Mini-Monomath

Timothy Gowers

Mit dem Titel dieses Blogs verbeuge ich mich ein wenig vor Terry Taos vier Mini-Polymath-Diskussionen, in denen IMO-Aufgaben gemeinschaftlich im Internet gelöst wurden. Als Auftakt für eine – hoffentlich größere – Erhebung darüber, wie Menschen solche Probleme lösen, habe ich mich entschlossen, eines der diesjährigen IMO-Probleme anzugehen und meine Gedanken beim Lösen aufzuschreiben – direkt in LaTeX, ohne Papier und Bleistift. Deswegen dauerte es ziemlich lange, bis ich das Problem gelöst hatte. Es war die erste Aufgabe und damit eigentlich eher einfach. Im Wettbewerb würde man darauf setzen, sie schnell zu lösen und zu den schwierigeren Fragen 2 und 3 (besonders 3) überzugehen. Im Schnitt hat man eineinhalb Stunden Bearbeitungszeit pro Frage, und die habe ich mindestens gebraucht, denke ich, auch wenn ich die Zeit nicht gestoppt habe.

Meine Notizen illustrieren in gewisser Weise die oft fruchtlosen Irrungen und Wirrungen beim Lösen eines Problems. Wenn ich eine Moral daraus ziehen sollte, dann wäre es diese: Man darf beim Lösen nie glauben, es gebe einen Königsweg zur Lösung. Stattdessen formuliert man Teilfragen und baut Schritt für Schritt einen nützlichen Vorrat an Beobachtungen auf, bis der direkte Weg klar wird. Angesichts der Fußballweltmeisterschaft, die dieses Jahr stattgefunden hat, ziehe ich mal eine Parallele, die ich gar nicht so schlecht finde (wenn auch nicht perfekt): Eine Mannschaft spielt besser, wenn sie geduldig einen Angriff auf das Tor aufbaut, anstatt den Ball über das Feld zu holzen oder Distanzschüsse zu wagen. Die deutsche Mannschaft hat das sehr gut gezeigt, bei ihrem 7 : 1-Sieg über Brasilien.

Ich stelle mir vor, dass der Rest dieses Textes viel interessanter ist, wenn Sie selbst das Problem lösen, bevor Sie im Weiteren lesen, was ich gemacht habe. Umgekehrt bin ich an den Erfahrungen anderer Menschen sehr interessiert: Sind sie ähnlich wie meine oder ganz anders? Ich würde sehr gerne ein Gefühl dafür entwickeln, wie unterschiedlich die Erfahrungen sein können. Falls Sie ein Wettkämpfer sind, der das Problem gelöst hat, dann können Sie sich gerne an der Diskussion beteiligen!

Und wenn ich ein bisschen freie Zeit habe, dann kann es sein, dass ich dasselbe mit einigen der anderen Aufgaben ausprobiere.

Das Folgende ist exakt das, was ich geschrieben (respektive getippt) habe, ganz ohne Nachbearbeitung, abgesehen von den Änderungen im LaTeX-Code, damit WordPress den Text kompiliert, sowie zwei Kommentaren, die ich deutlich in blau hervorgehoben habe.

Problem: *Sei $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen. Beweisen Sie, dass es eine eindeutige ganze Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass*

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1} \, .$$

Erster Gedanke. Leichte Verblüffung.

Beobachtung. Der Ausdruck in der Mitte ist nicht der Durchschnitt. Wenn wir ihn durch den Durchschnitt ersetzen würden, dann würde die zweite Ungleichung sofort gelten.

Beweis/Entdeckung/Methode. Versuche, einfache Fälle anzusehen. Hier könnten wir zum Beispiel betrachten, was passiert, wenn $n = 1$ ist. Die Ungleichung sagt dann

$$a_1 < a_0 + a_1 \leq a_2.$$

Hier erhalten wir automatisch die erste Ungleichung, aber es gibt keinen Grund, warum die zweite Ungleichung wahr sein sollte.

* * *

Fassen wir diese Beobachtungen zusammen, dann sehen wir, dass die erste Ungleichung wahr ist, wenn $n = 1$ ist, und die zweite Ungleichung ist „fast wahr“, wenn n groß wird, weil sie wahr wird, wenn wir n durch $n+1$ im Nenner ersetzen.

Falls die Ungleichung für ein eindeutig bestimmbares n gelten soll, dann ist es plausibel zu vermuten, dass die erste Ungleichung für ein m verletzt ist, und falls m_0 diesbezüglich minimal ist, dann sind beide Ungleichungen wahr für $m_0 - 1$. Ich sollte das zu gegebener Zeit untersuchen, aber ich habe zunächst eine andere Idee.

Frage. Es ist klar, dass o.B.d.A. $a_0 = 1$ angenommen werden kann. Können wir jetzt $a_1, a_2, \dots$ so wählen, dass wir immer Gleichheit in der zweiten Ungleichung bekommen? Wir können natürlich die beiden Gleichungen lösen, sodass die Frage ist, ob die entstehende Folge ansteigen wird.

