möglichen Weltmodellen eine bestimmte Auswahl zu treffen: *das Machsche Prinzip ist ein Auswahlprinzip*. Diese Auswahl ist freilich keine willkürliche, sondern sie setzt ein bestimmtes, nicht weiter reduzierbares Verhältnis der Grundbegriffe Raum, Zeit und Materie schon voraus. Vielleicht ist es nicht abwegig, an die Unterscheidung Kants zwischen „konstitutiven“ und *bloß* „regulativen“ Prinzipien der Erfahrung* zu erinnern; vielleicht ist gerade die Kantische Terminologie geeignet, das Verhältnis der Grundgleichungen der Physik zum Machschen Prinzip in ein klareres Licht zu setzen: Wir möchten von den Grundprinzipien, aus denen unter anderem die Feldgleichungen der Physik her-

* Kritik d. reinen Vernunft, siehe vor allem den Anhang zur transzendentalen Dialektik.

vorgehen, sagen, daß sie für den Aufbau der Erfahrung, wie er in der Physik vollzogen wird, „konstitutiv“ seien, während demgegenüber dem Machschen Prinzip nur der Charakter eines „regulativen Prinzips der Erfahrung“ zukomme. Ein derart regulatives Prinzip muß vor allem dort zur Auswirkung gelangen, wo es sich — wie in der Kosmologie — um die Totalität von Erfahrungen handelt. Es wird von hieraus vielleicht verständlicher, daß das Machsche Prinzip, obwohl vom Standpunkt der fundamentalen physikalischen Prinzipien aus beurteilt nur akzidentiell, doch hinsichtlich der Auffassung des Kosmos als eines Ganzen — hinsichtlich der Frage nach Endlichkeit oder Unendlichkeit des Universums — von entscheidender Bedeutung sein kann.

Statistische Untersuchung des Grundprozesses der Quantentheorie der Elementarteilchen

Von FRITZ BOPP

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **8a**, 6—13 [1953]; eingegangen am 30. September 1952)

Erwin Fues zum 60. Geburtstag

Der Grundprozeß der Quantentheorie der Teilchen, die Erzeugung oder Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt, wird elementarstatistisch und quantenstatistisch analysiert. Es wird gezeigt, daß man jede Gesamtheit von Grundprozessen elementarstatistisch behandeln kann, wenn man gewisse Bedingungen einhält, die davon herrühren, daß die elementare Statistik nichtumkehrbaren Prozessen angepaßt ist, während die quantenstatistischen Prozesse umkehrbar sind.

*To be or not to be
that is the question*

1. Der Grundprozeß der Quantentheorie

Die Quantentheorie der Elementarteilchen steht im logischen Aufbau über der Quantenmechanik. Denn diese folgt aus jener deduktiv, jene aus dieser induktiv. Hieraus ergibt sich, daß die Analyse der Grundlagen von der Quantentheorie der Teilchen ausgehen muß, sobald die Induktion genügend weit fortgeschritten ist.

Diese Feststellung wird dadurch unterstrichen, daß die Operatoren in der Quantentheorie der Teilchen eine einfache und einheitliche Bedeutung haben. Sie beschreiben (bei Verwendung von Lagekoordinaten) die Vernichtung oder die Erzeugung eines Teilchens *hier und jetzt*. Dies gilt sogar in nicht-relativistischer Näherung, obwohl in ihr Vernich-

tungs- und Erzeugungsoperatoren stets so verbunden sind, daß die Zahl der Teilchen konstant bleibt.

Alle Operatoren der Quantentheorie stimmen also in ihrer Funktion überein. Ihre Mannigfaltigkeit ergibt sich allein daraus, daß gleichartige Operatoren auf verschiedene Punkte in Raum und Zeit und auf verschiedenartige Teilchen bezogen sind. Um die Operatoren zu untersuchen, genügt es daher, einen einzigen zu analysieren. Er beschreibt den *Grundprozeß der Quantentheorie*: Erzeugung und Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt.

Nur diesen Prozeß wollen wir hier behandeln. Es ist der einfachste Quantenprozeß, weil nur dichotomische Variable und reelle Transformationen vorkommen. Wir stellen die Untersuchung der Voraussetzungen zurück, welche die gesamte Quanten-

theorie der Teilchen aus dem Grundprozeß aufzubauen erlauben. Eine solche Abtrennung ist möglich und zweckmäßig, weil mindestens nach den vorliegenden Ansätzen der Theorie der raum-zeitliche Zusammenhang der Operatoren deren Charakter nicht beeinflußt.

2. Voraussetzungen der Beobachtung

Im Sinne obiger Abgrenzung unserer Aufgabe fassen wir einen festen Raumpunkt P ins Auge und beobachten, was in ihm vorgeht. Für unsere Untersuchung müssen wir wissen, was beobachtbar ist. Wir nehmen an, daß wir zu jeder Zeit feststellen können, ob der Punkt P besetzt oder unbesetzt ist, und daß wir davon unabhängig für jedes Zeitintervall die Frage beantworten können, ob sich der Besetzungszustand geändert hat oder nicht. Es sei aber nicht vorausgesetzt, daß das Geschehen in P nach einer Beobachtung ungestört weiterlaufe. Das bedeutet, daß wir jeden Punkt in ungestörter Situation nur einmal ins Auge fassen können. Wir werden also im Einzelfall entweder den Besetzungszustand in einem einzigen Zeitpunkt t oder die Wandlung in einer einzigen Zeitspanne (t_0, t) bestimmen.

