Der Seilcomputer Kelvin

Thomas Püttmann

Im Jahre 1878 entwarf William Thomson, der spätere Lord Kelvin, eine Apparatur aus Wippen und Seilzügen zum Lösen linearer Gleichungssysteme [4]. In der Praxis spielt Thomsons Entwurf seit der Entwicklung programmgesteuerter elektronischer Rechenmaschinen keine Rolle mehr, sein Wert als Lern- und Anschauungsinstrument wurde aber bisher übersehen. Mit einer kleinen, aber wesentlichen Modifikation am Lösungsvorgang lässt sich der Entwurf mittels des fischertechnik-Konstruktionssystems in einen einfach zu justierenden, recht präzisen Analogcomputer umsetzen. Der hier vorgestellte Seilcomputer Kelvin ist Teil einer Reihe von speziell entwickelten Modellen, in denen Mathematik und Technik eindrucksvoll und lehrreich zusammenspielen und die unmittelbar zum interaktiven Experimentieren einladen.

1 Geschichte

Obwohl Thomsons Entwurf aus dem Jahr 1878 stammt, wurde er erst in der Mitte der 30er Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts am MIT umgesetzt. John Wilburs *Simultaneous Calculator* wog fast eine Tonne, besaß fast 1000 kugelgelagerte Seilrollen, fast 200 m Stahlband und konnte homogene Systeme mit neun Gleichungen und zehn Unbekannten lösen [5]. Der bekannteste Nutzer war der Wirtschaftswissenschaftler Wassily Leontief, der für die Entwicklung der Input–Output-Analyse 1973 den Nobelpreis bekam. Leontief erinnerte sich:

> You could really change the coefficients slightly by simply sitting on the frames, and if they did not give too much this meant that the solution was relatively stable [1].

In Japan wurde der *Simultanous Calculator* im Jahr 1944 nachgebaut und für Berechnungen in der Luftfahrttechnik eingesetzt [2]. Während das Original als verschollen gilt, ist der japanische Nachbau im *National Museum of Nature and Science* in Tokyo ausgestellt.

2 Aufbau und Funktion

Die Apparatur zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

ist schematisch im rechten Teil von Abb. 2 wiedergegeben. Die Koeffizienten werden durch die Positionen der Seilrollen an den Wippbalken eingestellt, die Inhomogenitäten durch die Längen der nach rechts ausgezogenen Seilabschnitte. Die Unbekannten x und y ergeben sich aus den Höhen der rechten Enden der Wippbalken über der horizontalen Lage.

Abbildung 1. *Nachbau im National Museum of Nature and Science, Tokyo, Japan (Foto: Daderot, CC0 1.0)*

DOI 10.1515/dmvm-2014-0087

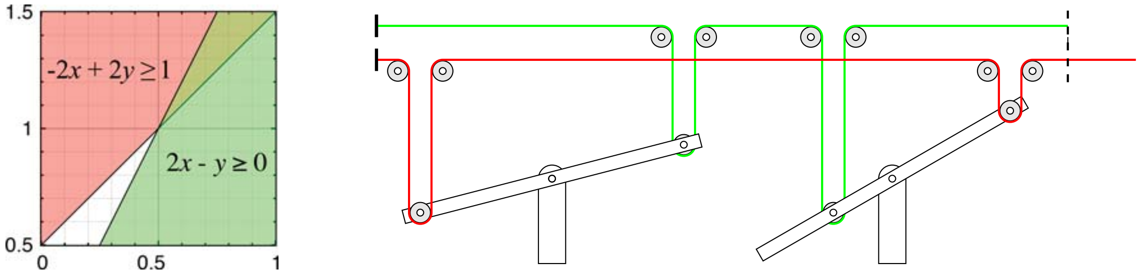

Abbildung 2. *Lösung eines (Un-)Gleichungssystems*

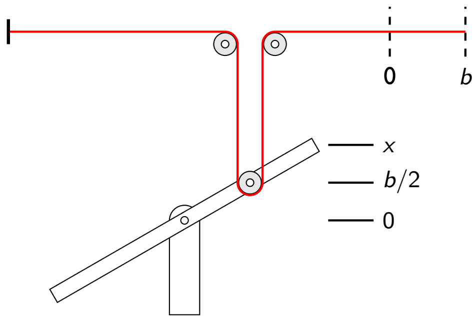

Abbildung 3. *Die Höhe der Seilrolle ist halb so groß wie die Länge b des ausgezogenen Seils. Befindet sich die Seilrolle in der Mitte der rechten Seite der Wippe ($a = 1$), ist daher die Höhe x des rechten Endes der Wippe gleich b. Für jede andere Position a der Seilrolle löst die Apparatur offensichtlich die Gleichung $ax = b$ (ähnliche Dreiecke).*

Warum und wie die Apparatur aus Abb. 2 funktioniert, versteht man am einfachsten anhand von Abb. 3.