Wir bekommen $a_1 = a_0/0$, sodass wir besser $a_1 = a$ setzen und dann die Folge weiter konstruieren.

Also: $a_2 = a_1+1 = a+1$, $a_3 = (1+a+(a+1))/2 = a+1$, $a_4 = (1+a+(a+1)+(a+1))/3 = (a+1)$ und so weiter. Also sind die a_n mit $n \geq 2$ gleich, was sie nicht sein sollen. Das scheint wichtig.

* * *

DOI 10.1515/dmvm-2014-0081

Mal einfach aus Interesse gefragt: Was passiert mit den Ungleichungen, wenn wir (illegalerweise) die obige Folge verwenden? Wir kriegen $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)/n = a + 1$, also Gleichheit auf beiden Seiten, außer für $n = 1$, da bekommen wir $a_1 = a < 1 + a = a_2$.

Beweis/Entdeckung/Methode. Versuche, das Ergebnis zu widerlegen.

Beweis/Entdeckung/Untermethode. Versuche, das einfachste Gegenbeispiel zu finden, das du finden kannst.

Ein ganz offensichtlicher Ansatz besteht darin, die Ungleichung für $n = 1$ und für $n = 2$ wahr werden zu lassen. Los geht's. Ohne Verlust der Allgemeinheit ist $a_0 = 1$ und $a_1 = a$. Wir brauchen jetzt $a_2 \geq a + 1$.

Für $n = 2$ brauchen wir $a_2 < (a_0 + a_1 + a_2)/2 = (1+a+a_2)/2$. Das kann umgeformt werden zu $a_2 < 1+a$, was genau dem obigen widerspricht.

∗ ∗ ∗

Das löst das Problem nicht, sieht aber interessant aus. Insbesondere suggeriert es, dass man im allgemeinen Fall die erste Ungleichung umformen sollte, in

$$a_n(1 - 1/n) < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n} .$$

Das ist ziemlich nett, weil die rechte Seite diesmal genau der Durchschnitt ist.

Wenn es tatsächlich der Durchschnitt ist, der uns interessiert, dann könnten wir auch die erste Ungleichung umformen, indem wir sie einfach mit $n/(n+1)$ multiplizieren. Ergebnis:

$$na_n/(n+1) < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} .$$

∗ ∗ ∗

Ich denke, es ist an der Zeit, das Spiel neu zu überdenken, um zu beweisen, dass mindestens eine Lösung existiert. Wir wissen also, dass die erste Ungleichung gilt, wenn $n = 1$ ist, weil sie dann nur sagt, dass $a_1 < a_0 + a_1$ gilt. Kann das immer gelten? Falls ja, dann setzen wir wieder o.B.d.A. $a_0 = 1$ und $a_1 = a$. Danach erhalten wir $a_2 < 1 + a$, $a_3 < (1 + a + a_2)/2$, $a_4 < (1 + a + a_2 + a_3)/3$ usw.

Schreiben wir jetzt mal $b = 1+a$ und $a_i = b - c_i$ für $i \geq 2$. Dann haben wir $c_2 > 0$, $c_3 > c_2/2$, $c_4 > (c_2 + c_3)/3$ usw. Wir brauchen außerdem $c_2 > c_3 > c_4 > \ldots$

Setzen wir $c_1 = 0$. Nun wird die erste Bedingung zu $c_{n+1} > (c_1 + \cdots + c_n)/n$, aber $c_2 > c_3 > \ldots$ Ist das möglich?

Ist es mit Gleichheit möglich? O.B.d.A. $c_2 = 1$. Dann haben wir $c_3 = 1/2$, $c_4 = 1/2$, $c_5 = 1/2$ usw.

∗ ∗ ∗

Ich beginne mich zu fragen, ob die ganze Zahl so etwas wie 1 oder 2 sein muss. Denken wir darüber nach: Wir wissen, dass $a_1 < a_0 + a_1$ gilt. Falls $a_2 \geq a_0 + a_1$, dann haben wir unser n. Nehmen wir stattdessen an, dass $a_2 < a_0 + a_1$ ist. Dann gilt $2a_2 < a_0 + a_1 + a_2$, also $a_2 < (a_0 + a_1 + a_2)/2$. Falls jetzt $a_3 \geq (a_0 + a_1 + a_2)/2$ ist, dann sind wir wieder fertig, also nehmen wir mal an, dass $a_3 < (a_0 + a_1 + a_2)/2$ ist.

Aber weil $a_2 < (a_0 + a_1 + a_2)/2$ ist, können wir einfach a_3 zwischen den beiden einsetzen. Warum können wir damit nicht weitermachen? Versuchen wir es einmal.

Wenn $a_3 < (a_0 + a_1 + a_2)/2$ ist, dann ist $a_3 < (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)/3$, und wir setzen also a_4 zwischen den beiden ein.