Individuelle Gesetze wären hiernach nur erreichbar, wenn wir Einzelmessungen an Punkten in gleichen Situationen zusammentragen könnten. Dies würde voraussetzen, daß es Experimente gäbe, Situationen herzustellen, in denen Existenzbeobachtungen in allen vergleichbaren Zeitpunkten oder Wandlungsbeobachtungen in allen vergleichbaren Zeitspannen *stets* zu demselben Ergebnis führen. Solche Experimente sind nicht bekannt.

Es ist nur möglich, statistische Gesetze zu formulieren. Eine statistische Beobachtung liegt vor, wenn wir für eine Gesamtheit von Vorgängen zur Zeit t eine Existenzbeobachtung oder im Zeitintervall (t_0, t) eine Wandlungsbeobachtung gemacht haben und die relativen Häufigkeiten angeben, mit denen die verschiedenen Fälle realisiert sind.

Auch bei statistischer Beobachtung einer einzigen Gesamtheit kann man nur *ein* Datum bestimmen, nämlich eine Wahrscheinlichkeit. Durch die Beobachtung hört die Gesamtheit auf, definiert zu sein. Die statistische Beobachtung ist jedoch dadurch der individuellen überlegen, daß Gesamtheiten im Gegensatz zu individuellen Situationen *reproduzierbar* sind. Reproduzierbar heiße eine Gesamtheit, wenn es wohldefinierte experimentelle

Verfahren gibt, Gesamtheiten herzustellen, in welchen analoge Beobachtungsakte stets gleiche Ergebnisse liefern. Ist auf diese Weise mit der Gewißheit, die Induktion zu geben vermag, sichergestellt, daß wir *äquivalente Gesamtheiten* haben und wie wir sie herstellen können, so können wir den ganzen Vorgang statistisch beschreiben, indem wir Einzelaussagen über viele äquivalente Gesamtheiten, wie von derselben Gesamtheit herrührend, behandeln.

Wenn wir, unserm Programm folgend, Punkt P beobachten, so sind die Vorgänge in ihm meistens durch seine Umgebung bestimmt. Man könnte deshalb daran zweifeln, ob unter diesen Umständen seine Isolation erlaubt ist. Doch ist es fürs erste unerheblich, wie die Änderung zustande kommt. Die Situation ist in gewisser Hinsicht ähnlich wie in der klassischen Mechanik. Dort betrachten wir zwar statt des Raumpunktes einen Massenpunkt im Laufe seiner Bewegung. Aber wir beschreiben diese zunächst rein kinematisch, also ebenfalls ohne Rücksicht auf ihre Ursachen, auf die wir aus den Gesetzen der Bewegung schließen. Auch die Mechanik der Kontinua können wir zum Vergleich heranziehen, in der wir Volumenelemente trotz starker Wechselwirkung mit der Umgebung isolieren und den Einfluß der Umgebung durch den lokalen Spannungstensor beschreiben.

3. Statistische Beschreibung des Grundprozesses

Nach der vorstehenden Analyse können wir die Wahrscheinlichkeiten für die Existenz eines Teilchens in P und für seine Wandlung in jeder definierten Gesamtheit als experimentell gegeben betrachten. Wir untersuchen speziell die Wahrscheinlichkeiten zu den Zeiten t_0 und t und für die durch sie definierte Zeitspanne (t_0, t) , die finit oder infinitesimal angenommen werden kann.

$$\dot{w}_1 = \frac{1 + \dot{w}}{2}, \quad \dot{w}_2 = \frac{1 - \dot{w}}{2} \quad (1)$$

seien die Wahrscheinlichkeiten, daß sich zur Zeit t_0 in P bzw. *kein* Teilchen oder *ein* Teilchen aufhält. Da beim Grundprozeß zwei oder mehr Teilchen in einem Punkte nicht angenommen werden, sind die Wahrscheinlichkeiten alternativ. Ihre Summe muß 1 sein. Die entsprechenden Gleichungen zur Zeit t lauten:

$$w_1 = \frac{1 + w}{2}, \quad w_2 = \frac{1 - w}{2}. \quad (2)$$

Die ebenfalls alternativen Wahrscheinlichkeiten, daß der Besetzungszustand in der Zeitspanne (t_0, t) erhalten bleibt oder sich ändert, nennen wir bzw.

$$v_1 = \frac{1+v}{2}, \quad v_2 = \frac{1-v}{2}. \quad (3)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten bezeichnen den Gesamteffekt in der Zeitspanne; v liefert keine Aussage darüber, ob mehrfache Wandlungen vorkommen.

Korrelationsstatistisch betrachtet, liegt eine *Doppelalternative* vor, die man durch eine Wahrscheinlichkeitstafel der Form

$$(W_{ik}) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

zu beschreiben pflegt. Darin möge W_{ik} die Wahrscheinlichkeit bedeuten, den Punkt P zur Zeit t_0 im Zustand k und zur Zeit t im Zustand i anzutreffen. Man beachte hier die Definition der Indexreihenfolge, die in dieser Form für Ziff. 4 bequem ist.