Schaltet man n Wippen hintereinander und verwendet n Seile, so lassen sich Gleichungssyteme mit n Gleichungen für n Unbekannte lösen. Verfügt die Apparatur über mehr Seile als Wippen, so können auch lineare Optimierungsaufgaben gelöst werden.

3 Geänderter Lösungsvorgang

Thomson sah vor, dass die Apparatur nach Einstellung der Koeffizienten das Gleichungssystem permanent löst, indem Gewichte oder Federn an den Wippen so angebracht werden, dass alle Seile stramm sind. In Wilburs *Simultaneous Calculator* wurden stramme Seile durch eine doppelte Seilführung erzwungen. Beides ist für eine Umsetzung mit Baukastensystemen, bei denen keine Kugellager zur Verfügung stehen und der Rahmen nicht sehr starr ist, unvorteilhaft. Schneiden sich die Lösungsmengen zweier einzelner Gleichungen nämlich unter einem kleinen Winkel, so führen die permanent strammen Seile schnell zum Verklemmen der Apparatur, weil kleine Änderungen in den Inhomogenitäten große Änderungen in den Auslenkungen der Wippen bewirken müssen, die bei der unter Spannung größeren Reibung in den Lagern nicht durchgeführt werden.

Aus diesem Grund wird bei meinem Seilcomputer Kelvin der Benutzer stärker in den Lösungsprozess eingebunden. Erst nach dem Einstellen der Inhomogenitäten strafft er selbst die Seile, indem er geeignet auf die Enden der Wippen drückt.

Wenn die Wippen nicht gedrückt werden und damit die Seile nicht stramm sind, löst die Apparatur immerhin noch das Ungleichungssystem, das entsteht, wenn man alle Gleichheitszeichen durch $\geq$ ersetzt.

Wo man drücken muss, hängt jetzt von der Lage des Lösungskegels des Ungleichungssystems zu den Koordinatenrichtungen ab. Dies wird klar, wenn man Abb. 2 betrachtet: Angenommen, die Apparatur befindet sich in einem Zustand, der zu einem Punkt im Lösungskegel gehört. Drückt man nun auf das rechte Ende der linken Wippe, so verkleinert sich die x-Koordinate, bis der Rand des Lösungskegels erreicht ist, das hintere Seil also stramm ist. Drückt man weiter auf dieses Ende, so wandert die Apparatur günstigenfalls entlang des Randes des Lösungskegels zur Kegelspitze, also zum Lösungspunkt des Gleichungssystems. Dabei ist das hintere Seil die ganze Zeit gespannt, die zweite Wippe bewegt sich geführt mit und die Reibung ist dementsprechend groß. Besser ist es, abwechselnd auf die beiden rechten Enden der Wippen zu drücken und so mit möglichst wenig Reibung zur Lösung des Gleichungssystems zu gelangen.

Selbst bei einem System mit vier Gleichungen und vier Unbekannten kann man auf diese Weise die Lage der Lösungsmenge des Ungleichungssystems regelrecht ertasten.

4 Der Seilcomputer Kelvin

So einfach das schematische Konzept ist, so schwierig ist eine hochqualitative Umsetzung im Rahmen eines Baukastensystems. Obwohl das fischertechnik-Konstruktionssystem sich aus unterschiedlichen Gründen (z. B. kontinuierliche Verschiebbarkeit der Seilrollenhalter in den Nuten der Bausteine) sehr gut für die Umsetzung eignet, war eine längere Entwicklungszeit nötig, um den Aufbau möglichst kompakt zu bekommen, die Bedienung und Justierung einfach zu gestalten und ein möglichst präzises Gerät zu erhalten. Kelvin kann in verschie-