∗ ∗ ∗

Ich scheine das Ergebnis widerlegt zu haben, also schaue ich lieber nach, wo ich falsch gelaufen bin. Ich werde versuchen, explizit eine Reihe zu konstruieren. Ich werde $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ nehmen. Ich brauche $a_1 < a_2 < a_0 + a_1$, also werde ich $a_2 = 5/2$ nehmen. Jetzt brauche ich $a_2 < a_3 < (a_0 + a_1 + a_2)/2 = 11/4$, also nehme ich $a_3 = 21/8$. Jetzt brauche ich $63/24 = a_3 < a_4 < (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)/3 = (8 + 16 + 20 + 21)/24 = 65/24$, also nehme ich $a_4 = 64/24 = 8/3$.

Ich scheine nicht steckenzubleiben. Versuche ich also nun, zu zeigen, dass ich so immer weitermachen kann. Nehmen wir an, ich habe schon $a_0, \ldots, a_n$ gewählt. Die Bedingung, die ich brauche, lautet

$$a_n < a_{n+1} < (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)/n .$$

∗ ∗ ∗

Per Induktion wissen wir schon, dass $a_n < (a_0 + \cdots + a_{n-1})/(n-1)$ ist, woraus folgt, dass $a_n(1 + 1/(n-1)) < (a_0 + \cdots + a_n)/(n-1)$ gilt und damit, dass $a_n < (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)/n$ gilt. Wir können a_{n+1} also zwischen diesen beiden Zahlen wie gewünscht finden

∗ ∗ ∗

Gowers, du Idiot: Lies mal die Fragestellung! Die a_n müssen positive ganze Zahlen sein.

Zum Glück ist die bisherige Arbeit keine komplette Zeitverwendung. [Der halbbewusste Gedanke, den ich hier im Hinterkopf hatte und der in der Rückschau klarer ist, bestand darin, dass die aufeinanderfolgenden Differenzen im Beispiel, das ich soeben konstruiert hatte, kleiner und kleiner werden. Daher erschien es höchst wahrscheinlich, das ich mit demselben Gedankengang beweisen könnte, dass ich für die a_i keine Ganzzahligkeit annehmen konnte.]

∗ ∗ ∗

Hier ist eine triviale Beobachtung: Wenn die zweite Ungleichung verletzt ist, dann ist $a_{n+1} < (n+1)a_n/n$. Wenn also $a_n = Cn$, dann ist $a_{n+1} < C(n+1)$. Wie lange kann das so weitergehen in den positiven ganzen Zahlen? Antwort: für immer, weil wir $a_n = n+2$ nehmen können.

$* * *$

Egal. Ich will zurück zu einer früheren Idee. [Es ist nicht offensichtlich, was ich hier mit einer „früheren Idee“ meine. Tatsächlich hatte ich vorher die Idee, die d_i wie unten zu definieren, wurde aber von etwas anderem abgelenkt und habe es am Ende nicht aufgeschrieben. Ein kleiner Teil meiner Reisenotizen fehlt also.] Es ist einfach, $d_1 = a_0 + a_1$ und $d_n = a_n$ für $n \geq 2$ zu definieren. Dann gilt für $n \geq 2$ die erste Ungleichung und wir haben

$$d_n < \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n} .$$

$* * *$

Jedes neue d_n ist also weniger als der Durchschnitt der d_i bis zu diesem n und daher weniger als der Durchschnitt der d_i vor diesem n. Das aber bedeutet, dass die Folge der Durchschnitte der d_i eine absteigende Folge bildet. Das bedeutet aber auch, dass die d_n von oben durch d_1 beschränkt sind; das sollte mir eigentlich schon vor Jahren aufgefallen sein! Sie können also keine wachsende Folge ganzer Zahlen bilden.

$* * *$

Ich habe jetzt gezeigt, dass die erste Ungleichung an einem bestimmten Punkt verletzt werden muss. Nehmen wir an, sie wird bei $n+1$ zum ersten Mal verletzt. Dann haben wir

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

und

$$a_{n+1} \geq \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} .$$

Die zweite Ungleichung sagt uns, dass d_{n+1} größer ist als der Durchschnitt der $d_1, \ldots, d_{n+1}$, was impliziert, dass es zugleich den Durchschnitt von $d_1, \ldots, d_n$ übersteigt. Das gibt uns die Ungleichung

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1} .$$

$* * *$

Also habe ich nun bewiesen, dass es eine ganze Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass die beiden Ungleichungen nicht zugleich gelten. Bleibt die Eindeutigkeit. Diese Formulierung mit den d_i sollte helfen. d_{n+1} ist zum ersten Mal wenigstens so groß wie der Durchschnitt der $d_1, \ldots, d_n$. Impliziert das, dass d_{n+2} wenigstens so groß ist wie der Durchschnitt der $d_1, \ldots, d_{n+1}$? Ja, weil d_{n+1} wenigstens so groß wie der Durchschnitt war und d_{n+2} größer als d_{n+1}. In anderen Worten, wir können leicht zeigen, dass, wenn die erste Ungleichung für $n+1$ verletzt ist, dann auch für $n+2$, und damit per Induktion für alle $m > n$.

Aus dem Englischen von Andreas Loos übertragen

Sir William Timothy Gowers ist seit 1998 Rouse Ball Professor of Mathematics am Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics an der Universität Cambridge und Fellow des Trinity College, Cambridge. 1998 erhielt er die Fields-Medaille.