Die einzelnen Elemente der Korrelationstafel sind nach dem, was in Ziff. 2 als beobachtbar angenommen ist, experimentell nicht unmittelbar gegeben. Die Bestimmung von W_{12} würde z. B. voraussetzen, daß wir an demselben individuellen Fall feststellen könnten: Punkt P ist zur Zeit t_0 besetzt, zur Zeit t unbesetzt. Das, was wir beobachten können, reicht aber aus, um die Korrelationstafel zu berechnen.

Nach der Bedeutung der W_{ik} einerseits und der $\dot{w}_i, w_i$ und v_i andererseits, gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= W_{11} + W_{21}, & \dot{w}_2 &= W_{12} + W_{22}; \\ w_1 &= W_{11} + W_{12}, & w_2 &= W_{21} + W_{22}; \\ v_1 &= W_{11} + W_{22}, & v_2 &= W_{12} + W_{21}. \end{aligned} \quad (5)$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{w}_1 - \dot{w}_2 = W_{11} - W_{12} + W_{21} - W_{22}, \\ w &= w_1 - w_2 = W_{11} + W_{12} - W_{21} - W_{22}, \\ v &= v_1 - v_2 = W_{11} - W_{12} - W_{21} + W_{22}. \end{aligned} \quad (5a)$$

Nehmen wir noch

$$W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22} = 1 \quad (5b)$$

hinzu, so haben wir vier Bestimmungsgleichungen für W_{ik} mit folgender Auflösung:

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{1}{4} (1 + \dot{w} + w + v), \\ W_{12} &= \frac{1}{4} (1 - \dot{w} + w - v), \\ W_{21} &= \frac{1}{4} (1 + \dot{w} - w - v), \\ W_{22} &= \frac{1}{4} (1 - \dot{w} - w + v). \end{aligned} \quad (6)$$

Es ist von Interesse, die Variationsbereiche dieser Größen zu betrachten. Nach ihrer Definition sind die Größen $\dot{w}, w, v$ auf das Intervall $(-1, +1)$ beschränkt. Die W_{ik} können nur im Intervall $(0, +1)$ variieren, wenn sie echte Wahrscheinlichkeiten einer Doppelalternative sind. Wenn die W_{ik} unter Einhaltung der Bedingung (5b) in ihrem Intervall beliebig variieren, halten sich $\dot{w}, w, v$ nach den Gln. (5a) in ihren Grenzen.

Die Umkehrung gilt nicht. Wenn $\dot{w}, w$ und v in ihren Grenzen beliebig variieren, überschreiten die W_{ik} nach Gl. (6) niemals die obere Grenze; aber sie können kleiner als Null werden. Wenn z. B.

$$\dot{w} = -1, \quad w = +1, \quad v = +1$$

ist, so folgt aus (5):

$$W_{11} = +\frac{1}{2}, \quad W_{12} = +\frac{1}{2}, \quad W_{21} = -\frac{1}{2}, \quad W_{22} = +\frac{1}{2}.$$

Der Grund für dieses überraschende Resultat ist leicht zu erkennen. Es bedeuten:

$$\begin{aligned} \dot{w} = -1 &: \text{in P zur Zeit } t_0 \text{ ein Teilchen vorhanden,} \\ \dot{w} = +1 &: \text{in P zur Zeit } t \text{ kein Teilchen vorhanden,} \\ v = +1 &: \text{in P und der Zeitspanne } (t_0, t) \text{ kein Übergang.} \end{aligned} \quad (6a)$$

Das ist ein Widerspruch. Ähnliche Widersprüche ergeben sich stets, wenn negative W_{ik} vorkommen.

Man sollte darum meinen, daß die experimentell bestimmbaren Wahrscheinlichkeiten $\dot{w}_i, w_i, v_i$ nicht beliebig variieren können. Abb. 1 a—c geben für verschiedene Werte von v den Variationsbereich von $\dot{w}$ und w , in dem $W_{ik} \geq 0$ ist.

Abb. 1 a—c. Bereiche von $\dot{w}, w$ für drei Werte von v (schraffiert gezeichnet), für die $W_{ik} \geq 0$.

In den Figuren sind nur positive Werte von v berücksichtigt. Die Bereiche, die zu negativen v gehören, erhält man durch Spiegelung an den Achsen. Die Eckpunkte des Quadrates können nur im Falle der Determiniertheit erreicht werden.

Die W_{ik} dienen zur Berechnung von Mittelwerten der Funktionen f_{ik} , die von zwei Parametern ab-

hängen, dem Zustand k zur Zeit t_0 und dem Zustand i zur Zeit t , welche nur die beiden Werte 1 (unbesetzt) und 2 (besetzt) haben. Es ist

$$\bar{f} = \sum_{i,k} W_{ik} f_{ik}. \quad (7)$$

Sämtliche Mittelwerte lassen sich durch Linearkombination aus den Mittelwerten folgender vier charakteristischer Funktionen berechnen:

$$(f_{ik}^0) = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix}, (f'_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, -1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}, \\ (f''_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, -1 \\ -1, -1 \end{pmatrix}, (f'''_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, -1 \\ -1, 1 \end{pmatrix}. \quad (7a)$$