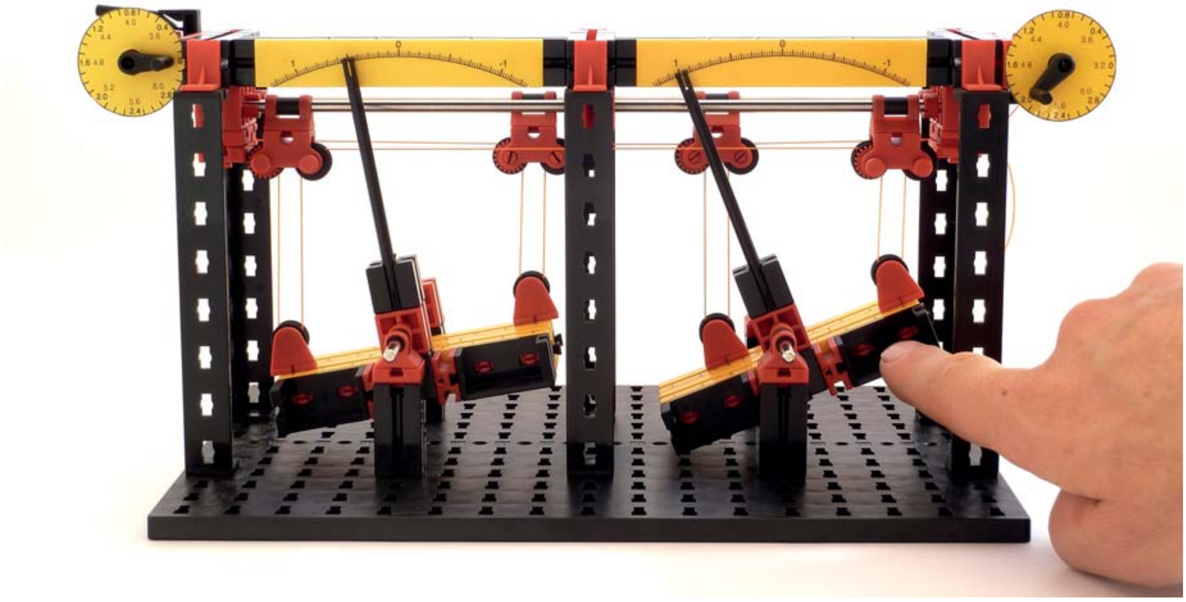

Abbildung 4. *Kelvin löst das Gleichungssystem* $4x - 2y = 0$, $-4x + 4y = 2$.

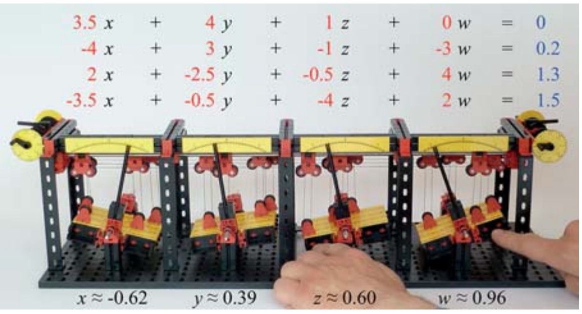

Abbildung 5. *Kelvin in der* 4×4*-Variante*

denen Größen gebaut werden, siehe Abb. 4 und Abb. 5, wobei der Preis für die etwa 200 Einzelteile der kleinsten Version zwischen 50 und 80 Euro beträgt. Eine ausführliche Bau- und Justierungsanleitung findet sich in [3].

Neben dem geänderten Lösungsvorgang besitzt meine Umsetzung von Thomsons Entwurf folgende Merkmale: Die Drehebenen werden nur durch die Seilrollen und nicht durch die (parallelverschobenen) Wippbalken besetzt, was die Übersichtlichkeit gegenüber einem Rippenaufbau deutlich erhöht.

Die Höhen der rechten Enden der Wippbalken werden mittels eines langen Zeigers proportional über den Wippen angezeigt. Die Kürze der Wippbalken würde ansonsten das Ablesen der Höhen ungenau machen. Daher wurde diese Höhe proportional mittels eines längeren Zeigers über der Wippe angezeigt. Die Inhomogenitäten werden anders als in Thomsons Entwurf durch Seilwinden mit Sperrklinken statt durch vertikale Gewichtszüge eingestellt. Dadurch verläuft der Einstellvorgang akustisch kontrolliert. Die Sperrklinken geben nämlich bei jedem Aufdrehen um 0,1 Längeneinheiten ein deutliches Klickgeräusch von sich.

Die Skalenbereiche sind praktischerweise so gewählt, dass Lösungsmengen von Gleichungssystemen, deren Koeffizienten betragsmäßig kleine ganze Zahlen sind, parallel in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden können, dessen Achsen als Hauptmarken ebenfalls betragsmäßig kleine ganze Zahlen tragen.

5 Didaktischer Wert

Als Lern- und Anschauungsinstrument hat Kelvin viel zu bieten:

- Die Hemmschwelle gegenüber einem abstrakten Begriff wird herabgesetzt, besonders bei technisch interessierten Schülern.
- Das Lösen von Gleichungssystemen geschieht unter Einsatz der Sinne Sehen, Fühlen und Hören. Das bedingt einen schnelleren und nachhaltigeren Lernprozess.
- Fehlerhafte oder ungenaue Metaphern wie das gleichzeitige Lösen von Gleichungen können durch korrekte Anschauung (eine gemeinsame Wippe) präzisiert werden.
- Konzepte wie lineare Abhängigkeit oder die Parametrisierung einer unendlichen Lösungsmenge werden fassbar.
- Die unterschiedliche Ausprägung der an einem Gleichungssystem beteiligten Variablen (Koeffizienten, Inhomogenitäten, Unbekannte) wird unmittelbar sichtbar.

