fragen, sondern nach der Verteilung der Winkelgeschwindigkeit im Innern der Sonne und der sich daraus ergebenden Rotationsstabilität bzw. Instabilität bestimmter Schichten. Die beiden Problemkreise sind einmal das Sonnenflecken-Phänomen und zum andern die Kosmogonie des Sonnensystems.

Bekanntlich lassen sich die beobachteten Gesetzmäßigkeiten des Sonnenflecken-Phänomens