Nach den Gl. (5a) und (5b) lauten sie:

$$\bar{f}^0 = 1, \bar{f}' = \dot{w}, \bar{f}'' = w, \bar{f}''' = v. \quad (7b)$$

4. Vergleichung mit der Quantenstatistik.

Da wir die W_{ik} nicht unmittelbar experimentell bestimmen können, müssen wir uns fragen, ob wir überhaupt noch an den einschränkenden Ungleichungen $W_{ik} \geq 0$ festhalten können. Wenn sie bestehen würden, wäre das daran erkennbar, daß die Werte $\dot{w}$ und w bei gegebenem v nur in den Bereichen liegen, die durch unsere Figuren gekennzeichnet sind.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Ungleichungen durch die Quantentheorie in Frage gestellt werden. Der Beweis ergibt sich aus dem Zerlegungssatz¹ der Korrelationsrechnung. Er ist der Form nach bereits in der unten zitierten Arbeit enthalten. Wir wiederholen und ergänzen hier die früheren Ergebnisse.

So geringfügig die Änderungen durch den Fortfall der Ungleichungen mathematisch formal erscheinen, so schwerwiegend sind sie physikalisch. Ein Blick auf (6a) zeigt, daß ohne Ungleichungen die ganze Problematik der Quantentheorie auftaucht, denn die drei Thesen unter (6a) sind anschaulich nicht zu vereinen. Doch können wir dieses Problem hier noch nicht abschließend behandeln. Wir kommen in Ziff. 5 und 6 darauf zurück.

Zunächst geben wir den Beweis für unsere Behauptung. Dabei ist zu beachten, daß die Korrelations-tafel (6) und Gl. (7) auch ohne Ungleichungen gelten, weil sie zu den richtigen Mittelwerten (7b) führen und durch diese eindeutig bestimmt sind. Sie verlieren jedoch ihre anschauliche Bedeutung.

Der Zerlegungssatz besagt, daß wir jedes Element der Korrelationstafel bis auf Vorzeichen eindeutig in zwei Faktoren zerlegen können:

$$W_{ik} = V_{ik} S_{ik}, \quad (8)$$

wenn wir fordern, daß die S_{ik} eine orthogonale Matrix bilden:

$$S = (S_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha, & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9)$$

und daß folgende Produkte der zu S transponierten Matrix S^T mit $V = (V_{ik})$ symmetrisch sind:

$$\dot{P} = S^T V = \dot{P}^T, \quad P = V S^T = P^T. \quad (10)$$

Die Matrizen $\dot{P}$ und P lauten, wenn wir Gl. (9) benutzen und die Quotientenmatrix V , definiert durch Gl. (8), nämlich

$$V = \begin{pmatrix} W_{11}/\cos \alpha, & W_{12}/\sin \alpha \\ -W_{21}/\sin \alpha, & W_{22}/\cos \alpha \end{pmatrix},$$

in Gl. (10) einsetzen:

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} W_{11} + W_{21}, & W_{12} \operatorname{ctg} \alpha - W_{22} \operatorname{tg} \alpha \\ W_{11} \operatorname{tg} \alpha - W_{21} \operatorname{ctg} \alpha, & W_{12} + W_{22} \end{pmatrix} \quad (11a)$$

und

$$P = \begin{pmatrix} W_{11} + W_{12}, & -W_{11} \operatorname{tg} \alpha + W_{12} \operatorname{ctg} \alpha \\ -W_{21} \operatorname{ctg} \alpha + W_{22} \operatorname{tg} \alpha, & W_{21} + W_{22} \end{pmatrix}. \quad (11b)$$

Nach der Definition von W_{ik} lauten die Diagonalelemente dieser Matrizen:

$$\dot{P}_{ii} = \dot{w}_i, \quad P_{ii} = w_i. \quad (12)$$

Der Winkel α in der Orthogonalmatrix (9) ergibt sich aus der Forderung, daß $\dot{P}$ und P symmetrisch sein sollen. Wie schon früher gezeigt, ist

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = (W_{12} + W_{21})/(W_{11} + W_{22}).$$

Hieraus folgt, da sich Zähler und Nenner zu 1 ergänzen:

$$\sin^2 \alpha = W_{12} + W_{21}, \quad \cos^2 \alpha = W_{11} + W_{22}, \quad (13)$$

d. i. mit Rücksicht auf die Gl. (5a)

$$\cos 2\alpha = v. \quad (14)$$

Dieses Ergebnis ist befriedigend, weil hiernach die Orthogonalmatrix

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+v}, & \sqrt{1-v} \\ -\sqrt{1-v}, & \sqrt{1+v} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

¹ F. Bopp, Z. Naturforschg. 7a, 82 [1952].

die sich mit einer quantenstatistischen Transformationsmatrix als äquivalent erweisen wird, allein durch die Umwandlungswahrscheinlichkeiten bestimmt ist².