Kelvin eignet sich zur Einführung in das iterative Lösen linearer Gleichungssysteme und in die lineare Optimierung.

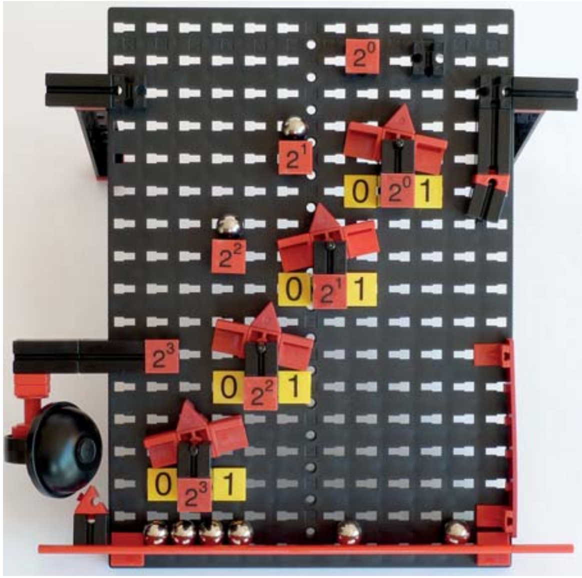

Abbildung 6. *4-Bit-Kugel-Binäraddierer*

Abbildung 7. *Kompasswagen zur Verdeutlichung und Erklärung des Paralleltransports auf der Sphäre*

6 Das Projekt *math-meets-machines*

Im Rahmen dieses Projekts werden Modelle aus Konstruktionsbaukästen entwickelt und dokumentiert, in denen Mathematik und Technik eindrucksvoll und lehrreich zusammenspielen und die unmittelbar zum interaktiven Experimentieren einladen. Gegenwärtig liegt der Schwerpunkt auf der Verdeutlichung zentraler mathematischer Konzepte (Rechengesetze, Zahlensysteme, logische Verknüpfungen, Gleichungssysteme, Integration, Winkelfunktionen, Homotopie, Paralleltransport, …). Die zugehörigen, in der Regel minimalistischen Modelle sind teils komplette Eigenentwicklungen (z. B. mechanische Logikgatter), teils Umsetzungen historischer Apparate und Instrumente (z. B. Vietoris-Schleppe), andere wiederum greifen neuere Ideen auf, die meiner Meinung nach stärker in die Mathematikausbildung Eingang finden sollten (z. B. Kugel-Binäraddierer nach J. T. Godfrey, Verdeutlichung des Paralleltransports auf der Sphäre durch Kompasswagen nach M. Santander). Die Dokumentation stellt immer auch historische Bezüge her.

Zielgruppe sind Hobbyisten, Lehrer, Schüler und Studenten. Die Beschreibungen und Bauanleitungen erscheinen regelmäßig in der fischertechnik-Fachzeitschrift ft:pedia. Die Modelle werden außerdem auf einem gleichnamigen YouTube-Kanal vorgestellt. Geplant ist die regelmäßige Durchführung eines Proseminars für Lehramtsstudierende, in denen jeweils ein Modell den Ausgangspunkt für daran anschließende, tiefergehende mathematische Problemstellungen darstellt. Weitere Modelle sollen von interessierten Lehramtsstudierenden im Rahmen von Abschlussarbeiten entwickelt und dokumentiert werden.

Literatur

[1] C. Eames. *A Computer Perspective: Background to the Computer Age*, Harvard University Press, Boston 1990.

[2] M. Maejima. Short history and calculation of the Wilbur machine, *Bull. Natn. Sci. Mus., Tokyo*, Ser. E, 24:25–29, 2001.

[3] T. Püttmann. Der Seilcomputer Kelvin, *ft:pedia 2/2014*:76–88. Eine verbesserte englische Version findet sich unter http://www.math-meets-machines.de/kelvin/simcalc.pdf.

[4] W. Thomson, On a machine for the solution of simultaneous linear equations, *Proc. R. Soc.*, 28:111–113, 1878.

[5] J. Wilbur, The mechanical solution of simultaneous equations, *J. Franklin Inst.* 222:715–724, 1936.

Apl. Prof. Dr. Thomas Püttmann, Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum. thomas.puettmann@rub.de

Thomas Püttmann (geb. 1968) ist außerplanmäßiger Professor für Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum, von Hause aus Differentialgeometer (mit Stationen in Münster, Bochum, Philadelphia, Bonn und Darmstadt) und war in den letzten Jahren vor allem im Übergangsbereich zwischen Schule und Hochschule tätig. Im Rahmen dieser Tätigkeiten setzte er des Öfteren selbst entwickelte mathematische Modelle ein, woraus das Projekt *math-meets-machines* erwuchs.