### Inhaltsverzeichnis

Überblick

1 **Lineare Gleichungssysteme**
   1.1 Auflösung gestaffelter Systeme ........................................... 7
   1.2 Gaußsche Eliminationsmethode ............................................ 8
   1.3 Pivot-Strategien und Nachiteration ....................................... 12
   1.4 Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen .... 19
   Übungsaufgaben ........................................................................... 22

2 **Fehleranalyse**
   2.1 Fehlerquellen ........................................................................ 27
   2.2 Kondition eines Problems ..................................................... 30
      2.2.1 Normweise Konditionsanalyse ........................................... 32
      2.2.2 Komponentenweise Konditionsanalyse ................................. 37
   2.3 Stabilität eines Algorithmus .................................................... 41
      2.3.1 Stabilitätskonzepte .......................................................... 42
      2.3.2 Vorwärtsanalyse ............................................................... 43
      2.3.3 Rückwärtsanalyse .............................................................. 49
   2.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme ............................... 51
      2.4.1 Löbarkeit unter der Lupe .................................................... 51
      2.4.2 Rückwärtsanalyse der Gauß-Elimination ............................. 53
      2.4.3 Beurteilung von Näherungslösungen .................................... 56
   Übungsaufgaben ........................................................................... 59

3 **Lineare Ausgleichsprobleme**
   3.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate .......................... 66
      3.1.1 Problemstellung ............................................................... 66
      3.1.2 Normalgleichungen .......................................................... 69
      3.1.3 Kondition .......................................................... .......................... 71
      3.1.4 Lösung der Normalgleichungen ........................................... 74
3.2 Orthogonalisierungsverfahren ........................................ 76
  3.2.1 Givens-Rotationen .............................................. 78
  3.2.2 Householder-Reflexionen ..................................... 80
3.3 Verallgemeinerte Inverse ........................................ 84
  Übungsaufgaben ...................................................... 89

4 Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme 92
  4.1 Fixpunktitration .................................................. 92
  4.2 Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme .......... 97
  4.3 Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Ausgleichsprobleme .... 104
  4.4 Parameterabhängige nichtlineare Gleichungssysteme .......... 111
     4.4.1 Lösungsstruktur .......................................... 111
     4.4.2 Fortsetzungsmethoden ..................................... 114
  Übungsaufgaben ...................................................... 126

5 Lineare Eigenwertprobleme 131
  5.1 Kondition des allgemeinen Eigenwertproblems .................. 132
  5.2 Vektoriteration .................................................. 136
  5.3 QR-Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme ........... 138
  5.4 Singulärwertzerlegung .......................................... 145
  5.5 Stochastische Eigenwertprobleme ................................ 151
     5.5.1 Perron-Frobenius-Theorie ................................ 152
     5.5.2 Fastentkoppelte Markov-Ketten ............................ 158
     5.5.3 Prinzip der Google-Suchmaschine ....................... 163
  Übungsaufgaben ...................................................... 165

6 Drei-Term-Rekursionen 171
  6.1 Theoretische Grundlagen ....................................... 172
     6.1.1 Orthogonalität und Drei-Term-Rekursionen ................ 173
     6.1.2 Homogene und inhomogene Rekursionen ................... 176
  6.2 Numerische Aspekte ............................................. 179
     6.2.1 Kondition .................................................. 180
     6.2.2 Idee des Miller-Algorithmus ............................... 187
  6.3 Adjungierte Summation .......................................... 189
     6.3.1 Summation von dominanten Lösungen ....................... 190
     6.3.2 Summation von Minimallösungen .......................... 193
  Übungsaufgaben ...................................................... 197
7 Interpolation und Approximation 200
  7.1 Klassische Polynom-Interpolation 201
  7.1.1 Eindeutigkeit und Kondition 201
  7.1.2 Hermite-Interpolation und dividierte Differenzen 205
  7.1.3 Approximationsfehler 213
  7.1.4 Minimax-Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome 214
  7.2 Trigonometrische Interpolation 218
  7.3 Bézier-Technik 225
  7.3.1 Bernstein-Polynome und Bézier-Darstellung 226
  7.3.2 Algorithmus von de Casteljau 233
  7.4 Splines 240
  7.4.1 Splineräume und B-Splines 241
  7.4.2 Splineinterpolation 248
  7.4.3 Berechnung kubischer Splines 252
  Übungsaufgaben 255

8 Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme 259
  8.1 Klassische Iterationsverfahren 261
  8.2 Tschebyscheff-Beschleunigung 267
  8.3 Verfahren der konjugierten Gradienten 272
  8.4 Vorkonditionierung 279
  8.5 Lanczos-Methoden 285
  Übungsaufgaben 290

9 Bestimmte Integrale 294
  9.1 Quadraturformeln 295
  9.2 Newton-Cotes-Formeln 298
  9.3 Gauß-Chrißoffel-Quadratur 304
  9.3.1 Konstruktion der Quadraturformeln 305
  9.3.2 Berechnung der Knoten und Gewichte 310
  9.4 Klassische Romberg-Quadratur 313
  9.4.1 Asymptotische Entwicklung der Trapezsumme 313
  9.4.2 Idee der Extrapolation 315
  9.4.3 Details des Algorithmus 321
  9.5 Adaptive Romberg-Quadratur 324
  9.5.1 Adaptives Prinzip 325
  9.5.2 Schätzung des Approximationsfehlers 327
  9.5.3 Herleitung des Algorithmus 330
  9.6 Schwierige Integranden 336
<table>
<thead>
<tr>
<th>Kapitel</th>
<th>Thema</th>
<th>Seiten</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>9.7</td>
<td>Adaptive Mehrgitter-Quadratur</td>
<td>340</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>9.7.1 Lokale Fehlerschätzung und Verfeinerungsregeln</td>
<td>340</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>9.7.2 Globale Fehlerschätzung und Details des Algorithmus</td>
<td>344</td>
</tr>
<tr>
<td>9.8</td>
<td>Monte-Carlo-Quadratur für hochdimensionale Integrale</td>
<td>347</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>9.8.1 Verwerfungsmethode</td>
<td>348</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>9.8.2 Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methoden</td>
<td>351</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>9.8.3 Konvergenzgeschwindigkeit</td>
<td>354</td>
</tr>
<tr>
<td>Übungsaufgaben</td>
<td></td>
<td>356</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Software 361

Literatur 363

Index 369