Von dem Zerlegungssatz her gelangen wir unmittelbar zur quantenstatistischen Beschreibung der Vorgänge. Durch die symmetrischen Matrizen $\dot{P}$ und P sind zwei Säkularprobleme definiert. Da nach Gl. (10)

$$P = S \dot{P} S^T \quad (16)$$

ist, haben sie dieselben Eigenwerte. Wenn wir diese gemeinsamen Eigenwerte mit p_ϱ bezeichnen, lauten die Säkulargleichungen:

$$\dot{P} \dot{\psi}^{(\varrho)} = p_\varrho \dot{\psi}^{(\varrho)}, \quad P \psi^{(\varrho)} = p_\varrho \psi^{(\varrho)}. \quad (17)$$

Es gibt zwei Eigenwerte ($\varrho = 1, 2$) und die zugehörigen Eigenvektoren $\dot{\psi}^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho)}$ sind durch die orthogonale Transformation verbunden:

$$\psi^{(\varrho)} = S \dot{\psi}^{(\varrho)}. \quad (18)$$

Wenn die Eigenwerte p_ϱ und die Eigenvektoren $\dot{\psi}^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho)}$ bekannt sind, kann man daraus umgekehrt alle andern Größen ableiten. Nach bekannten Sätzen (und auch sofort verifizierbar) sind:

$$S_{ik} = \sum_\varrho \psi_i^{(\varrho)} \dot{\psi}_k^{(\varrho)} \quad (19)$$

und

$$\dot{P}_{ik} = \sum_\varrho p_\varrho \dot{\psi}_i^{(\varrho)} \dot{\psi}_k^{(\varrho)}, \quad P_{ik} = \sum_\varrho p_\varrho \psi_i^{(\varrho)} \psi_k^{(\varrho)}. \quad (20)$$

Nach Gl. (12) folgt daraus

$$\dot{w}_i = \sum_\varrho p_\varrho (\dot{\psi}_i^{(\varrho)})^2, \quad w_i = \sum_\varrho p_\varrho (\psi_i^{(\varrho)})^2. \quad (21)$$

Auch V_{ik} und W_{ik} können wir in ähnlicher Weise darstellen (l. c.).

Hierin begegnen uns fast alle Gleichungen, die uns aus der Quantenstatistik Gibbsscher Gesamtheiten³ geläufig sind. $\dot{P}$ und P sind die statistischen Matrizen, $\dot{\psi}^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho)}$ die Zustandsvektoren, beide für die Zeiten t_0 und t_1 , und p_ϱ sind die Zustandsgewichte. Es fehlt noch die Gleichung für die Mittelwerte.

Wir knüpfen an Gl. (7) an und setzen nach (8) und (10):

$$W_{ik} = (P_{ij} S_{jk}) S_{ik}. \quad (22)$$

Über unterstrichene Indizes sei hier und im folgenden summiert. Die Substitution ergibt:

² Hierdurch wird der Fall der Determiniertheit ausgeschlossen; denn der Hamilton-Operator lautet $\dot{S}S = \dot{v}/2 \sqrt{1-v^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und wird für $v = \pm 1$ unendlich.

$$\dot{f} = P_{ij} S_{jk} S_{ik} f_{ik},$$

d. h. der Mittelwert hat die Form:

$$\dot{f} = \text{Spur}(PF) = P_{ij} F_{ji}. \quad (23)$$

Darin bedeutet F eine *symmetrische* Matrix, die der Funktion f_{ik} als Operator zugeordnet ist. Die Komponenten der Matrix lauten, wenn wir die beiden letzten Gleichungen identifizieren:

$$F_{ij} = \frac{1}{2} S_{ik} S_{jk} (f_{ik} + f_{jk}). \quad (23a)$$

Setzen wir in Gl. (23) die Transformation (16) ein, so folgt:

$$\dot{f} = \text{Spur}(\dot{P}\dot{F}); \quad (24)$$

darin ist $\dot{F}$ durch

$$\dot{F} = S^T F S, \quad F = S \dot{F} S^T \quad (24a)$$

definiert. $\dot{F}$ und F sind *verschiedene* Operator-matrizen, die *derselben* Funktion f_{ik} zugeordnet sind, sich aber auf die *verschiedenen* Zeitpunkte t_0 und t beziehen.

Die Operatormatrizen für die charakteristischen Funktionen aus Gl. (7a) lauten nach Gl. (23a) zur Zeit t :

$$F^0 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha, & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha, & \cos 2\alpha \end{pmatrix}, \\ F'' = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad F''' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha, & 0 \\ 0, & \cos 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Dafür können wir mit der Einheitsmatrix und den Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0, & -i \\ i, & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \quad (25a)$$

schreiben:

$$F^0 = \sigma_0, \quad F' = \sigma_z \cos 2\alpha - \sigma_x \sin 2\alpha, \quad F'' = \sigma_z, \\ F''' = \sigma_0 \cos 2\alpha. \quad (25b)$$

Es kommen also alle symmetrischen Matrizen vor.

Sämtliche Gleichungen in diesem Abschnitt folgen aus der (uneingeschränkten) Existenz der Korrelationstafel (6) und der Gl. (7) für die Mittelwerte. Man kann jedoch, ohne auf diese Gleichungen zurückzugreifen, die Größen der Quantenstatistik unmittelbar aus der Beobachtung bestimmen. Die Wahrscheinlichkeiten $\dot{w}_i$ und w_i liefern nach Gl. (12) die Diagonalelemente von $\dot{P}$ und P . Mit Rücksicht auf ihre Symmetrie lauten diese Matrizen also

³ M. Delbrück u. G. Molière, S.-B. preuß. Akad. Wiss. physik. math. Kl. 1936, Nr. 1.

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \dot{w}_0 & \dot{w}_0 \\ \dot{w}_0 & 1 - \dot{w}_0 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + w_0 & w_0 \\ w_0 & 1 - w_0 \end{pmatrix}.$$

Darin sind die Werte von $\dot{w}_0$ und w_0 noch unbestimmt. Da nach Gl. (16) die Eigenwerte beider Matrizen gleich sein müssen, sind $\dot{w}_0$ und w_0 nicht unabhängig. Aus der Gleichheit ihrer Determinanten folgt vielmehr die Bedingung

$$\dot{w}^2 + \dot{w}_0^2 = w^2 + w_0^2.$$

Der verbleibende Parameter bestimmt die Transformationsmatrix, die die beiden statistischen Matrizen verbindet. Er hängt also unmittelbar mit den Wahrscheinlichkeiten v_i zusammen.

5. Folgerungen aus der speziellen Transformationstheorie

Man kann die statistischen Matrizen $\dot{P}$ und P , die Operatormatrizen $\dot{F}$ und F und schließlich die Transformationsmatrix so transformieren, daß die fundamentalen Gln. (16) und (24a) auch für die transformierten Größen gelten und daß sich die Mittelwerte nicht ändern. Da experimentell nur die Mittelwerte faßbar sind, bedeutet eine solche Transformation innerhalb der Quantentheorie eine gleichberechtigte Darstellung desselben physikalischen Systems.

Geht man von der transformierten Darstellung zur Korrelationstafel über, so wird diese nicht ungeändert bleiben, weil sie auf andere Wahrscheinlichkeiten bezogen ist. Es ist leicht zu erkennen, daß es Transformationen gibt, die aus beliebigen Wahrscheinlichkeitstafeln solche mit lauter positiven Werten machen.

Jede orthogonale (oder im gegebenen Fall auch unitäre) Matrix O liefert eine Transformation, welche die Form der Grundgleichung und die Größe der Mittelwerte invariant läßt. Sei X eine der Matrizen $\dot{P}$, P , $\dot{F}$, F oder S , so definieren wir die transformierten Größen $X' = \dot{P}'$, P' , $\dot{F}'$, F' oder S' durch die Gleichung

$$X' = O^T X O. \quad (26)$$

Man verifiziert die Behauptung sofort durch Substitution der transformierten Größen in den Gleichungen (16), (24a) und (23).

Für uns sind speziell die Transformationen interessant, welche $\dot{P}$ auf Diagonalform bringen. Da sich bei der Transformation (26) die Eigenwerte nicht ändern, lautet die Matrix nach der Transformation:

$$\dot{P}'_{ik} = p_i \delta_{ik}.$$

Diesen Ausdruck haben wir in Gl. (22) einzusetzen. Es ergibt sich

$$W'_{ik} = S'_{ir} \dot{P}'_{rs} S'_{sj} \dot{S}'_{jk} S'_{ik} = S'_{ir} \dot{P}'_{rk} S'_{ik}$$

oder

$$W'_{ik} = (S'_{ik})^2 p_k. \quad (27)$$

In diesem Fall sind die W'_{ik} wesentlich positiv (oder 0), d. h. die Wahrscheinlichkeiten haben eine anschauliche Bedeutung. Bei geeigneter Wahl der Darstellung treten die Schwierigkeiten, von denen wir in Ziff. 3 und 4 gesprochen haben, nicht auf.

Die besondere Bedeutung dieser Darstellung wird auch durch folgende Betrachtung deutlich. Durch W_{ik} sind, elementarstatistisch gesprochen, die Übergangswahrscheinlichkeiten u'_{ik} bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit u'_{ik} , ein Teilchen zur Zeit im Zustand k zu finden, wenn es zur Zeit t_0 in i gewesen ist, berechnet sich aus

$$u'_{ik} = \frac{W'_{ki}}{\dot{w}_i}. \quad (28)$$

Darin sind $\dot{w}_i$ die Anfangswahrscheinlichkeit im transformierten System. Aus Gl. (27) erhält man dafür auf Grund der Orthogonalitätsrelation

$$\dot{w}_i = p_i; \quad (29)$$

somit ist

$$u'_{ik} = (S'_{ik})^2. \quad (30)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich den Quadraten der entsprechenden Elemente der Transformationsmatrix.

Diese Gleichung ist wiederum geläufig. In reinen Fällen, wenn $(p_1, p_2) = (1, 0)$ oder $(0, 1)$ ist, ist der Anfangszustand ein Zustand der Gewißheit, wie er gewöhnlich bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten vorausgesetzt wird. Man denke etwa an die Diracsche Störungsrechnung und an andere Verfahren der Streurechnung. Gl. (30) ergibt sich hier zwangsläufig aus dem statistischen Modell, gilt aber in dieser einfachen Form nur, wenn man die spezielle Darstellung wählt, in der die statistische Matrix des Anfangszustandes diagonal ist. Wenn das nicht der Fall ist, sind die Übergangswahrscheinlichkeiten weniger einfach und u. U. negativ.

Freilich sind die Wahrscheinlichkeiten $\dot{w}_i$, w_i und v_i im allgemeinen nicht unmittelbar die beobachteten. In (29) haben wir bereits $\dot{w}_i$ angegeben. Für w_i erhält man aus (27), (29) und (30) die sehr durchsichtige Gleichung

$$w_i = \dot{w}_i u'_{ki} \quad (31)$$

und für v'_i ergibt sich mit Rücksicht auf $u'_{12} = u'_{21}$ (mit u bezeichnet) und $u'_{11} = u'_{22} = 1 - u$:

$$v'_1 = 1 - u, \quad v'_2 = u. \quad (32)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\dot{w}'_i, w'_i, v'_i$ sind Linearkombinationen von $\dot{w}_i, w_i$ und v_i und nicht diese selbst.

Wenn wir daran festhalten, daß nur die in Ziff. 2 genannten Größen beobachtbar sind, müssen wir die letzten Gleichungen auf den Fall einschränken, daß die Eigenvektoren im Ursprung (zur Zeit t_0) Zustände der Gewißheit beschreiben, daß also für $\varrho = 1$ und 2

$$\dot{\psi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\psi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

ist. In diesem Fall ist die Korrelationstafel, die wir formal aus der Quantenstatistik gewinnen, auch inhaltlich sinnvoll⁴.

Dieses Ergebnis ist für das Experiment von Bedeutung. Wenn wir gemäß Ziff. 2 experimentell festgestellt haben, daß bei einer bestimmten Gesamtheit der Punkt P zur Zeit t_0 in allen Fällen besetzt oder in allen Fällen leer ist, so sind die Eigenvektoren durch Gl. (33) gegeben, und es liegt ein reiner Fall vor, wie Gl. (21) unmittelbar zeigt. Wir können also die Gln. (31) und (32) anwenden und erhalten:

$$w = w_1 - w_2 = (1 - 2u) \dot{w} = \pm (1 - 2u), \quad (34)$$

da im angenommenen Beispiel $\dot{w} = \pm 1$ ist. Eine Existenzmessung zur Zeit t (d. h. die Bestimmung von w) liefert hiernach die Übergangswahrscheinlichkeit u von t_0 nach t und nach den Gln. (30) und (15) außerdem die S -Matrix und die Wahrscheinlichkeiten v_i . Die Wandlungswahrscheinlichkeiten ergeben sich also ebenfalls aus Existenzbeobachtungen.

Machen wir ferner die in Ziff. 6 näher zu untersuchende Annahme, daß die Eigenvektoren $\dot{\psi}^{(\varrho)}$ durch Gl. (33) gegeben sind, ohne daß ein reiner Fall vorzuliegen braucht, so gelten ebenfalls die Gln. (31) und (32), nach denen an die Stelle von Gl. (33)

$$w = (1 - 2u) \dot{w} = v \dot{w} \quad (34a)$$

tritt. Die statistischen Matrizen lauten:

⁴ Die Voraussetzung von Zuständen der Gewißheit ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, wenn wir fordern, daß $W_{ik} \geq 0$ für beliebige S -Matrizen gelten soll. Setzen wir für P und S bzw.

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix},$$

für die nach Ihrer Definition die Relationen gelten:

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \dot{w} & 0 \\ 0 & 1 - \dot{w} \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + v \dot{w} & -\dot{w} \sqrt{1 - v^2} \\ -\dot{w} \sqrt{1 - v^2} & 1 - v \dot{w} \end{pmatrix}. \quad (34b)$$

Ihre Diagonalelemente ergeben sich aus Gl. (12). $\dot{P}_{12} = \dot{P}_{21} = 0$ folgt aus unserer Annahme und $P_{12} = P_{21} = \dot{w} \sqrt{1 - v^2}$ daraus, daß nicht nur die Spuren von $\dot{P}$ und P , sondern auch die Determinanten übereinstimmen müssen. Die Transformationsmatrix ist nach Gl. (16) durch (15) gegeben. Hiernach ist es möglich, die Übergangswahrscheinlichkeiten auch dann zu bestimmen, wenn kein reiner Fall vorliegt, vorausgesetzt, daß Gl. (33) gilt.

6. Die Gleichung $w = v \dot{w}$

Die hier wiederholte Gl. (34a) führt noch zu einer bemerkenswerten Einschränkung. Wenn $|w| > |\dot{w}|$ ist, wird $|v| > 1$. Das widerspricht der Bedeutung von v . Wir können also auf Gleichungen stoßen, die zwar positive W_{ik} liefern, aber unsinnige v . Man kann dieser Schwierigkeit sofort entgehen, wenn man Anfangs- und Endpunkt vertauscht und die statistische Matrix im Zeitpunkt t auf Diagonalform bringt, so daß $p_i = w_i$ ist.

Offensichtlich spielt bei dieser Schwierigkeit die Nichtumkehrbarkeit gewöhnlicher statistischer Vorgänge herein. Denken wir uns eine Reihe aufeinanderfolgender Zeitintervalle $(t_0, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3) \dots$ mit den Wandlungswahrscheinlichkeiten $v_i', v_i'', v_i''' \dots$, so berechnet sich die Existenzwahrscheinlichkeit nach dem n -ten Intervall aus der Gleichung

$$w^{(n)} = v^{(n)} \cdot v^{(n-1)} \dots v'' v' \dot{w},$$

in der $\dot{w}$ wie in (34a) auf die Anfangswahrscheinlichkeit bezogen ist. Wenn alle $|v^{(w)}| \leq 1$ sind, so bildet $w^{(n)}$ eine nicht aufsteigende Folge, die außer in speziellen Fällen monoton abfällt und gegen 0 konvergiert. Wir verlieren dabei immer mehr an Kenntnis. Ein derartiger einseitiger Ablauf statistischer Prozesse ist uns aus der Thermodynamik und aus der Fehlertheorie geläufig.

Quantenstatistische Prozesse sind demgegenüber umkehrbar. Wir dürfen daher bei ihrer Beschreibung

$$A \geq 0, \quad C \geq 0, \quad AC - B^2 \geq 0, \quad c^2 + s^2 = 1,$$

so ist nach Gl. (16) $W_{ik} \geq 0$, wenn

$$\left| \frac{B}{C} \right| \leq |\operatorname{tg} \alpha|, \quad |\operatorname{ctg} \alpha| \leq \left| \frac{A}{B} \right|$$

ist. Das gilt für beliebige α nur dann, wenn $B = 0$ ist.

mit gewöhnlichen statistischen Methoden nur dann erwarten, daß nicht unsinnige Wahrscheinlichkeitswerte herauskommen, wenn wir den Ursprung so legen, daß alle Prozesse, die von ihm zu irgendeinem andern Punkt führen, immer in dieselbe Richtung, hier speziell in die Richtung abnehmender $|w|$ weisen. Wir müssen also stets

$$|w| \leq w_{\max} \leq |\dot{w}|$$

annehmen. Darin ist $w_{\max}$ das Maximum der Werte von $|w|$, das in einer konkreten Gesamtheit wirklich erreicht wird.

Setzen wir $|\dot{w}| = 1$, so ist der Ursprung ein Punkt der Gewißheit. Wir gelangen zu einer Darstellung, in der die Gesamtheit als reiner Fall erscheint. Setzen wir $|\dot{w}| = w_{\max}$, so erhalten wir, wenn $w_{\max} < 1$ ist, ein Gemisch. Dasselbe gilt für irgendwelche Zwischenwerte:

$$w_{\max} \leq |\dot{w}| < 1.$$

Eine andere Wahl für positive W_{ik} und v_i gibt es nicht. Wenn $w_{\max} = 1$ ist, bleibt nur der reine Fall übrig.

Wir formulieren zum Schluß das Ergebnis: Der Grundprozeß der Quantentheorie enthält keine Elemente, die nicht der Anschauung zugänglich wären oder die sich der Objektivierbarkeit entzögen. Als Beweis dafür betrachten wir den Umstand, daß es stets möglich ist, eine statistische Gesamtheit von Grundprozessen mit den gewöhnlichen Methoden der Statistik zu behandeln, wenn man dabei nur berücksichtigt, daß diese für gerichtete Prozesse geschaffen sind, während die Quantenstatistik rückläufig sein kann. Hierin ist es begründet, daß wir den zeitlichen Verlauf von einem gemeinsamen Ursprung her betrachtet haben und nicht differentiell, wie es die Kausalanalyse erfordert. Die umkehrbaren statistischen Vorgängen angemessene Methode ist mindestens bei zweiwertigen Wahrscheinlichkeiten (Alternativen) die der Quantenstatistik.

Über die Objektivierbarkeit der Zustände in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

VON RUDOLF HAAG

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **8a**, 13—16 [1953]; eingegangen am 2. Oktober 1952)

Erwin Fues zum 60. Geburtstag gewidmet in dankbarer Erinnerung an viele Gespräche

Auf Grund zweier allgemeiner Forderungen an den Zustandsbegriff wird die Möglichkeit diskutiert, einem quantenmechanischen Einzelsystem objektive Zustandsgrößen zuzuordnen. Als kleinste hierdurch zugelassene Zustandsmannigfaltigkeit ergibt sich die Gesamtheit aller Wellenfunktionen. Da andererseits eine reale Auffassung der Wellenfunktionen zu den oft diskutierten Schwierigkeiten führt, erscheint die Anwendung des Zustandsbegriffs im hier definierten Sinn bei quantenmechanischen Systemen nicht zulässig.

Zwei Aspekte der Quantenmechanik sind verantwortlich für die Revision der erkenntnistheoretischen Grundlagen der Physik, die mit der Entwicklung der Quantenmechanik einsetzte und in der Formulierung der Axiome der Transformationstheorie einen gewissen Abschluß fand:

1. Die Indeterminiertheit des elementaren Geschehens. D. h.: Die bestmögliche Kenntnis der Situation der gegenwärtigen Welt genügt im allg. nicht, um den Ausgang eines Experiments vorherzusagen.

2. Die Schwierigkeiten der Objektivierbarkeit der Eigenschaften eines Systems. D. h.: Es ist im allg. nicht sinnvoll, einer Meßgröße in einem System einen bestimmten Wert zuzuschreiben, solange sie nicht beobachtet wird.

Hier soll lediglich die Schwierigkeit 2. betrachtet werden. Es besteht gedanklich kein zwingender Grund, den Begriff „Zustand eines Einzelsystems“ unmittelbar an die Meßgrößen anzuschließen. Man kann auch zunächst die Forderungen fixieren, die man an den Begriff stellt, und dann fragen, ob es